

ABDELLAOUI ACADEMY

abdellaouiacademy.com

# Cours de Mathématiques

Polycopié de cours

1<sup>re</sup> année du Baccalauréat

Sciences Expérimentales — Option internationale (BIOF)

Professeur ABDELLAOUI Said

ABDELLAOUI ACADEMY · ABDELLAOUIACADEMY.COM

Année scolaire  
2026 – 2027

Version  
1.0

# Sommaire

---

|            |                                                         |    |
|------------|---------------------------------------------------------|----|
| Chapitre 1 | La logique . . . . .                                    | 1  |
| 1          | Logique . . . . .                                       | 2  |
| 2          | Raisonnements . . . . .                                 | 8  |
| Chapitre 2 | Généralités sur les fonctions numériques . . . . .      | 13 |
| 1          | Parité et périodicité d'une fonction . . . . .          | 14 |
| 2          | Fonctions trigonométriques . . . . .                    | 16 |
| 3          | Les opérations sur les fonctions . . . . .              | 17 |
| Chapitre 3 | Barycentre dans le plan . . . . .                       | 25 |
| 1          | Barycentre de deux points . . . . .                     | 26 |
| 2          | Barycentre de trois points . . . . .                    | 29 |
| 3          | Barycentre d'un nombre quelconque de points . . . . .   | 31 |
| Chapitre 4 | Analytique du produit scalaire . . . . .                | 33 |
| 1          | Définition . . . . .                                    | 34 |
| 2          | Autres expressions du produit scalaire . . . . .        | 34 |
| 3          | Règles de calcul . . . . .                              | 37 |
| 4          | Vecteurs orthogonaux . . . . .                          | 38 |
| Chapitre 5 | Applications du produit scalaire . . . . .              | 39 |
| 1          | Équations de droites . . . . .                          | 40 |
| 2          | Norme d'un vecteur . . . . .                            | 41 |
| 3          | Distance d'un point à une droite . . . . .              | 41 |
| 4          | Équations de cercles . . . . .                          | 42 |
| 5          | Position relative d'une droite et d'un cercle . . . . . | 43 |
| 6          | Longueurs et angles dans un triangle . . . . .          | 44 |
| Chapitre 6 | Suites numériques . . . . .                             | 47 |
| 1          | Généralités . . . . .                                   | 48 |
| 2          | Sens de variation . . . . .                             | 49 |
| 3          | Suites arithmétiques . . . . .                          | 52 |
| 4          | Suites géométriques . . . . .                           | 54 |
| Chapitre 7 | Trigonométrie . . . . .                                 | 57 |
| 1          | Formules d'addition . . . . .                           | 58 |
| 2          | Formules de duplication . . . . .                       | 59 |
| 3          | Formules de linéarisation . . . . .                     | 60 |

|             |   |                                                                                |     |
|-------------|---|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
|             | 4 | Formulaire de trigonométrie . . . . .                                          | 61  |
| Chapitre 8  |   | La rotation dans le plan . . . . .                                             | 63  |
|             | 1 | Rotation . . . . .                                                             | 64  |
|             | 2 | Caractérisations et propriétés de la rotation . . . . .                        | 65  |
| Chapitre 9  |   | Limite d'une fonction numérique . . . . .                                      | 68  |
|             | 1 | Limite à l'infini . . . . .                                                    | 69  |
|             | 2 | Limite infinie en un réel $a$ . . . . .                                        | 70  |
|             | 3 | Opérations sur les limites . . . . .                                           | 71  |
| Chapitre 10 |   | La dérivabilité d'une fonction numérique . . . . .                             | 76  |
|             | 1 | Introduction . . . . .                                                         | 77  |
|             | 2 | Le nombre dérivé . . . . .                                                     | 77  |
|             | 3 | Fonction dérivée. Dérivée des fonctions élémentaires . . . . .                 | 80  |
|             | 4 | Interprétations géométrique et numérique . . . . .                             | 86  |
|             | 5 | Sens de variation d'une fonction . . . . .                                     | 88  |
| Chapitre 11 |   | Étude des fonctions numériques . . . . .                                       | 90  |
|             | 1 | Asymptote oblique . . . . .                                                    | 91  |
|             | 2 | Branches paraboliques . . . . .                                                | 93  |
|             | 3 | Convexité – Point d'inflexion . . . . .                                        | 93  |
|             | 4 | Convexité et dérivées . . . . .                                                | 95  |
|             | 5 | Axe et centre de symétrie d'une représentation graphique de fonction . . . . . | 96  |
|             | 6 | Position relative de deux courbes . . . . .                                    | 97  |
| Chapitre 12 |   | Vecteurs de l'espace . . . . .                                                 | 99  |
|             | 1 | Colinéarité, applications . . . . .                                            | 100 |
|             | 2 | Coplanarité . . . . .                                                          | 101 |
| Chapitre 13 |   | Droites et plans dans l'espace . . . . .                                       | 102 |
|             | 1 | Repérage dans l'espace . . . . .                                               | 103 |
|             | 2 | Distance, orthogonalité . . . . .                                              | 107 |
|             | 3 | Représentations paramétriques d'une droite de l'espace . . . . .               | 108 |
|             | 4 | Équation cartésienne d'un plan . . . . .                                       | 109 |
|             | 5 | Les positions relatives de droites et de plans . . . . .                       | 111 |

# Mode d'emploi du polycopié

---

Ce polycopié reprend, chapitre par chapitre, le cours de mathématiques de la première année du cycle du baccalauréat international (section sciences expérimentales). Les énoncés, hypothèses, formules, tableaux, exemples, applications et exercices intégrés au cours sont reproduits tels qu'ils figurent dans le document source.

## Présentation des éléments du cours

### Définition n° — titre

Les définitions sont placées dans un cadre simple dont l'onglet est plein.

### Propriété n° — titre

Les propriétés, propositions et corollaires sont placés dans un cadre à filet gauche épais.

### Théorème n° — titre

Les théorèmes sont placés dans un double cadre.

REMARQUE n°. Les remarques sont signalées par un simple filet vertical.

### Exemple n° — titre

Chaque exemple, application ou exercice comporte son énoncé complet dans la partie supérieure. La partie inférieure, intitulée « Correction », est réservée à la rédaction de l'élève.

----- CORRECTION -----

.....  
.....

*Source du cours : Cours et Exercices — Première année du cycle du baccalauréat international, section sciences expérimentales, A. Afaadas. Lorsqu'une figure du document source n'a pas pu être restituée, un cadre en pointillés en indique l'emplacement.*

CHAPITRE

# 1

---

## La logique

---

### Sommaire du chapitre

|          |                               |    |
|----------|-------------------------------|----|
| <b>1</b> | Logique . . . . .             | 2  |
| 1.1      | Assertions . . . . .          | 2  |
| 1.2      | Quantificateurs . . . . .     | 5  |
| <b>2</b> | Raisonnements . . . . .       | 8  |
| 2.1      | Raisonnement direct . . . . . | 8  |
| 2.2      | Cas par cas . . . . .         | 8  |
| 2.3      | Contraposée . . . . .         | 9  |
| 2.4      | Absurde . . . . .             | 10 |
| 2.5      | Contre-exemple . . . . .      | 10 |
| 2.6      | Récurrence . . . . .          | 11 |

## 1. Logique

### 1.1. Assertions

#### Définition 1.1 — Assertion

Une *assertion* est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

#### Exemple 1.1

- « Il pleut. »
- « Je suis plus grand que toi. »
- «  $2 + 2 = 4$  »
- «  $2 \times 3 = 7$  »
- « Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $x^2 \geq 0$ . »

----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....

**(Propositions)** Si  $P$  est une assertion et  $Q$  est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de  $P$  et de  $Q$ .

#### L'opérateur logique « et »

#### Définition 1.2 — L'opérateur « et »

L'assertion «  $P$  et  $Q$  » est vraie si  $P$  est vraie et  $Q$  est vraie. L'assertion «  $P$  et  $Q$  » est fausse sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

| $P \backslash Q$ | V | F |
|------------------|---|---|
| V                | V | F |
| F                | F | F |

**Figure 1** – Table de vérité de «  $P$  et  $Q$  »

Par exemple si  $P$  est l'assertion « Cette carte est un as » et  $Q$  l'assertion « Cette carte est cœur » alors l'assertion «  $P$  et  $Q$  » est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

#### L'opérateur logique « ou »

#### Définition 1.3 — L'opérateur « ou »

L'assertion «  $P$  ou  $Q$  » est vraie si l'une des deux assertions  $P$  ou  $Q$  est vraie. L'assertion «  $P$  ou  $Q$  » est fausse si les deux assertions  $P$  et  $Q$  sont fausses.

On reprend ceci dans la table de vérité :

| $P \backslash Q$ | V | F |
|------------------|---|---|
| V                | V | V |
| F                | V | F |

**Figure 2** – Table de vérité de «  $P$  ou  $Q$  »

Si  $P$  est l'assertion « Cette carte est un as » et  $Q$  l'assertion « Cette carte est cœur » alors l'assertion «  $P$  ou  $Q$  » est vraie si la carte est un as ou bien un cœur (en particulier elle est vraie pour l'as de cœur).

**REMARQUE 1.1.** Pour définir les opérateurs « ou », « et » on fait appel à une phrase en français utilisant les mots *ou*, *et* ! Les tables de vérités permettent d'éviter ce problème.

### La négation « non »

#### Définition 1.4 — La négation

L'assertion « non  $P$  » est vraie si  $P$  est fausse, et fausse si  $P$  est vraie.

| $P$     | V | F |
|---------|---|---|
| non $P$ | F | V |

**Figure 3** – Table de vérité de « non  $P$  »

### L'implication $\implies$

#### Définition 1.5 — L'implication

La définition mathématique est la suivante :

L'assertion « (non  $P$ ) ou  $Q$  » est notée «  $P \implies Q$  ».

Sa table de vérité est donc la suivante :

| $P \backslash Q$ | V | F |
|------------------|---|---|
| V                | V | F |
| F                | V | V |

**Figure 4** – Table de vérité de «  $P \implies Q$  »

L'assertion «  $P \implies Q$  » se lit en français «  $P$  implique  $Q$  ».

Elle se lit souvent aussi « si  $P$  est vraie alors  $Q$  est vraie » ou « si  $P$  alors  $Q$  ».

Par exemple :

- «  $0 \leq x \leq 25 \implies \sqrt{x} \leq 5$  » est vraie (prendre la racine carrée).
- «  $x \in ]-\infty, -4[ \implies x^2 + 3x - 4 > 0$  » est vraie (étudier le binôme).
- «  $\sin(\theta) = 0 \implies \theta = 0$  » est fausse (regarder pour  $\theta = 2\pi$  par exemple).
- «  $2 + 2 = 5 \implies \sqrt{2} = 2$  » est vraie ! Eh oui, si  $P$  est fausse alors l'assertion «  $P \implies Q$  » est toujours vraie.

### L'équivalence $\iff$

**Définition 1.6 — L'équivalence**

L'équivalence est définie par :

«  $P \iff Q$  » est l'assertion «  $(P \implies Q)$  et  $(Q \implies P)$  ».

On dira «  $P$  est équivalent à  $Q$  » ou «  $P$  équivaut à  $Q$  » ou «  $P$  si et seulement si  $Q$  ». Cette assertion est vraie lorsque  $P$  et  $Q$  sont vraies ou lorsque  $P$  et  $Q$  sont fausses. La table de vérité est :

| $P \backslash Q$ | V | F |
|------------------|---|---|
| V                | V | F |
| F                | F | V |

**Figure 5** – Table de vérité de «  $P \iff Q$  »

**Exemple 1.2**

- Pour  $x, x' \in \mathbb{R}$ , l'équivalence «  $x \cdot x' = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x' = 0)$  » est vraie.
- Voici une équivalence toujours fausse (quelle que soit l'assertion  $P$ ) : «  $P \iff \text{non}(P)$  ».

----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....

On s'intéresse davantage aux assertions vraies qu'aux fausses, aussi dans la pratique et en dehors de ce chapitre on écrira «  $P \iff Q$  » ou «  $P \implies Q$  » uniquement lorsque ce sont des assertions vraies. Par exemple si l'on écrit «  $P \iff Q$  » cela sous-entend «  $P \iff Q$  est vraie ». Attention rien ne dit que  $P$  et  $Q$  soient vraies. Cela signifie que  $P$  et  $Q$  sont vraies en même temps ou fausses en même temps.

**Proposition 1.1**

Soient  $P, Q, R$  trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1.  $P \iff \text{non}(\text{non}(P))$
2.  $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$
3.  $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
4.  $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
5.  $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
6.  $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
7.  $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
8. «  $P \implies Q$  »  $\iff$  «  $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$  »

DÉMONSTRATION. Voici des exemples de démonstrations :

4. Il suffit de comparer les deux assertions « non( $P$  et  $Q$ ) » et « (non  $P$ ) ou (non  $Q$ ) » pour toutes les valeurs possibles de  $P$  et  $Q$ . Par exemple si  $P$  est vrai et  $Q$  est vrai alors «  $P$  et  $Q$  » est vrai donc « non( $P$  et  $Q$ ) » est faux ; d'autre part (non  $P$ ) est faux, (non  $Q$ ) est faux donc « (non  $P$ ) ou (non  $Q$ ) » est faux. Ainsi dans ce premier cas les assertions sont toutes les deux fausses. On dresse ainsi les deux tables de vérités et comme elles sont égales les deux assertions sont équivalentes.

| $P \backslash Q$ | V | F |
|------------------|---|---|
| V                | F | V |
| F                | V | V |

**Figure 6** – Tables de vérité de « non( $P$  et  $Q$ ) » et de « (non  $P$ ) ou (non  $Q$ ) »

6. On fait la même chose mais il y a trois variables :  $P, Q, R$ . On compare donc les tables de vérité d'abord dans le cas où  $P$  est vrai (à gauche), puis dans le cas où  $P$  est faux (à droite). Dans les deux cas les deux assertions «  $P$  et ( $Q$  ou  $R$ ) » et « ( $P$  et  $Q$ ) ou ( $P$  et  $R$ ) » ont la même table de vérité donc les assertions sont équivalentes.

| $Q \backslash R$ | V | F |
|------------------|---|---|
| V                | V | V |
| F                | V | F |

| $Q \backslash R$ | V | F |
|------------------|---|---|
| V                | F | F |
| F                | F | F |

8. Par définition, l'implication «  $P \implies Q$  » est l'assertion « (non  $P$ ) ou  $Q$  ». Donc l'implication « non( $Q$ )  $\implies$  non( $P$ ) » est équivalente à « non(non( $Q$ )) ou non( $P$ ) » qui équivaut encore à «  $Q$  ou non( $P$ ) » et donc est équivalente à «  $P \implies Q$  ». On aurait aussi pu encore une fois dresser les deux tables de vérité et voir qu'elles sont égales.

□

## 1.2. Quantificateurs

**Le quantificateur  $\forall$  : « pour tout »**

Une assertion  $P$  peut dépendre d'un paramètre  $x$ , par exemple «  $x^2 \geq 1$  », l'assertion  $P(x)$  est vraie ou fausse selon la valeur de  $x$ .

### Définition 1.7 — Le quantificateur $\forall$

L'assertion

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions  $P(x)$  sont vraies pour tous les éléments  $x$  de l'ensemble  $E$ .

On lit « Pour tout  $x$  appartenant à  $E$ ,  $P(x)$  », sous-entendu « Pour tout  $x$  appartenant à  $E$ ,  $P(x)$  est vraie ».

Par exemple :

- «  $\forall x \in [1, +\infty[ \quad (x^2 \geq 1)$  » est une assertion vraie.
- «  $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 \geq 1)$  » est une assertion fausse.
- «  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n(n+1)$  est divisible par 2 » est vraie.

**Le quantificateur  $\exists$  : « il existe »****Définition 1.8 — Le quantificateur  $\exists$** 

L'assertion

$$\exists x \in E \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un  $x$  de  $E$  pour lequel  $P(x)$  est vraie. On lit « il existe  $x$  appartenant à  $E$  tel que  $P(x)$  (soit vraie) ».

Par exemple :

- «  $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x(x-1) < 0)$  » est vraie (par exemple  $x = \frac{1}{2}$  vérifie bien la propriété).
- «  $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 - n > n$  » est vraie (il y a plein de choix, par exemple  $n = 3$  convient, mais aussi  $n = 10$  ou même  $n = 100$ , un seul suffit pour dire que l'assertion est vraie).
- «  $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = -1)$  » est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).

**La négation des quantificateurs****Propriété 1.2 — Négation des quantificateurs**La négation de «  $\forall x \in E \quad P(x)$  » est «  $\exists x \in E \quad \text{non } P(x)$  ».La négation de «  $\exists x \in E \quad P(x)$  » est «  $\forall x \in E \quad \text{non } P(x)$  ».

Par exemple la négation de «  $\forall x \in [1, +\infty[ \quad (x^2 \geq 1)$  » est l'assertion «  $\exists x \in [1, +\infty[ \quad (x^2 < 1)$  ». En effet la négation de  $x^2 \geq 1$  est  $\text{non}(x^2 \geq 1)$  mais s'écrit plus simplement  $x^2 < 1$ .

**Exemple 1.3**

Voici des exemples :

- La négation de «  $\exists z \in \mathbb{C} \quad (z^2 + z + 1 = 0)$  » est «  $\forall z \in \mathbb{C} \quad (z^2 + z + 1 \neq 0)$  ».
- La négation de «  $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 \in \mathbb{Z})$  » est «  $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 \notin \mathbb{Z})$  ».
- Ce n'est pas plus difficile d'écrire la négation de phrases complexes. Pour l'assertion :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y > 0 \quad (x + y > 10)$$

sa négation est

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad (x + y \leq 10).$$

----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....

**REMARQUES 1.2.** L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad (x + y > 0) \quad \text{et} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x + y > 0).$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse. En effet une phrase logique se lit de gauche à droite, ainsi la première phrase affirme « Pour tout réel  $x$ , il existe un réel  $y$  (qui peut donc dépendre de  $x$ ) tel que  $x + y > 0$ . » (par exemple on peut prendre  $y = x + 1$ ). C'est donc une phrase vraie. Par contre la deuxième se lit : « Il existe un réel  $y$ , tel que pour tout réel  $x$ ,

$x + y > 0$ . » Cette phrase est fausse, cela ne peut pas être le même  $y$  qui convient pour tous les  $x$  !

On retrouve la même différence dans les phrases en français suivantes. Voici une phrase vraie « Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone », bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fausse : « Il existe un numéro, pour toutes les personnes ». Ce serait le même numéro pour tout le monde !

Terminons avec d'autres remarques.

- Quand on écrit «  $\exists x \in \mathbb{R} \quad (f(x) = 0)$  » cela signifie juste qu'il existe un réel pour lequel  $f$  s'annule. Rien ne dit que ce  $x$  est unique. Dans un premier temps vous pouvez lire la phrase ainsi : « il existe au moins un réel  $x$  tel que  $f(x) = 0$  ». Afin de préciser que  $f$  s'annule en une unique valeur, on rajoute un point d'exclamation :

$$\exists! x \in \mathbb{R} \quad (f(x) = 0).$$

- Pour la négation d'une phrase logique, il n'est pas nécessaire de savoir si la phrase est fausse ou vraie. Le procédé est algorithmique : on change le « pour tout » en « il existe » et inversement, puis on prend la négation de l'assertion  $P$ .
- Pour la négation d'une proposition, il faut être précis : la négation de l'inégalité stricte «  $<$  » est l'inégalité large «  $\geq$  », et inversement.
- Les quantificateurs ne sont pas des abréviations. Soit vous écrivez une phrase en français : « Pour tout réel  $x$ , si  $f(x) = 1$  alors  $x \geq 0$ . », soit vous écrivez la phrase logique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x) = 1 \implies x \geq 0).$$

Mais surtout n'écrivez pas «  $\forall x$  réel, si  $f(x) = 1 \implies x$  positif ou nul ». Enfin, pour passer d'une ligne à l'autre d'un raisonnement, préférez plutôt « donc » à «  $\implies$  ».

- Il est défendu d'écrire  $\nexists$ ,  $\nRightarrow$ . Ces symboles n'existent pas !

### Exercice 1.1 — Mini-exercices

1. Écrire la table de vérité du « ou exclusif ». (C'est le *ou* dans la phrase « fromage ou dessert », l'un ou l'autre mais pas les deux.)
2. Écrire la table de vérité de « non ( $P$  et  $Q$ ) ». Que remarquez vous ?
3. Écrire la négation de «  $P \implies Q$  ».
4. Démontrer les assertions restantes de la proposition 1.1.
5. Écrire la négation de « ( $P$  et ( $Q$  ou  $R$ )) ».
6. Écrire à l'aide des quantificateurs la phrase suivante : « Pour tout nombre réel, son carré est positif ». Puis écrire la négation.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 2. Raisonnements

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

### 2.1. Raisonnement direct

#### Méthode 1.1 — Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion «  $P \implies Q$  » est vraie. On suppose que  $P$  est vraie et on montre qu'alors  $Q$  est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

#### Exemple 1.4

Montrer que si  $a, b \in \mathbb{Q}$  alors  $a + b \in \mathbb{Q}$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 2.2. Cas par cas

#### Méthode 1.2 — Disjonction des cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion  $P(x)$  pour tous les  $x$  dans un ensemble  $E$ , on montre l'assertion pour les  $x$  dans une partie  $A$  de  $E$ , puis pour les  $x$  n'appartenant pas à  $A$ . C'est la méthode de *disjonction* ou du *cas par cas*.

**Exemple 1.5**

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**2.3. Contraposée****Méthode 1.3 — Raisonnement par contraposition**

Le raisonnement par *contraposition* est basé sur l'équivalence suivante (voir la proposition 1.1) :  
 L'assertion «  $P \implies Q$  » est équivalente à «  $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$  ».  
 Donc si l'on souhaite montrer l'assertion «  $P \implies Q$  », on montre en fait que si  $\text{non}(Q)$  est vraie alors  $\text{non}(P)$  est vraie.

**Exemple 1.6**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que si  $n^2$  est pair alors  $n$  est pair.

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 2.4. Absurde

### Méthode 1.4 — Raisonnement par l'absurde

Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer «  $P \implies Q$  » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que  $P$  est vraie et que  $Q$  est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si  $P$  est vraie alors  $Q$  doit être vraie et donc «  $P \implies Q$  » est vraie.

### Exemple 1.7

Soient  $a, b \geq 0$ . Montrer que si  $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$  alors  $a = b$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dans la pratique, on peut choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou par l'absurde. Attention cependant de bien écrire quel type de raisonnement vous choisissez et surtout de ne pas changer en cours de rédaction !

## 2.5. Contre-exemple

### Méthode 1.5 — Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type «  $\forall x \in E \ P(x)$  » est vraie alors pour chaque  $x$  de  $E$  il faut montrer que  $P(x)$  est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver  $x \in E$  tel que  $P(x)$  soit fausse. (Rappelez-vous la négation de «  $\forall x \in E \ P(x)$  » est «  $\exists x \in E \ \text{non } P(x)$  »). Trouver un tel  $x$  c'est trouver un *contre-exemple* à l'assertion «  $\forall x \in E \ P(x)$  ».

### Exemple 1.8

Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ». (Les carrés sont les  $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$ . Par exemple  $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$ .)

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

## 2.6. Récurrence

### Méthode 1.6 — Raisonnement par récurrence

Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion  $P(n)$ , dépendant de  $n$ , est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de l'*initialisation* on prouve  $P(0)$ . Pour l'étape d'*hérédité*, on suppose  $n \geq 0$  donné avec  $P(n)$  vraie, et on démontre alors que l'assertion  $P(n+1)$  au rang suivant est vraie. Enfin dans la *conclusion*, on rappelle que par le principe de récurrence  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exemple 1.9

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^n > n$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### REMARQUES 1.3.

- La rédaction d'une récurrence est assez rigide. Respectez scrupuleusement la rédaction proposée : donnez un nom à l'assertion que vous souhaitez montrer (ici  $P(n)$ ), respectez les trois étapes (même si souvent l'étape d'initialisation est très facile). En particulier méditez et conservez la première ligne de l'hérédité « Fixons  $n \geq 0$ . Supposons que  $P(n)$  soit vraie. Nous allons montrer que  $P(n+1)$  est vraie. »
- Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout  $n \geq n_0$ , alors on commence l'initialisation au rang  $n_0$ .
- Le principe de récurrence est basé sur la construction de  $\mathbb{N}$ . En effet un des axiomes pour définir  $\mathbb{N}$  est le suivant : « Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{N}$  qui contient 0 et telle que si  $n \in A$  alors  $n+1 \in A$ . Alors  $A = \mathbb{N}$  ».

### Exercice 1.2

1. (Raisonnement direct) Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que si  $a \leq b$  alors  $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$  et  $a \leq \sqrt{ab} \leq b$ .
2. (Cas par cas) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n(n+1)$  est divisible par 2 (distinguer les  $n$  pairs des  $n$  impairs).
3. (Contraposée ou absurde) Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Montrer que si  $b \neq 0$  alors  $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . (On utilisera que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .)

4. (Absurde) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\sqrt{n^2 + 1}$  n'est pas un entier.
5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $x < 2 \implies x^2 < 4$ ?
6. (Récurrence) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .
7. (Récurrence) Fixons un réel  $x \geq 0$ . Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

CHAPITRE

# 2

## Généralités sur les fonctions numériques

### Sommaire du chapitre

|          |                                                |    |
|----------|------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | Parité et périodicité d'une fonction . . . . . | 14 |
| 1.1      | Fonctions paires . . . . .                     | 14 |
| 1.2      | Fonctions impaires . . . . .                   | 15 |
| 1.3      | Fonctions périodiques . . . . .                | 15 |
| <b>2</b> | Fonctions trigonométriques . . . . .           | 16 |
| 2.1      | Rappels et définitions . . . . .               | 16 |
| 2.2      | Propriétés . . . . .                           | 17 |
| <b>3</b> | Les opérations sur les fonctions . . . . .     | 17 |
| 3.1      | Comparaison de fonctions . . . . .             | 17 |
| 3.2      | Variations d'une fonction . . . . .            | 19 |
| 3.3      | Résolution graphique . . . . .                 | 19 |
| 3.4      | Composée de deux fonctions . . . . .           | 21 |
| 3.5      | Variations d'une fonction composée . . . . .   | 23 |

## 1. Parité et périodicité d'une fonction

### 1.1. Fonctions paires

#### Définition 2.1 — Ensemble symétrique par rapport à zéro

Soit  $D$  un intervalle ou une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $D$  est *symétrique par rapport à zéro* ou que  $D$  est *centré en zéro*, si et seulement si :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} : [x \in D \text{ ssi } -x \in D]$$

#### Exemple 2.1

$\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $[-\pi; +\pi]$ ,  $\mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$  sont symétriques par rapport à zéro.  
 $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $[1; +\infty[$  ne sont pas symétriques par rapport à zéro.

----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....

#### Définition 2.2 — Fonction paire

Soit  $D$  un intervalle ou une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $D$ .

On dit que  $f$  est *paire* lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

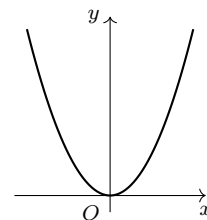
- 1°) le domaine de définition  $D$  est symétrique par rapport à zéro ;
- 2°) et pour tout  $x \in D : [f(-x) = f(x)]$

#### Théorème 2.1

Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

#### Exemple 2.2 — modèle

La fonction carrée  $x \mapsto x^2$  définie sur  $\mathbb{R}$  est une fonction paire.



----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....  
 .....

## 1.2. Fonctions impaires

### Définition 2.3 — Fonction impaire

Soit  $D$  un intervalle ou une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $D$ .

On dit que  $f$  est *impaire* lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) le domaine de définition  $D$  est symétrique par rapport à zéro ;

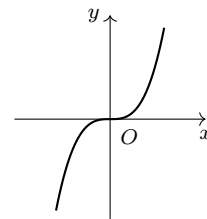
2°) et pour tout  $x \in D : [f(-x) = -f(x)]$

### Théorème 2.2

Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine  $O$  du repère.

### Exemple 2.3 — modèle

La fonction cube  $x \mapsto x^3$  définie sur  $\mathbb{R}$  est une fonction impaire.



----- CORRECTION -----

REMARQUE 2.1. Si une fonction est paire ou impaire, on réduit le domaine d'étude à la partie positive de  $D_f$ . La courbe de  $f$  peut alors se construire par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine  $O$  du repère.

## 1.3. Fonctions périodiques

### Définition 2.4 — Fonction périodique

Soit  $D$  un intervalle ou une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $D$  et  $T \in \mathbb{R}$  un nombre réel donné. On dit que  $f$  est *périodique de période  $T$*  lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) Pour tout  $x \in \mathbb{R} : [x \in D \text{ ssi } x + T \in D]$

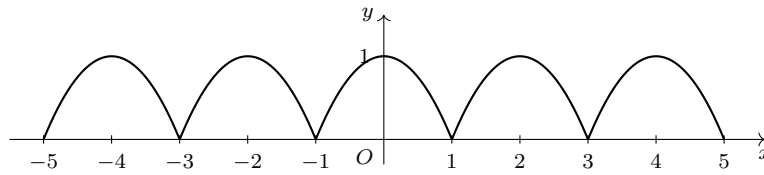
2°) et pour tout  $x \in D : [f(x + T) = f(x)]$

REMARQUE 2.2. Pour construire la courbe d'une fonction périodique  $f$  de période  $T \in \mathbb{R}$ , on construit (une portion de) la courbe sur un intervalle de longueur  $T$ , puis on duplique indéfiniment cette portion à droite et à gauche.

**Exemple 2.4**

Pour construire sur  $\mathbb{R}$  la fonction périodique de période  $T = 2$  et définie pour  $x \in [-1; +1]$  par :  $f(x) = 1 - x^2$ , il suffit de construire la courbe de  $f$  sur un intervalle de longueur une période, ici  $[-1; +1]$ , puis dupliquer indéfiniment.

On dit qu'on a réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur  $T$  de  $D_f$ .



----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

## 2. Fonctions trigonométriques

### 2.1. Rappels et définitions

Dans un repère orthonormé  $(O; I, J)$  du plan, soit  $M$  un point quelconque du cercle trigonométrique  $\mathcal{C}(O; 1)$  tel que la mesure en radians de l'angle orienté  $(\vec{OI}, \vec{OM})$  soit égale à  $x$  radians. On dit que  $M$  est le point associé à  $x$  sur le cercle  $\mathcal{C}(O; 1)$ .

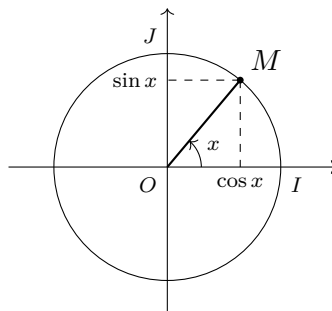
#### Définition 2.5 — Cosinus et sinus

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan, soit  $x$  un nombre réel et  $M$  le point associé à  $x$  sur  $\mathcal{C}(O; 1)$ . Alors

- le cosinus de  $x$ , noté  $\cos x$ , désigne l'abscisse du point  $M$  ;
- le sinus de  $x$ , noté  $\sin x$ , désigne l'ordonnée du point  $M$ .

On définit ainsi deux fonctions,  $\cos$  et  $\sin$  sur  $\mathbb{R}$  comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \cos : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \sin : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$



## 2.2. Propriétés

### Propriété 2.1

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur tout  $\mathbb{R}$ . De plus :

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\cos(-x) = \cos x$ . Donc la fonction cosinus est paire.
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\sin(-x) = -\sin x$ . Donc la fonction sinus est impaire.

Par conséquent, dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan,

- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc, on peut réduire son intervalle d'étude à  $[0; +\infty[$ .
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine  $O$  du repère. Donc, on peut aussi réduire son intervalle d'étude à  $[0; +\infty[$ .

Soit  $M$  un point quelconque du cercle trigonométrique tel que la mesure de l'angle orienté  $(\vec{OI}, \vec{OM})$  soit égale à  $x$  radians. On peut lui associer une famille de nombres réels de la forme  $x + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , qui correspondent au même point  $M$  du cercle trigonométrique.

### Propriété 2.2

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période  $T = 2\pi$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ .

En effet ; les nombres  $x$  et  $x + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , correspondent au même point  $M$  du cercle trigonométrique. Donc  $x$  et  $x + 2k\pi$  ont exactement le même cosinus en abscisse et le même sinus en ordonnée.

Par conséquent, dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan, on peut réduire l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à un intervalle de longueur  $T = 2\pi$ . Par exemple,  $D = [-\pi; \pi]$ .

## 3. Les opérations sur les fonctions

### 3.1. Comparaison de fonctions

#### Définition 2.6 — Égalité de deux fonctions

On dit que deux fonctions  $f$  et  $g$  sont égales si et seulement si :

- Elles ont même ensemble de définition :  $D_f = D_g$
- Pour tout  $x \in D_f$ ,  $f(x) = g(x)$

#### Exemple 2.5

Les fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Sont-elles égales ?

**Définition 2.7 — Ordre, majorant, minorant**

Soit  $I$  un intervalle et soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au moins sur  $I$ . On dit que :

- $f$  est *inférieure* à  $g$  sur  $I$  lorsque :  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in I$ . On note :  $f \leq g$  sur  $I$ .
- $f$  est *positive* sur  $I$  lorsque :  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ . On note :  $f \geq 0$  sur  $I$ .
- $f$  est *majorée* sur  $I$  lorsqu'il existe un réel  $M$  tel que :  $f(x) \leq M$  pour tout  $x \in I$ .
- $f$  est *minorée* sur  $I$  lorsqu'il existe un réel  $m$  tel que :  $m \leq f(x)$  pour tout  $x \in I$ .
- $f$  est *bornée* sur  $I$  lorsqu'il existe des réels  $M$  et  $m$  tels que :  $m \leq f(x) \leq M$  pour tout  $x \in I$ . ( $f$  est majorée et minorée)

**REMARQUE 2.3.** La relation d'ordre pour les fonctions n'est pas totale car deux fonctions ne sont pas toujours comparables.

**Exemple 2.6**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x$  et  $g(x) = x^2$ .  
On a par exemple :

$$\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \iff f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right) \qquad 2 < 2^2 \iff f(2) < g(2)$$

CORRECTION

**Propriété 2.3**

Si  $f$  est une fonction monotone sur un intervalle  $I = [a; b]$  alors  $f$  est bornée.

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $f$  est croissante sur  $[a; b]$  (le cas  $f$  décroissante se traite de façon analogue).

Soit  $x \in [a; b]$ , on a alors :  $a \leq x \leq b$ , comme  $f$  est croissante, elle conserve la relation d'ordre, d'où :  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ . On peut prendre  $m = f(a)$  et  $M = f(b)$ ,  $f$  est donc bornée.  $\square$

**Exemple 2.7**

Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 4 \sin x - 3$  est bornée.

----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**Exemple 2.8**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x(1 - x)$ . Démontrer que  $f$  est majorée sur  $\mathbb{R}$ .

----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**3.2. Variations d'une fonction****Définition 2.8 — Sens de variation**

Soit  $I$  un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non).

Soit  $f$  une fonction définie au moins sur  $I$ . On dit que :

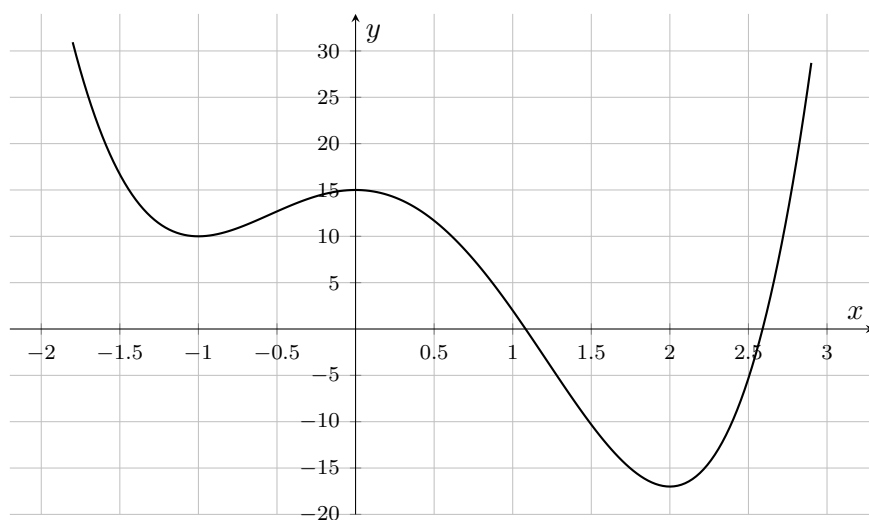
- $f$  est *croissante* sur  $I$  si, et seulement si : pour tous  $u$  et  $v$  de  $I$  :  $v > u \Rightarrow f(v) > f(u)$
- $f$  est *décroissante* sur  $I$  si, et seulement si : pour tous  $u$  et  $v$  de  $I$  :  $v > u \Rightarrow f(v) < f(u)$
- $f$  est *monotone* sur  $I$  si, et seulement si :  $f$  est croissante sur  $I$  ou décroissante sur  $I$ .

**REMARQUE 2.4.** On dit qu'une fonction croissante conserve la relation d'ordre et qu'une fonction décroissante inverse la relation d'ordre.

Nous verrons au chapitre suivant que la fonction dérivée est l'instrument qui permet de déterminer les variations d'une fonction.

**3.3. Résolution graphique****Exemple 2.9 — Résolution graphique**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-1,8; 2,9]$  par :  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 15$  dont la représentation est la suivante :



- 1) Déterminer le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 2) Résoudre les équations suivantes : a)  $f(x) = 0$       b)  $f(x) = 13$
- 3) D'une façon générale donner le nombre et le signe des solutions de l'équation  $f(x) = m$  où  $m$  est un réel quelconque.
- 4) Résoudre les inéquations suivantes : a)  $f(x) \leq 0$       b)  $f(x) > 13$
- 5) Résoudre l'équation  $f(x) = 3x$ .

.....

.....

.....

.....

### 3.4. Composée de deux fonctions

#### Définition 2.9 — Composition

Lorsqu'on applique deux fonctions successivement, on parle de *composition de fonctions* ou de *composée de deux fonctions*. On peut alors faire le schéma suivant :

$$x \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{g} z = g(y) = g[f(x)] = g \circ f(x)$$

Soit  $D_f$  et  $D_g$  les ensembles de définition des fonctions  $f$  et  $g$ .

$f(D_f)$  : représente l'image de l'ensemble de définition de  $f$  par la fonction  $f$ .

Pour pouvoir appliquer ensuite la fonction  $g$ , il est nécessaire que cet ensemble soit inclus dans

$D_g$  :  $f(D_f) \subset D_g$

$$\forall x \in D_f \text{ on doit avoir } f(x) \in D_g$$

#### Exemple 2.10

Soit les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = 3x + 4, \text{ on a donc : } D_f = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}, \text{ on a donc : } D_g = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

#### Définition 2.10 — Fonction composée

Soit 2 fonctions  $f$  et  $g$  avec  $f(D_f) \subset D_g$ .

On appelle fonction composée de  $f$  par  $g$ , la fonction notée :  $g \circ f$  telle que :

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

**REMARQUE 2.5.** La composée de deux fonctions n'est pas commutative c.-à-d.  $g \circ f$  est différent de  $f \circ g$ .

**Exemple 2.11**

Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies par

$$f(x) = x - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = 4x + 3$$

Les deux fonctions étant définies sur  $\mathbb{R}$ , les fonctions  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

----- CORRECTION -----

**Application 2.1**

- 1) Soit les deux fonctions suivantes  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = 3x$$

Calculer  $g \circ f(x)$  et  $f \circ g(x)$  après avoir précisé les ensembles de définition.

Il est nécessaire de déterminer l'ensemble de définition avant de calculer la composée de deux fonctions comme nous allons le voir sur cet exemple.

- 2)  $f$  et  $g$  sont les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{x+2}$$

On pose  $h = g \circ f$ .

- a) Trouver l'ensemble de définition de  $h$  et calculer explicitement  $h(x)$ .

- b) La fonction  $k$  est définie par  $k(x) = \frac{x+3}{3x+5}$ .  
Les fonctions  $h$  et  $k$  sont-elles égales ?

Il peut être intéressant de décomposer une fonction en fonctions élémentaires pour connaître ses variations.

- 3) Exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires.

$$f_1(x) = \frac{1}{3x-1} \quad f_2(x) = \sqrt{x+3} \quad f_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$$

### 3.5. Variations d'une fonction composée

### Théorème 2.3

Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  et une fonction  $g$  définie sur  $f(I)$ .

- Si  $f$  et  $g$  ont même variation respectivement sur  $I$  et  $f(I)$  alors la fonction  $g \circ f$  est croissante sur  $I$ .
- Si  $f$  et  $g$  ont des variations opposées respectivement sur  $I$  et  $f(I)$  alors la fonction  $g \circ f$  est décroissante sur  $I$ .

DÉMONSTRATION. Nous ferons la démonstration pour une fonction  $f$  croissante sur  $I$  et une fonction  $g$  décroissante sur  $f(I)$ .

On sait que  $f$  est croissante sur  $I$ , donc dans  $I$  : si  $u < v$  alors  $f(u) < f(v)$

On sait que  $g$  est décroissante sur  $f(I)$ , donc dans  $f(I)$  : si  $f(u) < f(v)$  alors  $g[f(u)] > g[f(v)]$

On a donc dans  $I$  : si  $u < v$  alors  $g \circ f(u) > g \circ f(v)$

La fonction  $g \circ f$  est décroissante sur  $I$ .

9

**Exemple 2.12**

Soit la fonction  $h$  définie sur  $] -\infty ; 1]$  par  $h(x) = \sqrt{1-x}$ .

- 1) Décomposer  $h$  en deux fonctions élémentaires.
- 2) Déterminer les variations de  $h$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CHAPITRE

# 3

---

## Barycentre dans le plan

---

### Sommaire du chapitre

|          |                                                       |    |
|----------|-------------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | Barycentre de deux points . . . . .                   | 26 |
| 1.1      | Définition . . . . .                                  | 26 |
| 1.2      | Propriétés . . . . .                                  | 26 |
| 1.3      | Coordonnées du barycentre . . . . .                   | 28 |
| <b>2</b> | Barycentre de trois points . . . . .                  | 29 |
| 2.1      | Définition . . . . .                                  | 29 |
| 2.2      | Associativité du barycentre . . . . .                 | 29 |
| 2.3      | Propriétés . . . . .                                  | 30 |
| 2.4      | Coordonnées du barycentre . . . . .                   | 31 |
| <b>3</b> | Barycentre d'un nombre quelconque de points . . . . . | 31 |

On se place dans le plan ou dans l'espace.

## 1. Barycentre de deux points

### 1.1. Définition

#### Théorème 3.1 — Théorème et définition

Soient  $A$  et  $B$  deux points quelconques,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels.

Il existe un unique point  $G$  du plan tel que  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$  si et seulement si  $\alpha + \beta \neq 0$ .

Ce point est appelé *barycentre* du système de points pondérés  $(A, \alpha); (B, \beta)$ . On note  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ .

DÉMONSTRATION. Quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\iff (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} \iff (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

1/ Si  $\alpha + \beta \neq 0$  alors l'équation équivaut à  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$ .

Le point  $G$  existe et est unique.

2/ Si  $\alpha + \beta = 0$  alors l'équation équivaut à  $\beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ .

Cette équation n'admet pas de solution si  $A \neq B$  et  $\beta \neq 0$  et en admet une infinité si  $A = B$  ou  $\beta = 0$ .

□

#### Exemple 3.1

Deux points  $A$  et  $B$  étant donnés, placer  $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 1.2. Propriétés

Dans tout le paragraphe,  $A$  et  $B$  sont deux points quelconques,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ .

#### Propriété 3.1 — Homogénéité

Soit  $k$  un réel. Si  $k \neq 0$  alors  $G = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$ .

DÉMONSTRATION. Si  $k \neq 0$  alors :

$$\begin{aligned} G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} &\iff \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff k(\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB}) = k \overrightarrow{0} \\ &\iff k\alpha \overrightarrow{GA} + k\beta \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff G = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\} \end{aligned}$$

□

### Exemple 3.2

Démontrer que l'on peut exprimer  $G$  comme barycentre de  $A$  et  $B$  de telle façon que la somme des coefficients soit égale à 1.

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Propriété 3.2 — Position du barycentre

Si  $A$  et  $B$  sont distincts alors  $G \in (AB)$ . Autrement dit,  $A$ ,  $B$  et  $G$  sont alignés.  
Si, de plus,  $\alpha$  et  $\beta$  sont de même signe alors  $G \in [AB]$ .

DÉMONSTRATION.  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \iff \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$   
Les vecteurs  $\overrightarrow{GA}$  et  $\overrightarrow{GB}$  sont donc colinéaires et  $G$ ,  $A$  et  $B$  sont alignés.

De plus, on a obtenu au cours de la première démonstration le résultat suivant :  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$

or si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de même signe alors  $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$  est positif et inférieur à 1.

Ainsi  $G \in [AB]$ .

□

### Propriété 3.3

Réciproquement, si  $A \neq B$ , tout point de la droite  $(AB)$  est le barycentre de  $A$  et  $B$  affectés de coefficients bien choisis.

DÉMONSTRATION. Si  $M \in (AB)$  alors  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires donc il existe un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} &\iff \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AM} - k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \iff (k-1)\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

De plus,  $k-1-k = -1 \neq 0$  donc  $M = \text{Bar}\{(A, k-1); (B, -k)\}$ .

□

### Propriété 3.4 — Isobarycentre

Si  $\alpha = \beta$ , alors  $G$  est appelé *isobarycentre* de  $A$  et  $B$ .  $G$  est alors le milieu du segment  $[AB]$ .

DÉMONSTRATION IMMÉDIATE. □**Propriété 3.5 — Réduction vectorielle**

Quel que soit le point  $M$ ,  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$ .

DÉMONSTRATION. Quel que soit le point  $M$ ,

$$\begin{aligned} \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{MG} + \beta \overrightarrow{GB} \\ &= (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB}}_{=\vec{0}} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

□

**Exemple 3.3**

Soit  $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 5)\}$ . Exprimer  $\overrightarrow{AG}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

**1.3. Coordonnées du barycentre****Propriété 3.6 — Coordonnées du barycentre**

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan. Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ .

Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  alors  $G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}\right)$

Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

DÉMONSTRATION. Quel que soit le point  $M$ , on a  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$ .Cette égalité est donc valable en particulier pour  $M = O$ .

On a donc  $\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{OG}$  soit  $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OB}$

Les coordonnées de  $\overrightarrow{OA}$  sont  $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et les coordonnées de  $\overrightarrow{OB}$  sont  $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ .

On en déduit que les coordonnées de  $\overrightarrow{OG}$  sont  $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x_A + \frac{\beta}{\alpha + \beta} x_B \\ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_A + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{pmatrix}$ . □

**Exemple 3.4**

Dans un repère du plan, on a  $A(3; -2)$  et  $B(-1; 4)$ . Déterminer les coordonnées de  $G$  barycentre de  $(A, 2); (B, 3)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

## 2. Barycentre de trois points

Les définitions et propriétés du paragraphe précédent s'étendent au cas de trois points pondérés.

### 2.1. Définition

#### Théorème 3.2 — Théorème et définition

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points quelconques,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels.

Il existe un unique point  $G$  du plan tel que  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$  si et seulement si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ .

Ce point est appelé *barycentre* du système de points pondérés  $(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$ . On note  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

DÉMONSTRATION. Quels que soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \\ &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{GA} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\iff (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC} \\ &\iff (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

1/ Si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  alors l'équation équivaut à  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$

Le point  $G$  existe et est unique.

2/ Si  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  alors l'équation équivaut à  $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

Cette équation n'admet pas de solution si  $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  et en admet une infinité si  $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

□

### 2.2. Associativité du barycentre

#### Propriété 3.7 — Associativité

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels tels que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et  $\alpha + \beta \neq 0$ .

$$\text{Si } \begin{cases} G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \\ H = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \end{cases} \quad \text{alors } G = \text{Bar}\{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$$

DÉMONSTRATION. Supposons que  $\begin{cases} G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \\ H = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \end{cases}$

On a alors :

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} &= \alpha\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{GB} + \beta\overrightarrow{BH} + \gamma\overrightarrow{GC} \\ &= \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{BH}}_{=\vec{0}} = \vec{0}\end{aligned}$$

Conclusion :  $G = \text{Bar}\{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$

□

**Exemple 3.5**

Trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  étant donnés, placer  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**2.3. Propriétés**

Dans tout le paragraphe,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points quelconques,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels tels que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

**Propriété 3.8 — Homogénéité**

Soit  $k$  un réel. Si  $k \neq 0$  alors  $G = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$ .

DÉMONSTRATION. Si  $k \neq 0$  alors :

$$\begin{aligned} G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} &\iff \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff k(\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC}) = k \vec{0} \\ &\iff k\alpha \overrightarrow{GA} + k\beta \overrightarrow{GB} + k\gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff G = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\} \end{aligned}$$

□

**Propriété 3.9 — Position du barycentre**

Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés alors  $G \in (ABC)$ . Autrement dit,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $G$  sont coplanaires.

DÉMONSTRATION.  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \iff \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Les vecteurs  $\overrightarrow{GA}$ ,  $\overrightarrow{GB}$  et  $\overrightarrow{GC}$  sont donc coplanaires. Ainsi les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $G$  sont coplanaires. □

**Propriété 3.10**

Réciproquement, si  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés, alors tout point du plan  $(ABC)$  est le barycentre de  $A$ ,  $B$  et  $C$  affectés de coefficients bien choisis.

DÉMONSTRATION. Si  $M \in (ABC)$  alors il existe des réels  $k$  et  $k'$  tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{AM} + k'\overrightarrow{MC}$$

On a alors  $(1 - k - k')\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{MC} = \vec{0}$  donc  $M = \text{Bar}\{(A, 1 - k - k'); (B, k); (C, k')\}$ . □

**Propriété 3.11 — Isobarycentre**

Si  $\alpha = \beta = \gamma$ , alors  $G$  est appelé *isobarycentre* de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .  $G$  est alors le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

DÉMONSTRATION. Soient  $I$  le milieu de  $[BC]$  et  $J$  le milieu de  $[AC]$ .

On a alors  $I = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 1)\}$  et  $J = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 1)\}$ .

D'après la propriété d'associativité, on a, d'une part,  $G = \text{Bar}\{(I, 2); (A, 1)\}$  donc  $G \in (AI)$  et, d'autre part,  $G = \text{Bar}\{(J, 2); (B, 1)\}$  donc  $G \in (BJ)$ .

$G$  appartient donc à deux médianes de  $ABC$ .

$G$  est le centre de gravité de  $ABC$ . □

**Propriété 3.12 — Réduction vectorielle**

Quel que soit le point  $M$ ,  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$ .

DÉMONSTRATION. Quel que soit le point  $M$ ,

$$\begin{aligned} \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \gamma(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{MG} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{MG} + \gamma \overrightarrow{GC} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC}}_{=\vec{0}} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

□

**2.4. Coordonnées du barycentre****Propriété 3.13 — Coordonnées du barycentre**

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan. Soit  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  et  $C(x_C; y_C)$ .

Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  alors  $G \left( \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)$

Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

La démonstration est identique au cas de deux points.

**Exemple 3.6**

Dans un repère du plan, on a  $A(2; -1)$ ,  $B(0; 3)$  et  $C(-2; 0)$ . Déterminer les coordonnées de  $G$  barycentre de  $(A, 1); (B, 3); (C, -2)$ .

----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**3. Barycentre d'un nombre quelconque de points**

Toutes les définitions et propriétés précédentes se généralisent à  $n$  points pondérés.

**Propriété 3.14 — Barycentre de  $n$  points pondérés**

- Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  points et  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  réels.  
Il existe un unique point  $G$  tel que  $a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$  si et seulement si  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$ .  
Ce point est appelé barycentre des  $n$  points pondérés  $(A_1, a_1); (A_2, a_2); \dots; (A_n, a_n)$ .
- Règle d'associativité :  
Pour trouver le barycentre  $G$  de  $n$  points, lorsque  $n \geq 3$ , on peut remplacer  $p$  points, pris parmi les  $n$  points, par leur barycentre (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.
- Soit  $k \neq 0$ .

$$G = \text{Bar}\{(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)\} \iff G = \text{Bar}\{(A_1, ka_1), \dots, (A_n, ka_n)\}.$$

Autrement dit, on ne change pas le barycentre en changeant les coefficients par des coefficients proportionnels.

- Si  $a_1 = a_2 = \dots = a_n \neq 0$  alors  $G$  est appelé isobarycentre des  $n$  points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- Pour tout point  $M$ ,

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG}$$

- Dans un repère, le barycentre de  $n$  points pondérés a pour coordonnées la moyenne des coordonnées des  $n$  points pondérés par les  $n$  coefficients.

Dans le cas d'un repère du plan, on obtient :

$$\begin{cases} x_G = \frac{a_1 x_{A_1} + a_2 x_{A_2} + \dots + a_n x_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \\ y_G = \frac{a_1 y_{A_1} + a_2 y_{A_2} + \dots + a_n y_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \end{cases}$$

CHAPITRE

# 4

## Analytique du produit scalaire

### Sommaire du chapitre

|          |                                                  |    |
|----------|--------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | Définition . . . . .                             | 34 |
| <b>2</b> | Autres expressions du produit scalaire . . . . . | 34 |
| 2.1      | Cas des vecteurs colinéaires . . . . .           | 34 |
| 2.2      | Avec des projetés orthogonaux . . . . .          | 35 |
| 2.3      | Dans un repère . . . . .                         | 36 |
| <b>3</b> | Règles de calcul . . . . .                       | 37 |
| <b>4</b> | Vecteurs orthogonaux . . . . .                   | 38 |
| 4.1      | Définition . . . . .                             | 38 |
| 4.2      | Propriété . . . . .                              | 38 |

Dans tout le chapitre,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  désignent deux vecteurs du plan.  
Une unité de longueur est fixée.

## 1. Définition

### Définition 4.1 — Produit scalaire

On appelle *produit scalaire* de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le nombre réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et défini par :

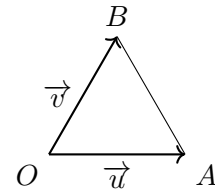
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Le produit scalaire d'un vecteur  $\vec{u}$  par lui-même ( $\vec{u} \cdot \vec{u}$ ) est appelé *carré scalaire* de  $\vec{u}$  et se note  $\vec{u}^2$ .

**REMARQUE 4.1.** Le produit scalaire est donc une opération dont les arguments sont des vecteurs et dont le résultat est réel.

### Exemple 4.1

Sur la figure ci-contre, le triangle  $OAB$  est équilatéral et  $OA = 2$ .  
Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .



----- CORRECTION -----

.....  
.....  
.....  
.....

## 2. Autres expressions du produit scalaire

### 2.1. Cas des vecteurs colinéaires

#### Propriété 4.1

- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraires alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

DÉMONSTRATION.

- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens alors  $(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ .  
Ainsi,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos 0 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraires, alors  $(\vec{u}; \vec{v}) = \pi$ .  
Ainsi,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \pi = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

□

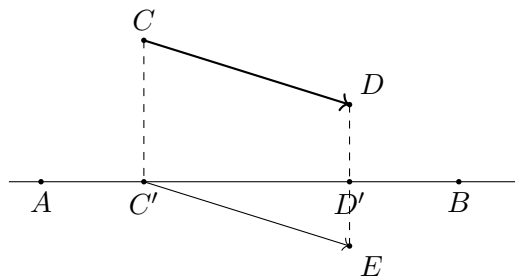
**Conséquence 4.2**

- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$  et si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraires alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$
- Quel que soit le vecteur  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

**2.2. Avec des projetés orthogonaux****Propriété 4.3 — Projeté orthogonal**

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan.

Si  $C'$  et  $D'$  sont les projetés orthogonaux de  $C$  et  $D$  sur  $(AB)$  alors  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$



DÉMONSTRATION. Soit  $E$  le point tel que  $\vec{C'E} = \vec{CD}$ .

On a alors  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'E} = AB \times C'E \times \cos(\vec{AB}; \vec{C'E})$ .

- Si l'angle  $(\vec{AB}; \vec{C'E})$  est droit alors  $\cos(\vec{AB}; \vec{C'E}) = \cos(\vec{AB}; \vec{CD}) = 0$  donc  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'} = 0$ .
- Si l'angle  $(\vec{AB}; \vec{C'E})$  est aigu alors  $\vec{AB}$  et  $\vec{C'D'}$  sont colinéaires et de même sens et  $\cos(\vec{AB}; \vec{C'E}) = \frac{C'D'}{C'E}$

$$\text{Ainsi } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = AB \times C'E \times \frac{C'D'}{C'E} = AB \times C'D' = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}.$$

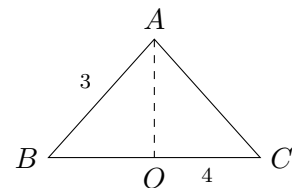
- Si l'angle  $(\vec{AB}; \vec{C'E})$  est obtus alors  $\vec{AB}$  et  $\vec{C'D'}$  sont colinéaires et de sens contraires et  $\cos(\vec{AB}; \vec{C'E}) = -\frac{C'D'}{C'E}$

$$\text{Ainsi } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = -AB \times C'E \times \frac{C'D'}{C'E} = -AB \times C'D' = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}.$$

□

**Exemple 4.2**

$ABC$  est un triangle isocèle en  $A$  tel que  $AB = 3$  et  $BC = 4$ .  
 $O$  est le milieu du segment  $[BC]$ . Calculer  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$  et  $\vec{CA} \cdot \vec{BC}$ .



.....

.....

.....

.....

.....

### 2.3. Dans un repère

#### Propriété 4.4 — Expression analytique

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal du plan.

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $A$  le point tel que  $\vec{OA} = \vec{u}$  et  $B$  le point tel que  $\vec{OB} = \vec{v}$ .

1/ Cas des vecteurs colinéaires.

Il existe  $k$  tel que  $\vec{OB} = k\vec{OA}$ . Ainsi  $\vec{OB} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ .

- Si  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  sont colinéaires et de même sens alors  $k > 0$  et  $OB = kOA$ .  
On a alors  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB = k \times OA \times OA = kOA^2$ .
- Si  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  sont colinéaires et de sens contraires alors  $k < 0$  et  $OB = -kOA$ .  
On a alors  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -OA \times OB = k \times OA \times OA = kOA^2$ .

Ainsi  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = k(x^2 + y^2) = kxx + kyy = xx' + yy'$

2/ Cas des vecteurs quelconques.

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(OA)$ .

On a alors, d'après ce qui précède,  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH} = xx_H + yy_H$

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles  $OBH$  et  $ABH$  rectangles en  $H$ , on obtient :

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = AB^2 - AH^2$$

qui nous donne :

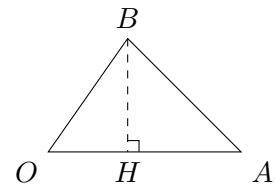
$$x'^2 + y'^2 - x_H^2 - y_H^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 - (x - x_H)^2 - (y - y_H)^2$$

puis, en simplifiant :

$$0 = -2xx' - 2yy' + 2xx_H + 2yy_H$$

soit :  $xx_H + yy_H = xx' + yy'$

On en déduit donc :  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = xx' + yy'$ . □



ce

#### Exemple 4.3

Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ,  $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ .

---



---



---



---



---

### 3. Règles de calcul

#### Propriété 4.5 — Règles de calcul

Quels que soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

- $\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (On dit que le produit scalaire est symétrique)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$  et  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

DÉMONSTRATION.

- Le premier résultat est une conséquence directe de la définition.
- Le deuxième résultat est aussi une conséquence de la définition ( $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos(\vec{v}; \vec{u})$ ).
- On se place dans un repère orthonormal du plan et on pose  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ .

Les coordonnées de  $\vec{v} + \vec{w}$  sont  $\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$ .

On a ainsi,  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy''$ .

De plus  $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = xx' + yy' + xx'' + yy''$ .

Conclusion :  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Les coordonnées de  $k\vec{v}$  sont  $\begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$ .

On a ainsi  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = x(kx') + y(ky') = kxx' + kyy'$ .

De plus  $k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = k(xx' + yy') = kxx' + kyy'$

Conclusion  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

- Le quatrième résultat se démontre en utilisant les deux précédents.

□

#### Exemple 4.4

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs, simplifier  $(\vec{u} + \vec{v})^2$ ,  $(\vec{u} - \vec{v})^2$  et  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ .

---



---



---



---



---

.....

.....

.....

.....

## 4. Vecteurs orthogonaux

### 4.1. Définition

#### Définition 4.2 — Vecteurs orthogonaux

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont *orthogonaux* si :

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } (OA) \perp (OB)$$

### 4.2. Propriété

#### Propriété 4.6

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\iff \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \\ &\iff \|\vec{u}\| = 0 \text{ ou } \|\vec{v}\| = 0 \text{ ou } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \\ &\iff \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \\ &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \end{aligned}$$

□

#### Exemple 4.5

Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on donne  $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ .

Démontrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

CHAPITRE

# 5

## Applications du produit scalaire

### Sommaire du chapitre

|          |                                                         |    |
|----------|---------------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | Équations de droites . . . . .                          | 40 |
| 1.1      | Définition . . . . .                                    | 40 |
| 1.2      | Propriétés . . . . .                                    | 40 |
| <b>2</b> | Norme d'un vecteur . . . . .                            | 41 |
| <b>3</b> | Distance d'un point à une droite . . . . .              | 41 |
| <b>4</b> | Équations de cercles . . . . .                          | 42 |
| 4.1      | Forme générale . . . . .                                | 42 |
| 4.2      | Cercle de diamètre donné . . . . .                      | 42 |
| 4.3      | Représentation paramétrique d'un cercle . . . . .       | 43 |
| <b>5</b> | Position relative d'une droite et d'un cercle . . . . . | 43 |
| <b>6</b> | Longueurs et angles dans un triangle . . . . .          | 44 |
| 6.1      | Théorème de la médiane . . . . .                        | 44 |
| 6.2      | Formules d'Al Kashi . . . . .                           | 44 |
| 6.3      | Aire d'un triangle . . . . .                            | 45 |
| 6.4      | Formule des sinus . . . . .                             | 45 |

## 1. Équations de droites

### 1.1. Définition

#### Définition 5.1 — Vecteur normal

Un vecteur non nul  $\vec{n}$  est dit *normal* à une droite  $d$  si la direction de  $\vec{n}$  est orthogonale à celle de  $d$ .

### 1.2. Propriétés

#### Propriété 5.1

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ Une droite de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  a une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $c \in \mathbb{R}$ .

2/ Étant donnés trois réels  $a, b$  et  $c$  où  $a$  et  $b$  ne sont pas nuls simultanément, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient  $ax + by + c = 0$  est une droite de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

DÉMONSTRATION. 1/ Soit  $d$  une droite de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et soit  $A(x_0; y_0) \in d$ .

Soit  $M(x; y)$ , on a  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

$M(x; y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 \iff ax + by + c = 0$  avec  $c = -ax_0 - by_0$ .

2/ Soit  $d$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $ax + by + c = 0$  et soit  $A(x_A; y_A) \in d$ .

$$M(x; y) \in d \iff ax + by + c = 0 = ax_A + by_A + c$$

$$\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

$$\iff M \text{ appartient à la droite passant par } A \text{ et de vecteur normal } \vec{n}.$$

□

#### Exemple 5.1

Dans un repère orthonormal, on considère les points  $A(3; -1)$  et  $B(2; 4)$ . Déterminer une équation de la médiatrice  $m$  de  $[AB]$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 2. Norme d'un vecteur

Le réel  $\vec{u} \cdot \vec{u}$ , noté  $\vec{u}^2$  est appelé carré scalaire de  $\vec{u}$ .

Si  $\vec{u} = \vec{OA}$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{u} = OA \times OA = OA^2$  est un nombre positif.

### Définition 5.2 — Norme d'un vecteur

La *norme* d'un vecteur  $\vec{u}$  est le réel positif  $\sqrt{\vec{u}^2}$  notée  $\|\vec{u}\|$ .

### Propriété 5.2 — Propriétés de la norme

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs,  $\alpha$  un réel.

- i)  $\|\vec{u}\| = 0$  si et seulement si  $\vec{u} = \vec{0}$ .
- ii)  $\|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$
- iii)  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

## 3. Distance d'un point à une droite

Soit  $(D)$  une droite du plan. Soit  $A$  un point du plan,  $H$  son projeté orthogonal sur  $(D)$ .

Si  $M$  est un point quelconque de  $(D)$ ,  $AM^2 = AH^2 + HM^2$ ; donc  $AM^2 \geq AH^2$  c'est-à-dire  $AM \geq AH$ .

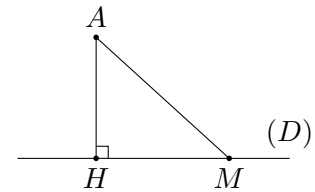
Ainsi la distance  $AH$  est le minimum des distances de  $A$  aux points de  $(D)$ .

D'où la définition suivante.

### Définition 5.3 — Distance d'un point à une droite

Soit  $(D)$  une droite du plan. Soit  $A$  un point du plan,  $H$  son projeté orthogonal sur  $(D)$ .

Le nombre réel  $AH$  est appelé la *distance du point  $A$  à la droite  $(D)$* ; on le notera  $d(A, (D))$ .



### Théorème 5.1

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine  $O$ . Soient  $(D)$  une droite d'équation  $ax+by+c=0$  et  $A$  un point de coordonnées  $(x_A, y_A)$ .

$$\text{Alors } d(A, (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

DÉMONSTRATION. Le vecteur  $\vec{n}(a, b)$  est normal à  $(D)$ .

Puisque  $H$  appartient à  $(D)$ , on a :  $ax_H + by_H + c = 0$ .

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{n} &= (\vec{AO} + \vec{OH}) \cdot \vec{n} = \vec{AO} \cdot \vec{n} + \vec{OH} \cdot \vec{n} \\ &= -ax_A - by_A + ax_H + by_H = -ax_A - by_A - c. \end{aligned}$$

$$|\vec{AH} \cdot \vec{n}| = |-ax_A - by_A - c|.$$

$$\|\vec{AH}\| \cdot \|\vec{n}\| |\cos(\vec{AH}, \vec{n})| = |ax_A + by_A + c|.$$

$$\|\vec{AH}\| \cdot \|\vec{n}\| = |ax_A + by_A + c|.$$

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\|\vec{n}\|}. \quad AH = d(A, (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \square$$

REMARQUE 5.1. Lorsque le vecteur  $\vec{n}(a, b)$  est unitaire, alors  $AH = d(A, (D)) = |ax_A + by_A + c|$ .

REMARQUE 5.2. Soit  $(D)$  une droite du plan de vecteur normal unitaire  $\vec{n}$ , et  $A$  un point du plan.

Le réel  $p_D(A) = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$  est indépendant du choix de  $M$  sur la droite  $(D)$ .

En effet si  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(D)$ , on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}.$$

On en déduit en outre, que  $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = AH$  est la distance de  $A$  à  $(D)$ .

## 4. Équations de cercles

### 4.1. Forme générale

#### Propriété 5.3 — Équation d'un cercle

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal.

Une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A(x_A; y_A)$  et de rayon  $R$  est

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

DÉMONSTRATION.  $M(x; y) \in \mathcal{C} \iff AM = R \iff AM^2 = R^2 \iff (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ .  $\square$

#### Exemple 5.2

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal.

Quelle est la nature de l'ensemble  $E$  des points  $M(x; y)$  tels que  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$  ?

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 4.2. Cercle de diamètre donné

#### Propriété 5.4 — Cercle de diamètre $[AB]$

On considère deux points  $A$  et  $B$  du plan. Le cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

DÉMONSTRATION.

$$M \in \mathcal{C} \iff \begin{cases} M = A \\ \text{ou } M = B \\ \text{ou } AMB \text{ est un triangle rectangle en } M \end{cases} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

□

### Exemple 5.3

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal.

Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$  avec  $A(2; 2)$  et  $B(6; -2)$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 4.3. Représentation paramétrique d'un cercle

Soit  $I(a; b)$  un point du plan,  $(a, b \in \mathbb{R})$ , et  $r$  un réel strictement positif : on note  $\mathcal{C}(I; r)$  le cercle de centre  $I$  et de rayon  $r$ . Soit  $M(x; y)$  un point du plan.

#### Définition 5.4 — Représentation paramétrique

Le système

$$\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une *représentation paramétrique* du cercle  $\mathcal{C}$ .

$t$  est le paramètre.

### 5. Position relative d'une droite et d'un cercle

*Passage illisible dans la source (page 53 du livre) : le texte de cette page n'est pas restitué par le fichier fourni (police non décodable). Seul le titre « V) Position relative d'une droite et d'un cercle » est lisible. Ce contenu n'a pas été reconstitué afin de ne rien inventer ; il est à reprendre directement dans le livre.*

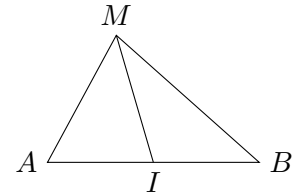
## 6. Longueurs et angles dans un triangle

### 6.1. Théorème de la médiane

#### Propriété 5.5 — Théorème de la médiane

On considère deux points  $A$  et  $B$  du plan et  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Pour tout point  $M$  du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Or  $I$  est le milieu de  $[AB]$  donc  $IA = IB = \frac{1}{2}AB$  donc  $IA^2 = IB^2 = \frac{1}{4}AB^2$

De plus  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

Ainsi  $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2 \times \frac{1}{4}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ . □

#### Exemple 5.4

$ABC$  est un triangle tel que  $AB = 6$ ,  $AC = 8$  et  $BC = 12$ . Calculer  $AI$  où  $I$  est le milieu de  $[BC]$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

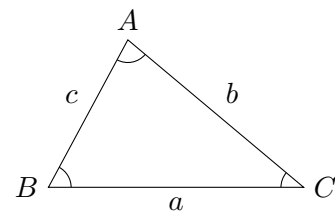
.....

### 6.2. Formules d'Al Kashi

#### Propriété 5.6 — Formules d'Al Kashi

On considère un triangle  $ABC$ . On pose  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $\hat{A} = \widehat{BAC}$ ,  $\hat{B} = \widehat{ABC}$  et  $\hat{C} = \widehat{ACB}$ . On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos(\hat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}) \end{aligned}$$



DÉMONSTRATION.  $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$   
 Ainsi  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$  soit  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A})$   $\square$

**Exemple 5.5**

$ABC$  est un triangle tel que  $AC = 9$ ,  $AB = 5$  et  $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$ . Calculer  $BC$ .

----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**6.3. Aire d'un triangle****Propriété 5.7 — Aire d'un triangle**

On considère un triangle  $ABC$  et on appelle  $S$  son aire. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$S = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac \sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab \sin(\widehat{C})$$

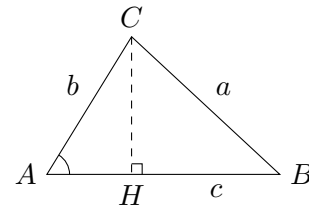
DÉMONSTRATION.

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ . On a alors  $S = \frac{1}{2}AB \times CH$ .  $\square$

Si l'angle  $\widehat{A}$  est aigu alors  $CH = AC \sin(\widehat{A})$ .

Si l'angle  $\widehat{A}$  est obtus alors  $CH = AC \sin(\pi - \widehat{A}) = AC \sin(\widehat{A})$

Dans tous les cas  $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\widehat{A})$ .

**6.4. Formule des sinus****Propriété 5.8 — Formule des sinus**

On considère un triangle  $ABC$ . Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$$

DÉMONSTRATION. On a  $S = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac \sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab \sin(\widehat{C})$  donc  $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$  ainsi  $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$ .  $\square$

**Exemple 5.6**

$ABC$  est un triangle tel que  $BC = 5$ ,  $\widehat{B} = 50^\circ$  et  $\widehat{C} = 75^\circ$ . Calculer  $AB$  et  $AC$  et donner les valeurs arrondies au dixième.



CHAPITRE

# 6

## Suites numériques

### Sommaire du chapitre

|          |                                                  |    |
|----------|--------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | Généralités . . . . .                            | 48 |
| 1.1      | Définition . . . . .                             | 48 |
| 1.2      | Comment générer une suite . . . . .              | 48 |
| <b>2</b> | Sens de variation . . . . .                      | 49 |
| 2.1      | Définition . . . . .                             | 49 |
| 2.2      | Propriété . . . . .                              | 51 |
| <b>3</b> | Suites arithmétiques . . . . .                   | 52 |
| 3.1      | Définition . . . . .                             | 52 |
| 3.2      | Expression de $u_n$ en fonction de $n$ . . . . . | 53 |
| 3.3      | Somme de termes consécutifs . . . . .            | 53 |
| <b>4</b> | Suites géométriques . . . . .                    | 54 |
| 4.1      | Définition . . . . .                             | 54 |
| 4.2      | Expression de $u_n$ en fonction de $n$ . . . . . | 55 |
| 4.3      | Somme de termes consécutifs . . . . .            | 55 |

## 1. Généralités

### 1.1. Définition

#### Définition 6.1 — Suite numérique

Une *suite* est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$ . Une *suite numérique* est une suite à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . L'image de  $n$  par une suite  $u$  se note  $u_n$  et est appelée *terme de rang  $n$*  de la suite. Une suite  $u$  est aussi notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

REMARQUE 6.1. On peut aussi définir une suite à partir d'un certain rang.

#### Exemple 6.1

1/  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{1}{n+2}$ .  $u_0 = \frac{1}{2}, u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = \frac{1}{4}, \dots$

2/  $v$  définie pour tout  $n \geq 3$  par  $v_n = \frac{1}{n-2}$   $v_3 = 1, v_4 = \frac{1}{2}, v_5 = \frac{1}{3}, \dots$

----- CORRECTION -----

.....  
.....

### 1.2. Comment générer une suite

Selon le contexte les termes d'une suite peuvent être définis de différentes façons.

#### Explicitement en fonction du rang

- Toute fonction définie sur  $[0; +\infty[$  (ou sur un intervalle de la forme  $[a; +\infty[$ ) permet de définir une suite.

#### Exemple 6.2

Calculer les premiers termes de la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = 2n^2 - 5n - 1$ .

----- CORRECTION -----

.....  
.....  
.....  
.....

- Les propriétés des nombres entiers permettent aussi de définir explicitement des suites qui ne peuvent pas être obtenues simplement par une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exemple 6.3

Calculer les premiers termes des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  où  $u_n = (-1)^n$  et  $v_n$  est le nombre de diviseurs de  $n$ .

.....  
.....

*Par récurrence*

Une suite peut aussi être définie par son premier terme (ou ses premiers termes) et par une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent (ou des précédents).

### Exemple 6.4

Calculer les premiers termes des suites ci-dessous définies sur  $\mathbb{N}$ .

- $u$  est définie par  $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n - 1 \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$
- $v$  est définie par  $\begin{cases} v_0 = 1 ; v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$
- $w$  est définie par  $w_0 = 3$  et  $\begin{cases} w_{n+1} = \frac{w_n}{2} & \text{si } w_n \text{ est pair} \\ w_{n+1} = 3w_n + 1 & \text{si } w_n \text{ est impair} \end{cases}$

## CORRECTION

## 2. Sens de variation

### 2.1. Définition

Une suite étant une fonction, les définitions restent les mêmes :

### Définition 6.2 — Sens de variation d'une suite

$u$  est croissante (strict. croissante) si  $n < p \implies u_n \leq u_p$  ( $n < p \implies u_n < u_p$ )  
 $u$  est décroissante (strict. décroissante) si  $n < p \implies u_n \geq u_p$  ( $n < p \implies u_n > u_p$ )

Cependant, les propriétés des nombres entiers permettent d'établir les résultats suivants :

### Propriété 6.1

$u$  est croissante si et seulement si pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$

$u$  est décroissante si et seulement si pour tout entier  $n$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$

## REMARKS 6.2.

- Ne pas mélanger  $u_{n+1}$  et  $u_n + 1$
- Dans la pratique, pour déterminer le sens de variation d'une suite, on s'intéresse au signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$ .
- Dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1.

### Exemple 6.5

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

- $u$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = 3n + (-1)^n$ .
- $v$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- $w$  est définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $w_n = \frac{2^n}{n}$ .

## CORRECTION

## 2.2. Propriété

### Propriété 6.2

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0; +\infty[$ , et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = f(n)$ , alors

- si  $f$  est croissante, alors la suite  $(u_n)$  est croissante,
- si  $f$  est décroissante, alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.

DÉMONSTRATION. Si par exemple  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , alors pour tout entier  $n$ ,  $f(n+1) \geq f(n)$ , c'est-à-dire exactement que  $u_{n+1} \geq u_n$ , donc  $(u_n)$  est croissante.  $\square$

### Exercice 6.1

Étudier le sens de variation des suites définies par les expressions :

$$\bullet u_n = \frac{3n-2}{n+1} \quad \bullet v_n = -\frac{1}{3}n + 3 \quad \bullet w_n = (n-5)^2$$

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

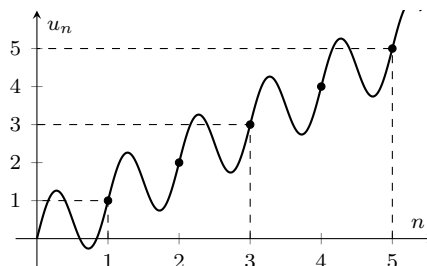
.....

.....

.....

REMARQUE 6.3. La réciproque est fausse !

Par exemple, soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = f(n)$  avec la fonction  $f(x) = x + \sin(2\pi x)$ . Alors, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = n + \sin(2\pi n) = n$ , et donc  $(u_n)$  est croissante (c'est la suite des entiers naturels), tandis que  $f$  n'est pas monotone sur  $\mathbb{R}$ .



### Exercice 6.2

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

$$\bullet u_n = \frac{n^2+1}{2n} \quad \bullet v_n = \frac{3n-1}{n+2} \quad \bullet w_n = n^2 - 10n + 26 \quad \bullet x_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$$

---

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3. Suites arithmétiques

#### 3.1. Définition

##### Définition 6.3 — Suite arithmétique

Une *suite arithmétique* est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité  $r$ , appelée *raison* de la suite, au terme précédent.

Pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$ .

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \dots \dots \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \dots$$

##### Exemple 6.6

La suite des nombres impairs est une suite arithmétique de raison 2.

Les suites  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = 3n - 4$  et  $v_n = n^2 + 2$  sont-elles arithmétiques ?

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exercice 6.3**

- La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier  $n$  par la relation  $u_{n+1} = u_n + 1$  est une suite arithmétique de raison  $r = 1$ . On a :  $u_1 = u_0 + 1 = 1$ ,  $u_2 = u_1 + 1 = 2$ ,  $u_3 = \dots$   $(u_n)$  est la suite des entiers naturels.
- Soit  $(v_n)$  la suite définie par la relation  $v_n = 5n + 2$ .  
Alors, pour tout entier  $n$ ,  $v_{n+1} - v_n = \dots$   
On en déduit que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = \dots$
- La suite  $(w_n)$  définie par la relation  $w_n = n^2 + 2$  est-elle arithmétique ?

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Propriété 6.3 — Sens de variation**Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .Si  $r > 0$  alors  $u$  est strictement croissante.Si  $r = 0$  alors  $u$  est constante.Si  $r < 0$  alors  $u$  est strictement décroissante.DÉMONSTRATION IMMÉDIATE. (Pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = r \dots$ )

□

**3.2. Expression de  $u_n$  en fonction de  $n$** **Propriété 6.4 — Terme général**Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .Pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  :  $u_n = u_p + (n - p)r$ En particulier, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n = u_0 + nr$ DÉMONSTRATION. On suppose  $n \geq p$ . On a :

$$u_n - u_{n-1} = r ; u_{n-1} - u_{n-2} = r ; \dots u_{p+2} - u_{p+1} = r ; u_{p+1} - u_p = r$$

En additionnant toutes ces égalités, on obtient :  $u_n - u_p = (n - p)r$  soit  $u_n = u_p + (n - p)r$ 

□

**3.3. Somme de termes consécutifs****Propriété 6.5 — Somme de termes consécutifs**Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .Pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

REMARQUE 6.4. On a aussi  $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$

DÉMONSTRATION. Posons  $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

On a ainsi  $2S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0)$

Or, pour tout  $k \leq n$ ,  $u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$ .

On a donc :  $2S = (n+1) \times (u_0 + u_n)$

Donc  $S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$

□

### Exemple 6.7

Déterminer la somme des  $n$  premiers nombres impairs.

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

## 4. Suites géométriques

### 4.1. Définition

#### Définition 6.4 — Suite géométrique

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $q$  un réel.

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une *suite géométrique* de raison  $q$  si pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

REMARQUE 6.5. Si  $q \neq 0$  et  $u_0 \neq 0$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 0$ .

### Exemple 6.8

La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Les suites  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = -4 \times 3^n$  et  $v_n = n^2 + 1$  sont-elles géométriques ?

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 4.2. Expression de $u_n$ en fonction de $n$

### Propriété 6.6 — Terme général

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$ .  
 Pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  :  $u_n = u_p \times q^{n-p}$   
 En particulier, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n = u_0 \times q^n$

DÉMONSTRATION. On suppose  $n \geq p$ . On a :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q ; \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = q ; \dots \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} = q ; \frac{u_{p+1}}{u_p} = q$$

En multipliant toutes ces égalités, on obtient :  $\frac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$  soit  $u_n = u_p \times q^{n-p}$  □

### Propriété 6.7 — Sens de variation

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q \neq 0$ .

- Si  $q > 1$  alors  $\begin{cases} \text{si } u_0 > 0, u \text{ est strictement croissante.} \\ \text{si } u_0 < 0, u \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$
- Si  $q = 1$  alors  $u$  est constante.
- Si  $0 < q < 1$  alors  $\begin{cases} \text{si } u_0 > 0, u \text{ est strictement décroissante.} \\ \text{si } u_0 < 0, u \text{ est strictement croissante.} \end{cases}$
- Si  $q < 0$  alors  $u$  n'est pas monotone.

DÉMONSTRATION. Pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n(q - 1)$

Le signe de  $u_{n+1} - u_n$  s'obtient donc en fonction du signe de  $u_0$ , du signe de  $q^n$  et du signe de  $q - 1$ . □

## 4.3. Somme de termes consécutifs

### Propriété 6.8 — Somme de termes consécutifs

Soit  $q$  un réel différent de 1.  
 Pour tout entier naturel  $n$  :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ .  
 Pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

DÉMONSTRATION. Posons  $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$ . On a alors  $qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$   
 Ainsi,  $S - qS = 1 - q^{n+1}$

D'où :  $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  □

**Exemple 6.9**

Déterminer la somme des  $n$  premières puissances de 2 ( $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$ ).

----- CORRECTION -----

CHAPITRE

7

---

Trigonométrie

---

Sommaire du chapitre

---

|     |                                          |    |
|-----|------------------------------------------|----|
| 1   | Formules d'addition . . . . .            | 58 |
| 2   | Formules de duplication . . . . .        | 59 |
| 3   | Formules de linéarisation . . . . .      | 60 |
| 4   | Formulaire de trigonométrie . . . . .    | 61 |
| 4.1 | Les angles associés . . . . .            | 61 |
| 4.2 | Les équations trigonométriques . . . . . | 61 |
| 4.3 | Formules d'addition . . . . .            | 61 |
| 4.4 | Formules de transformation . . . . .     | 62 |

## 1. Formules d'addition

Passage illisible dans la source (page 102 du livre) : le contenu de cette page (énoncé des formules d'addition et début de la démonstration) n'est pas restitué par le fichier fourni. Il n'a pas été reconstitué ; les formules d'addition figurent dans le formulaire de fin de chapitre (§4). La démonstration reprend ci-dessous là où le texte redevient lisible.

DÉMONSTRATION (SUITE).

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(a - b) = \cos(a - b)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

On en déduit donc la deuxième formule :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Pour retrouver la première, il faut remplacer dans la formule ci-dessus  $b$  par  $-b$ , on obtient alors :

$$\cos[a - (-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$$

comme la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire, on a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Pour retrouver les formules avec le sinus, on utilise la formule qui permet de passer du cosinus au sinus, c'est-à-dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

On a alors :

$$\sin(a + b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$$

Comme  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

$$= \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

On retrouve la dernière formule en remplaçant  $b$  par  $-b$  et compte tenu des parités des fonctions cos et sin, on obtient alors :

$$\sin[a + (-b)] = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

□

### Exemple 7.1

En remarquant que :  $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ , calculer la valeur exacte de  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**REMARQUE 7.1.** Pour se souvenir des formules d'addition, on peut remarquer :

- Avec le cosinus on ne « panache pas » tandis qu'avec le sinus on « panache ».
- Avec le cosinus et  $a + b$ , on met un « moins » entre les deux termes. Avec le sinus pas de problème de signe.

## 2. Formules de duplication

### Théorème 7.1 — Formules de duplication

Pour tout angle  $a$ , on a les relations :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a\end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** La formule sur le  $\sin 2a$  est l'application directe des formules d'addition. Les formules sur le  $\cos 2a$  font intervenir la relation entre  $\cos^2$  et  $\sin^2$ . En effet :

$$\cos 2a = \cos(a + a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

En appliquant la formule  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ , on obtient les deux formules suivantes

$$\begin{aligned}&= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1 \\ &= (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a\end{aligned}$$

□

### Exemple 7.2

1) Calculer  $\cos 2x$  dans les deux cas suivants a)  $\cos x = \frac{3}{5}$  b)  $\sin x = -\frac{1}{3}$

2)  $a$  est un réel de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que :  $\cos a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

a) Calculer  $\cos 2a$ .

b) À quel intervalle appartient  $2a$ . Déduire alors  $a$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3. Formules de linéarisation

#### **Théorème 7.2 — Formules de linéarisation**

Pour tout angle  $a$  on a les relations :

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

DÉMONSTRATION. Ces formules se déduisent directement des formules de duplication avec le  $\cos 2a$ . En effet :

$$\begin{aligned} \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 a = 1 + \cos 2a \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ \cos 2a &= 1 - 2 \sin^2 a \Rightarrow 2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \end{aligned}$$

□

#### **Exemple 7.3**

Calculer  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 4. Formulaire de trigonométrie

### 4.1. Les angles associés

#### Propriété 7.1 — Angles associés

Pour tout  $x$  réel, on a :

$$\cos(-x) = \cos(x) ; \cos(\pi + x) = -\cos(x) ; \cos(\pi - x) = -\cos(x) ;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) ; \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) ; \sin(\pi + x) = -\sin(x) ; \sin(\pi - x) = \sin(x) ;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) ; \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ , on a :

$$\tan(-x) = -\tan(x) ; \tan(\pi + x) = \tan(x) ; \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

### 4.2. Les équations trigonométriques

#### Propriété 7.2 — Équations trigonométriques

$\alpha$  est un réel quelconque :

$$- \cos(x) = \cos(\alpha) \iff \text{il existe un entier } k \text{ tel que : } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi$$

$$- \sin(x) = \sin(\alpha) \iff \text{il existe un entier } k \text{ tel que : } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

$$\alpha \in D_{\tan} : \tan(x) = \tan(\alpha) \iff \text{il existe un entier } k \text{ tel que : } x = \alpha + k\pi$$

### 4.3. Formules d'addition

#### Propriété 7.3 — Formules d'addition

Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) ; \quad \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) ; \quad \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Remarquons que, pour  $b = -a$  la 1<sup>re</sup> formule donne :  $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ .

Pour tous réels  $a$  et  $b$  « autorisés » :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} ; \quad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Pour tout réel  $a$  :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) ; \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a) ; \quad \sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$$

Pour tout réel  $a$  « autorisé » :

$$\cos(2a) = \frac{1 - \tan^2(a)}{1 + \tan^2(a)} ; \quad \sin(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 + \tan^2(a)} ; \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

## 4.4. Formules de transformation

**Propriété 7.4 — Formules de transformation**

Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) ; \quad \sin(a) \sin(b) = -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Pour tous réels  $p$  et  $q$  :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) ; \quad \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) ; \quad \sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Pour tous réels  $p$  et  $q$  autorisés :

$$\tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p) \cos(q)} ; \quad \tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos(p) \cos(q)}$$

Pour tous réels  $a$  et  $b$  non tous deux nuls, et pour tout réel  $x$  :

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi),$$

où  $\varphi$  est un réel tel que :  $\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  et  $\sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

CHAPITRE

# 8

---

## La rotation dans le plan

---

### Sommaire du chapitre

|          |                                                                          |    |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | Rotation . . . . .                                                       | 64 |
| 1.1      | Rotation . . . . .                                                       | 64 |
| 1.2      | Formule analytique d'une rotation . . . . .                              | 65 |
| 1.3      | Rotation réciproque . . . . .                                            | 65 |
| <b>2</b> | Caractérisations et propriétés de la rotation . . . . .                  | 65 |
| 2.1      | Les caractéristiques d'une rotation . . . . .                            | 65 |
| 2.2      | Propriétés de la rotation . . . . .                                      | 66 |
| 2.3      | Image d'une droite, d'un segment et d'un cercle par une rotation . . . . | 66 |

## 1. Rotation

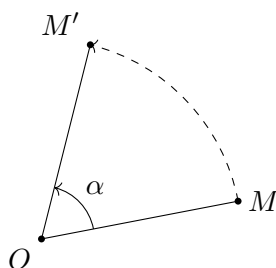
### 1.1. Rotation

#### Définition 8.1 — Rotation

Soit  $O$  un point du plan. La *rotation*  $r$  de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$  transforme un point  $M$  en un point image  $M'$  tel que :

$$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha [2\pi] \end{cases}$$

On note parfois  $r_{(O;\alpha)}$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$  ou  $r_O$  et on précise l'angle de rotation. D'après la figure ci-dessous  $r_{(O;\alpha)}(M) = M'$ .



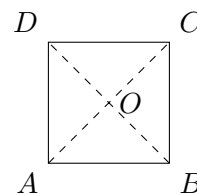
#### REMARQUES 8.1.

- 1) L'image du centre  $O$  est  $O$  (on dit que le point  $O$  est invariant),
- 2) Les rotations d'angle  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  sont appelées quarts de tour direct,
- 3) Les rotations d'angle  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  sont appelées quarts de tour indirect,
- 4) La rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha = \pi$  est la symétrie centrale par rapport à  $O$ .

#### Exemple 8.1

$ABCD$  est un carré de sens direct de centre  $O$ . Soit  $r_A$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r_O$  une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ .

- 1) Déterminer  $r_A(A)$ ;  $r_A(B)$ ;  $r_A(D)$ ,
- 2) Comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $r_O(A) = B$ ? Comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $r_O(A) = C$ ?



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 1.2. Formule analytique d'une rotation

Soit  $\Omega$  un point du plan  $\mathcal{P}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors la rotation d'angle  $\theta$  et de centre  $\Omega$  :

$$\begin{array}{ccc} R : \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \quad \text{tels que : } \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi]. \end{cases}$$

On a :

$$R(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi]. \end{cases}$$

## 1.3. Rotation réciproque

### Définition 8.2 — Rotation réciproque

Soit  $r$  une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ . La rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\alpha$  est appelée *rotation réciproque* de  $r$ . On la note  $r^{-1}$ .

D'après la figure ci-dessus on a :  $r_O^{-1}(M') = M$ .

## 2. Caractérisations et propriétés de la rotation

### 2.1. Les caractéristiques d'une rotation

Une rotation peut donc être caractérisée par l'image de deux points :

#### Propriété 8.1 — Caractérisation

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts et  $A'$ ,  $B'$  deux points tels que  $AB = A'B'$  avec  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ , il existe une unique rotation  $r$  qui transforme  $A$  en  $A'$  et  $B$  en  $B'$ .

Cette rotation a pour angle  $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$ , et pour centre l'intersection des médiatrices de  $[AA']$  et  $[BB']$  (si elles se coupent) ou bien le point d'intersection de  $(AB)$  et de la médiatrice de  $[AA']$  (si les médiatrices ne sont pas sécantes).

Il n'est pas nécessaire de connaître le centre de la rotation pour construire l'image  $M'$  du point  $M$  (distinct de  $A$ ) car celui-ci vérifie les deux conditions suivantes :

$$AM = A'M' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A'M'}) = \theta$$

#### Propriété 8.2

Soient  $M$  et  $N$  deux points du plan distincts. On note  $M'$  et  $N'$  leurs images respectives par la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\theta$ . Alors on a :

$$MN = M'N' \quad (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) = \theta [2\pi]$$

DÉMONSTRATION. Les triangles  $CMN$  et  $CM'N'$  sont isométriques de même orientation car  $CM = CM'$ ,  $CN = CN'$  et

$$(\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CN}) = (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CM'}) + (\overrightarrow{CM'}; \overrightarrow{CN'}) + (\overrightarrow{CN'}; \overrightarrow{CN}) = \theta + (\overrightarrow{CM'}; \overrightarrow{CN'}) - \theta = (\overrightarrow{CM'}; \overrightarrow{CN'})$$

Donc, en particulier :  $MN = M'N'$  et  $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{M'N'}; \overrightarrow{M'C})$

Une relation de Chasles sur les angles permet alors d'écrire :

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{M'C}) + (\overrightarrow{M'C}; \overrightarrow{M'N'})$$

les deux angles extrêmes s'annulent et celui du milieu vaut  $\theta$  donc  $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) = \theta$  □

## 2.2. Propriétés de la rotation

### Propriété 8.3 — Conservation

La rotation conserve :

- les longueurs ;
- les angles (l'image d'un angle est un angle de même amplitude) ;
- les parallèles (les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles) ;
- les aires (l'image d'une figure est une figure de même aire).

### Propriété 8.4 — Alignement

Une rotation transforme trois points alignés dans un ordre en trois points alignés dans le même ordre.

DÉMONSTRATION. Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points du plan alignés dans cet ordre et  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  leurs images par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$  alors :  $AB = A'B'$  et  $BC = B'C'$  et  $AC = A'C'$   
 $AB + BC = AC$  c'est-à-dire :  $A'B' + B'C' = A'C'$

les trois points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont alignés dans cet ordre. □

### Propriété 8.5 — Angles orientés

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points du plan distincts. On note  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  leurs images respectives par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ .

Alors :  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'})$

DÉMONSTRATION. On a :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{A'C'}; \overrightarrow{AC})$$

Or :  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \alpha$  et  $(\overrightarrow{A'C'}; \overrightarrow{AC}) = -\alpha$

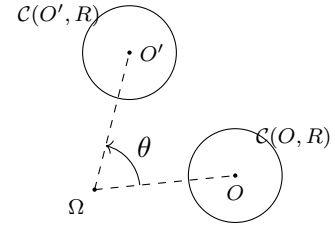
On obtient :  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'})$  □

## 2.3. Image d'une droite, d'un segment et d'un cercle par une rotation

**Propriété 8.6**

Soit  $r$  une rotation. Soit  $A$  et  $B$  deux points tels que  $A \neq B$ . Alors on a :

- (i) l'image de la droite  $(AB)$  par la rotation  $r$  est la droite  $(A'B')$  telle que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$ .
- (ii) L'image du segment  $[AB]$  est le segment  $[A'B']$  tel que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$ .
- (iii) l'image du cercle  $\mathcal{C}(O, R)$  par la rotation  $r$  est le cercle  $\mathcal{C}(O', R)$  tel que  $r(O) = O'$  (voir figure ci-contre).



CHAPITRE

# 9

---

## Limite d'une fonction numérique

---

### Sommaire du chapitre

|          |                                                                            |    |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | Limite à l'infini . . . . .                                                | 69 |
| 1.1      | Limite infinie en $+\infty$ , en $-\infty$ . . . . .                       | 69 |
| 1.2      | Limite finie en $+\infty$ , en $-\infty$ – Asymptote horizontale . . . . . | 69 |
| <b>2</b> | Limite infinie en un réel $a$ . . . . .                                    | 70 |
| <b>3</b> | Opérations sur les limites . . . . .                                       | 71 |
| 3.1      | Somme de deux fonctions . . . . .                                          | 71 |
| 3.2      | Produit de deux fonctions . . . . .                                        | 72 |
| 3.3      | Inverse d'une fonction . . . . .                                           | 73 |
| 3.4      | Quotient de deux fonctions . . . . .                                       | 74 |

## 1. Limite à l'infini

### 1.1. Limite infinie en $+\infty$ , en $-\infty$

#### Définition 9.1 — Limite infinie en $+\infty$

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[\alpha; +\infty[$ .

On dit que  $f$  a comme limite  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  si, pour tout nombre  $A$ , l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand (voir figure 1).

On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty$$

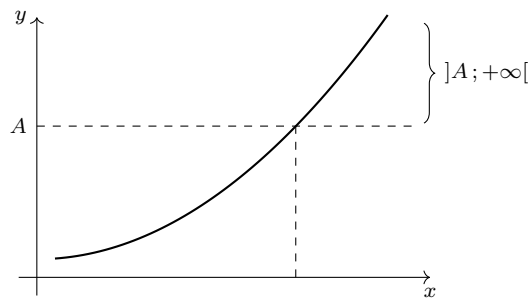


Figure 1 – Limite  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$

REMARQUE 9.1. On peut définir de manière analogue  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

#### Propriété 9.1 — Cas des fonctions usuelles

- Les fonctions  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto x^n$  ( $n$  entier strictement positif) ont comme limite  $+\infty$  en  $+\infty$ .
- Les fonctions  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto x^n$  ( $n$  entier pair, non nul) ont comme limite  $+\infty$  en  $-\infty$ .
- Les fonctions  $x \mapsto x^n$  ( $n$  entier impair) ont comme limite  $-\infty$  en  $-\infty$ .

### 1.2. Limite finie en $+\infty$ , en $-\infty$ – Asymptote horizontale

#### Définition 9.2 — Limite finie en $+\infty$

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[\alpha; +\infty[$  et  $l$  un nombre réel.

On dit que  $f$  a comme limite  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand (voir figure 2).

On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = l$$

REMARQUE 9.2. On peut définir de manière analogue  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ .

**Définition 9.3 — Asymptote horizontale**

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ), on dit que la droite d'équation  $y = l$  est *asymptote (horizontale)* à la courbe représentant  $f$ .

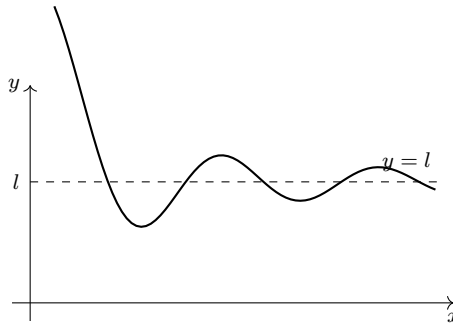


**Figure 2** – Limite finie lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$

**REMARQUE 9.3.** Graphiquement, ceci signifie que la courbe représentant  $f$  se rapproche de plus en plus de cette droite lorsque  $x$  devient grand (voir figure 2).

**Propriété 9.2 — Cas des fonctions usuelles**

- Les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  ( $n$  entier strictement positif) ont comme limite  $0^+$  en  $+\infty$ .
- Les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  ( $n$  entier pair, non nul) ont comme limite  $0^+$  en  $-\infty$ .
- Les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  ( $n$  entier impair, non nul) ont comme limite  $0^-$  en  $-\infty$ .

**REMARQUES 9.4.**

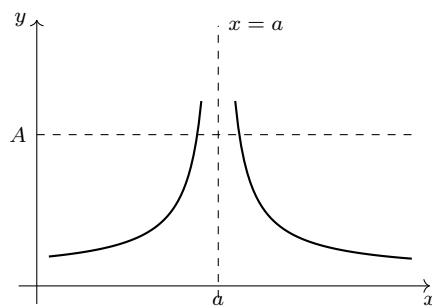
1. «  $0^+$  » signifie que la fonction tend vers zéro tout en restant plus grande que zéro.
2. Toutes les courbes représentatives de ces fonctions admettent l'axe des abscisses comme asymptote.

## 2. Limite infinie en un réel $a$

**Définition 9.4 — Limite infinie en un réel  $a$** 

Soit  $a$  un réel et  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$  (mais pas nécessairement en  $a$ ). On dit que  $f$  a comme limite  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si, pour tout nombre  $A$ , l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment proche de  $a$  (voir figure 3). On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_a f = +\infty$$

Figure 3 – Limite infinie lorsque  $x$  tend vers le réel  $a$ 

REMARQUE 9.5. On peut définir de manière analogue  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ .

### Définition 9.5 — Asymptote verticale

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ), on dit que la droite d'équation  $x = a$  est *asymptote (verticale)* à la courbe représentant  $f$  (voir figure 3).

### Propriété 9.3 — Cas des fonctions usuelles

- Pour  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- Pour  $x \mapsto \frac{1}{x}$  :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$
- Pour  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- Plus généralement :
  - si  $n$  entier pair non nul,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ ;
  - si  $n$  entier impair,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

REMARQUE 9.6. Toutes les courbes représentatives de ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote.

## 3. Opérations sur les limites

Dans toute cette section,  $l$  et  $l'$  désignent deux nombres réels;  $a$  désigne soit un réel, soit  $+\infty$ , soit  $-\infty$ .

### 3.1. Somme de deux fonctions

Les résultats sont résumés dans le tableau 1.

**Propriété 9.4 — Limite d'une somme**

|                                        |          |           |           |           |           |           |
|----------------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$          | $l$      | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$          | $l'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I.      |

**Table 1** – Limite d'une somme

**REMARQUE 9.7.** « F.I. » signifie « Forme Indéterminée ». Ceci veut dire que l'on ne peut pas conclure directement à l'aide du tableau. Il faut étudier plus en détail la fonction pour « lever l'indétermination » et trouver la limite.

**3.2. Produit de deux fonctions****3.2.1. Limite d'un produit**

Les résultats sont résumés dans le tableau 2.

**Propriété 9.5 — Limite d'un produit**

|                                             |               |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|---------------------------------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$               | $l$           | $l > 0$   | $l > 0$   | $l < 0$   | $l < 0$   | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$       | $0$       |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$               | $l'$          | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$ | $l \times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I.      | F.I.      |

Il s'agit de la règle des signes

**Table 2** – Limite d'un produit**3.2.2. Application : limite en l'infini d'une fonction polynôme****Exemple 9.1**

$$f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x + 1$$

On a une forme indéterminée en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**REMARQUES 9.8.**

1. On a un résultat analogue lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .

2. On peut remarquer que la limite est la même que celle de  $-3x^4$ . Ce résultat se généralise.

### Propriété 9.6 — Limite d'une fonction polynôme

En  $+\infty$  ou en  $-\infty$ , une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

REMARQUE 9.9. Ce résultat n'est valable que pour les fonctions polynômes et uniquement pour l'étude des limites en l'infini.

## 3.3. Inverse d'une fonction

Les résultats sont résumés dans le tableau 3.

### Propriété 9.7 — Limite de l'inverse

|                                         |               |           |           |                      |                      |
|-----------------------------------------|---------------|-----------|-----------|----------------------|----------------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$           | $l$           | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$<br>et $f(x) > 0$ | $0$<br>et $f(x) < 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$ | $\frac{1}{l}$ | $0$       | $0$       | $+\infty$            | $-\infty$            |

Table 3 – Limite de l'inverse

REMARQUE 9.10. Lorsque  $f(x)$  tend vers zéro, il est nécessaire de connaître le signe de  $f$  pour conclure. Par contre, dans la plupart des cas, ce n'est pas du tout une forme indéterminée.

### Exemple 9.2

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = ?$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} = ?$

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**REMARQUES 9.11.**

1. Attention ! La notation  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < -1}} \frac{1}{x^2 - 1}$  n'a aucun sens. Il suffit de connaître le signe de  $(x^2 - 1)$  au voisinage de 1 pour conclure.
2. Par un raisonnement analogue, on trouve :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$$

**3.4. Quotient de deux fonctions****3.4.1. Limite d'un quotient**

On peut remarquer que  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ . On peut donc trouver la limite d'un quotient à l'aide des tableaux 2 et 3.

Les résultats sont résumés dans le tableau 4.

**Propriété 9.8 — Limite d'un quotient**

|                                            |                |                           |                           |                                    |                           |                           |      |
|--------------------------------------------|----------------|---------------------------|---------------------------|------------------------------------|---------------------------|---------------------------|------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$              | $l$            | $l$                       | $l \neq 0$                | $+\infty$<br>ou $-\infty$          | $+\infty$<br>ou $-\infty$ | $+\infty$<br>ou $-\infty$ | 0    |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$              | $l' \neq 0$    | $+\infty$<br>ou $-\infty$ | 0                         | 0                                  | $l' \neq 0$               | $+\infty$<br>ou $-\infty$ | 0    |
| $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{l}{l'}$ | 0                         | $+\infty$<br>ou $-\infty$ | $+\infty$<br>ou $-\infty$          | $+\infty$<br>ou $-\infty$ | F.I.                      | F.I. |
|                                            |                |                           |                           | Il faut étudier<br>le signe de $g$ |                           | règle des<br>signes       |      |

**Table 4** – Limite d'un quotient**Exemple 9.3**

1.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x - 2}{3x - 1} = ?$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}} = ?$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}} = ?$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3.4.2. Application : limite en l'infini d'une fonction rationnelle

#### Exemple 9.4

$$h(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x + 2}$$

On a une forme indéterminée lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**REMARQUE 9.12.** On peut remarquer que la limite est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré. Ce résultat se généralise.

#### Propriété 9.9 — Limite d'une fonction rationnelle

En  $+\infty$  ou en  $-\infty$ , une fonction rationnelle a la même limite que le quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

## CHAPITRE 10

# La dérivabilité d'une fonction numérique

### Sommaire du chapitre

|          |                                                                |    |
|----------|----------------------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | Introduction . . . . .                                         | 77 |
| <b>2</b> | Le nombre dérivé . . . . .                                     | 77 |
| 2.1      | Définition . . . . .                                           | 77 |
| 2.2      | Dérivabilité à gauche et à droite . . . . .                    | 78 |
| 2.3      | Exemples . . . . .                                             | 79 |
| <b>3</b> | Fonction dérivée. Dérivée des fonctions élémentaires . . . . . | 80 |
| 3.1      | Fonction dérivée . . . . .                                     | 80 |
| 3.2      | Fonction dérivée des fonctions élémentaires . . . . .          | 80 |
| 3.3      | Règles de dérivation . . . . .                                 | 82 |
| 3.4      | Tableau récapitulatif . . . . .                                | 85 |
| <b>4</b> | Interprétations géométrique et numérique . . . . .             | 86 |
| 4.1      | Équation de la tangente . . . . .                              | 86 |
| 4.2      | Approximation affine . . . . .                                 | 87 |
| 4.3      | Cinématique . . . . .                                          | 87 |
| <b>5</b> | Sens de variation d'une fonction . . . . .                     | 88 |
| 5.1      | Sens de variation . . . . .                                    | 88 |
| 5.2      | Extremum d'une fonction . . . . .                              | 89 |

## 1. Introduction

Passage illisible dans la source (page 139 du livre) : le début de cette partie (calcul de Newton de la vitesse instantanée en  $t = 1$  s) n'est pas restitué par le fichier fourni. Il n'a pas été reconstitué ; le texte reprend ci-dessous là où il redevient lisible.

Pour Newton la vitesse en  $t = 1$  s est de  $10 \text{ m.s}^{-1}$ . Mais la vitesse est-elle exactement égale à  $10 \text{ m.s}^{-1}$  ou d'environ  $10 \text{ m.s}^{-1}$  ?

- Si la vitesse est exactement de  $10 \text{ m.s}^{-1}$  alors  $dt = 0$
- mais si  $dt = 0$ , la notion de vitesse instantanée n'a aucun sens : le dénominateur est nul.
- Si la vitesse instantanée est d'environ  $10 \text{ m.s}^{-1}$  comment calculer la vitesse exacte ?

Ce problème a opposé les mathématiciens. Les uns donnaient raison à Newton, les autres critiquaient sa méthode peu rigoureuse.

Ce blocage ne fut résolu qu'au XIX<sup>e</sup> siècle avec la notion de limite. Si cette notion de limite est cette fois rigoureuse, elle a malheureusement complexifié le problème de départ. Avec ce nouveau concept de limite, la vitesse instantanée en  $t = 1$  vaut :

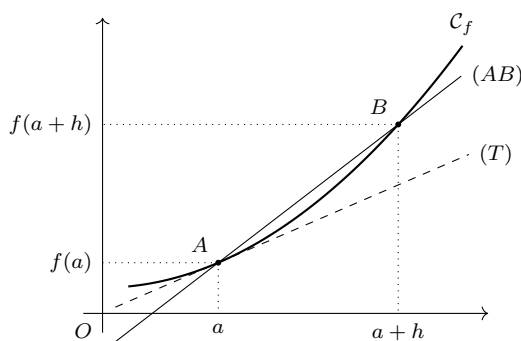
$$v(1) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dz}{dt}$$

**REMARQUE 10.1.** La notion rigoureuse de limite sera vue en terminale. Pour ce chapitre nous nous contenterons d'utiliser la méthode intuitive de Newton.

La vitesse en 1 est la limite quand  $dt$  tend vers 0 de la variation d'altitude,  $dz$ , sur la variation de temps  $dt$ .

## 2. Le nombre dérivé

### 2.1. Définition



Le coefficient directeur  $\alpha$  de la droite  $(AB)$  est :

$$\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si le point  $B$  se rapproche du point  $A$  ( $h$  tend vers 0), la droite  $(AB)$  se rapproche de la tangente  $(T)$  à la courbe en  $x = a$ .

Le coefficient directeur de cette tangente  $(T)$  est appelé *nombre dérivé*. Ce nombre dérivé est noté  $f'(a)$ .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

#### Définition 10.1 — Nombre dérivé

Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a$  un point de  $I$ .

- On appelle *taux d'accroissement* (ou taux de variation) de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $a + h$ , le nombre  $t$  défini par :

$$t = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- La fonction  $f$  admet un *nombre dérivé*, noté  $f'(a)$ , en  $a$ , si et seulement si, le taux d'accroissement de la fonction  $f$  en  $a$  admet une limite, c'est-à-dire :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

### REMARQUE 10.2.

- On utilisera par la suite la première notation.
- Les physiciens utilisent la notation appelée différentielle :  $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$

## 2.2. Dérivabilité à gauche et à droite

### Définition 10.2 — Dérivabilité à droite, à gauche

Soit  $x_0 \in I$ .

On dit que  $f$  est *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en  $x_0$  si le taux d'accroissement de  $f$  admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en  $x_0$ . Cette limite est appelée nombre dérivé à droite (resp. à gauche) et on note

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left( \text{resp. } f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

### Proposition 10.1

Soit  $x_0$  un point intérieur à  $I$ . Alors

$f$  est dérivable en  $x_0$  ssi ( $f$  est dérivable à droite et à gauche en  $x_0$  et  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ ).

Dans ce cas  $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ .

**REMARQUE 10.3 — Interprétation graphique.** Si  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$  mais l'est à droite (ou à gauche) en  $x_0$ , on dit que  $f$  admet une demi-tangente en  $x_0$  (même équation en remplaçant  $f'(x_0)$  par  $f'_d(x_0)$  (ou  $f'_g(x_0)$ )).

### Exemple 10.1 — Exemple important

$f : x \mapsto |x|$  admet une dérivée à gauche et à droite en 0 :  $f'_g(0) = -1$  et  $f'_d(0) = 1$ .  
 $1 \neq -1$ , (0 est un point anguleux) donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....  
 .....

### 2.3. Exemples

Deux exemples graphiques pour montrer la signification du nombre dérivé.

#### Exemple 10.2

La courbe représentative  $f$  est donnée ci-après. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. La fonction admet donc des nombres dérivés en ces points. Lire, en se servant du quadrillage les nombres suivants :

- $f(-4)$  et  $f'(-4)$       •  $f(2)$  et  $f'(2)$       •  $f(6)$  et  $f'(6)$

*Figure du livre (courbe de  $f$  sur un quadrillage de  $-6$  à  $7$  avec tangentes, page 142)*  
[à insérer : figure non lisible dans la source fournie]

----- CORRECTION -----

#### Exemple 10.3

La courbe représentative  $g$  est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. La fonction admet donc des nombres dérivés en ces points. Lire, en se servant du quadrillage les nombres suivants :

- $g(-2)$  et  $g'(-2)$       •  $g(0)$  et  $g'(0)$       •  $g(1)$  et  $g'(1)$

*Figure du livre (courbe de  $g$  sur un quadrillage de  $-3$  à  $2$  avec tangentes, page 142)*  
[à insérer : figure non lisible dans la source fournie]

---

.....

.....

.....

.....

.....

### 3. Fonction dérivée. Dérivée des fonctions élémentaires

#### 3.1. Fonction dérivée

##### Définition 10.3 — Fonction dérivée

Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ .

Si la fonction  $f$  admet un nombre dérivé en tout point de  $I$ , on dit que la fonction  $f$  est *dérivable sur  $I$* . La fonction, notée  $f'$ , définie sur  $I$  qui à tout  $x$  associe son nombre dérivé est appelée *fonction dérivée* de  $f$ .

REMARQUE 10.4. Le but du paragraphe suivant est de déterminer les fonctions dérivées des fonctions élémentaires puis d'établir des règles opératoires afin de pouvoir déterminer la dérivée d'une fonction quelconque.

#### 3.2. Fonction dérivée des fonctions élémentaires

##### 3.2.1. Fonction affine

Soit  $f$  la fonction affine suivante :  $f(x) = ax + b$

La fonction affine est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Déterminons le taux d'accroissement en  $x$  :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

On passe à la limite :  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a$

##### 3.2.2. Fonction carrée

Soit  $f$  la fonction carrée :  $f(x) = x^2$

La fonction carrée est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Déterminons le taux d'accroissement en  $x$  :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

On passe à la limite :  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$

**3.2.3. Fonction puissance (admis)****Propriété 10.2 — Fonction puissance**

$f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(x^n)' = nx^{n-1}$

**Exemple 10.4**

Soit  $f(x) = x^5$  on a alors  $f'(x) = \dots$

----- CORRECTION -----

.....  
 .....

**3.2.4. Fonction inverse**

Soit  $f$  la fonction inverse :  $f(x) = \frac{1}{x}$

La fonction inverse est définie et dérivable sur  $] -\infty ; 0[$  ou sur  $]0 ; +\infty[$ .

Déterminons le taux d'accroissement en  $x \neq 0$  :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{h \times x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

On passe à la limite :  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$

**3.2.5. Fonction puissance inverse (admis)****Propriété 10.3 — Fonction puissance inverse**

$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_-^*$  ou sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :  $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$

**Exemple 10.5**

Soit  $f(x) = \frac{1}{x^4}$  on a alors  $f'(x) = \dots$

----- CORRECTION -----

.....  
 .....

**3.2.6. Fonction racine**

Soit  $f$  la fonction racine carrée :  $f(x) = \sqrt{x}$

La fonction racine est définie sur  $\mathbb{R}_+$  et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**REMARQUE 10.5 — Attention.** La fonction racine est définie mais pas dérivable en 0. Sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0 et donc l'équation de cette tangente n'admet pas de coefficient directeur.

Déterminons le taux d'accroissement en  $x \neq 0$  :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

On passe à la limite :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

### 3.3. Règles de dérivation

Dans tout ce paragraphe, on considère deux fonctions  $u$  et  $v$  et un réel  $\lambda$ .

#### 3.3.1. Dérivée de la somme

On peut montrer facilement que la dérivée de la somme est la somme des dérivées car  $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$

##### Propriété 10.4 — Dérivée de la somme

$$(u+v)' = u' + v'$$

##### Exemple 10.6

Soit la fonction  $f$  telle que :  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$   
en appliquant la règle de la somme :  $f'(x) = \dots$

----- CORRECTION -----

.....  
.....

#### 3.3.2. Produit par un scalaire

On peut montrer facilement que la dérivée du produit par un scalaire est le produit du scalaire par la dérivée car  $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$

##### Propriété 10.5 — Dérivée du produit par un scalaire

$$(\lambda u)' = \lambda u'$$

##### Exemple 10.7

Soient :  $f(x) = 3x^4$  et  $g(x) = 5x^3 + 12x^2 - 7x + 3$   
en appliquant la règle ci-dessus :  $f'(x) = \dots$   
en appliquant les deux règles :  $g'(x) = \dots$

----- CORRECTION -----

.....  
.....  
.....

### 3.3.3. Dérivée du produit

REMARQUE 10.6 — **Attention.** La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Calculons le taux d'accroissement de  $(uv)(x) = u(x)v(x)$  :

$$\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

On retranche puis on ajoute un même terme

$$\begin{aligned} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \frac{v(x+h)(u(x+h) - u(x)) + u(x)(v(x+h) - v(x))}{h} \\ &= v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \end{aligned}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned} (uv)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v(x)u'(x) + u(x)v'(x) \end{aligned}$$

#### Propriété 10.6 — Dérivée du produit

$$(uv)' = u'v + uv'$$

REMARQUE 10.7 — **Attention.** La dérivée du produit n'est malheureusement pas le produit des dérivées !

#### Exemple 10.8

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  telle que :  $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$   
 $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :  $f'(x) = \dots$

----- CORRECTION -----

.....  
 .....  
 .....  
 .....

### 3.3.4. Dérivée de l'inverse

REMARQUE 10.8 — **Attention.** La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Calculons le taux d'accroissement de  $\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)}$  :

$$\frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{\frac{v(x) - v(x+h)}{v(x)v(x+h)}}{h} = -\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x+h)v(x)}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{v}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x+h)v(x)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x+h)v(x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}\end{aligned}$$

**Propriété 10.7 — Dérivée de l'inverse**

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

**Exemple 10.9**

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$   
En appliquant la règle de l'inverse :  $f'(x) = \dots$

----- CORRECTION -----

.....  
.....  
.....

**3.3.5. Dérivée du quotient**

On cherche la dérivée du produit par l'inverse :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)'$

D'après la règle du produit, on obtient :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \frac{1}{v} + u \frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

**Propriété 10.8 — Dérivée du quotient**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

**Exemple 10.10**

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , par :  $f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + 1}$   
En appliquant la dérivée du quotient :  $f'(x) = \dots$

----- CORRECTION -----

.....  
.....  
.....  
.....

## 3.3.6. Dérivée de la puissance et de la racine

**Propriété 10.9 — Dérivée de la puissance et de la racine**

On donne sans démonstration la dérivée de la puissance et de la racine.

$$(u^n)' = n u' u^{n-1} \quad \text{et} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

**Exemple 10.11**

Soient  $f(x) = (3x - 5)^5$  et  $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

En appliquant les règles sur la dérivée de la puissance et de la racine, on a :  $f'(x) = \dots$  et  $g'(x) = \dots$

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

## 3.4. Tableau récapitulatif

Voici le tableau des fonctions élémentaires que l'on vient de montrer ainsi que les fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

**Propriété 10.10 — Dérivées des fonctions élémentaires**

| Fonction                                   | $D_f$          | Dérivée                       | $D_{f'}$                          |
|--------------------------------------------|----------------|-------------------------------|-----------------------------------|
| $f(x) = k$                                 | $\mathbb{R}$   | $f'(x) = 0$                   | $\mathbb{R}$                      |
| $f(x) = x$                                 | $\mathbb{R}$   | $f'(x) = 1$                   | $\mathbb{R}$                      |
| $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$           | $\mathbb{R}$   | $f'(x) = nx^{n-1}$            | $\mathbb{R}$                      |
| $f(x) = \frac{1}{x}$                       | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$      | $] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$  | $] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$                          | $]0; +\infty[$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0; +\infty[$                    |
| $f(x) = \sin x$                            | $\mathbb{R}$   | $f'(x) = \cos x$              | $\mathbb{R}$                      |
| $f(x) = \cos x$                            | $\mathbb{R}$   | $f'(x) = -\sin x$             | $\mathbb{R}$                      |

Voici maintenant les principales règles de dérivation.

**Propriété 10.11 — Règles de dérivation**

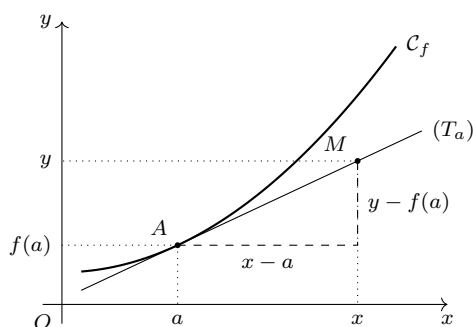
|                                    |                                                     |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Dérivée de la somme                | $(u + v)' = u' + v'$                                |
| Dérivée du produit par un scalaire | $(\lambda u)' = \lambda u'$                         |
| Dérivée du produit                 | $(uv)' = u'v + uv'$                                 |
| Dérivée de l'inverse               | $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$       |
| Dérivée du quotient                | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| Dérivée de la puissance            | $(u^n)' = nu'u^{n-1}$                               |
| Dérivée de la racine               | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$                |

**REMARQUE 10.9.** Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

**4. Interprétations géométrique et numérique****4.1. Équation de la tangente**

Soit la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative d'une fonction  $f$  et  $(T_a)$  sa tangente en  $x = a$ .

On a alors le schéma suivant :



Le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé en  $a$ . Si on considère un point  $M(x; y)$  quelconque de cette tangente, on obtient alors :

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Théorème 10.1 — Équation de la tangente**

L'équation de la tangente  $(T_a)$  en  $a$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative d'une fonction  $f$  dérivable en  $a$  est égale à :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Exemple 10.12**

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$   
Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

.....

.....

.....

.....

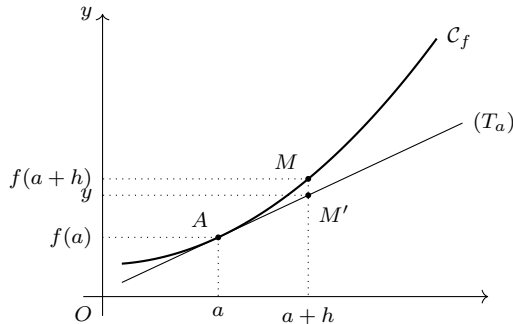
.....

.....

.....

.....

## 4.2. Approximation affine



Lorsque  $x$  est proche de  $a$ , on peut confondre en première approximation le point  $M$  sur la courbe  $C_f$  d'une fonction  $f$  avec le point  $M'$  d'abscisse  $x$  de la tangente  $(T_a)$  à la courbe en  $a$ .

On pose  $x = a + h$  avec  $h$  proche de 0.

Si on confond le point  $M$  avec le point  $M'$ , on a :  $y \simeq f(a + h)$

### Propriété 10.12 — Approximation affine

On obtient alors :  $f(a + h) \simeq f(a) + h f'(a)$

### Exemple 10.13

Déterminer une approximation affine de  $\sqrt{4,03}$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 4.3. Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement : position, vitesse, accélération d'un solide en physique. C'est justement l'étude de la vitesse instantanée qui a permis à Newton de concevoir le concept de dérivée. La vitesse est alors la dérivée de l'équation horaire et l'accélération la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

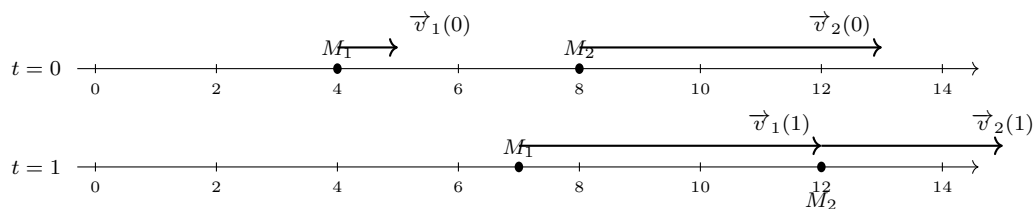
### Exemple 10.14

Deux mobiles  $M_1$  et  $M_2$  sont sur l'axe des abscisses animés d'un mouvement dont les lois horaires en fonction du temps  $t$  sont respectivement

$$x_1(t) = 2t^2 + t + 4 \quad \text{et} \quad x_2(t) = -t^2 + 5t + 8$$

- Calculer l'instant auquel les deux mobiles se rencontrent.
- Calculer les vitesses respectives de ces deux mobiles à cet instant.
- En déduire si lors de la rencontre, les deux mobiles se croisent ou si l'un dépasse l'autre.

REMARQUE 10.10. On peut simuler (position et vitesse) des deux mobiles en fonction du temps. Par exemple aux deux moments à  $t = 0$  s et  $t = 1$  s.



## 5. Sens de variation d'une fonction

### 5.1. Sens de variation

On admettra le théorème suivant qui précise le lien entre variation et dérivée.

### Théorème 10.2 — Dérivée et sens de variation

Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si la fonction dérivée  $f'$  est nulle, alors la fonction est constante.
- Si la fonction dérivée est strictement positive (sauf en quelques points isolés de  $I$  où elle s'annule), alors la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si la fonction dérivée est strictement négative (sauf en quelques points isolés de  $I$  où elle s'annule), alors la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

**Exemple 10.15**

Déterminer les variations de la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**5.2. Extremum d'une fonction****Théorème 10.3 — Extremum local**

Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $c \in I$  est un extremum local de  $f$  sur  $I$  alors  $f'(c) = 0$
- Si  $c \in I$ ,  $f'(c) = 0$  et si  $f'$  change de signe en  $c$  alors  $c$  est un extremum local de  $f$  sur  $I$ .

**Exemple 10.16**

Sur la fonction  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ , étudiée plus haut, la dérivée  $f'(x) = 3x(-x + 2)$  s'annule et change de signe en 0 et 2. On en déduit que ...

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

**REMARQUE 10.11.** Les extremums locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée, mais si  $f'(a) = 0$ ,  $a$  n'est pas nécessairement un extremum local.

En effet, soit  $f(x) = x^3$ , sa dérivée  $f'(x) = 3x^2$  s'annule en 0 mais ne change pas de signe. 0 n'est pas un extremum local.

CHAPITRE

# 11

## Étude des fonctions numériques

### Sommaire du chapitre

|     |                                                                                |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1   | Asymptote oblique . . . . .                                                    | 91 |
| 2   | Branches paraboliques . . . . .                                                | 93 |
| 2.1 | Branche parabolique de direction $(Ox)$ . . . . .                              | 93 |
| 2.2 | Branche parabolique de direction $(Oy)$ . . . . .                              | 93 |
| 2.3 | Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ . . . . .       | 93 |
| 3   | Convexité – Point d'inflexion . . . . .                                        | 93 |
| 3.1 | Notion de convexité, de concavité . . . . .                                    | 93 |
| 3.2 | Point d'inflexion . . . . .                                                    | 94 |
| 3.3 | Convexité et opérations . . . . .                                              | 95 |
| 4   | Convexité et dérivées . . . . .                                                | 95 |
| 4.1 | Convexité et sens de variation de $f'$ . . . . .                               | 95 |
| 4.2 | Convexité et signe de $f''$ . . . . .                                          | 95 |
| 4.3 | Point d'inflexion et dérivée seconde . . . . .                                 | 96 |
| 5   | Axe et centre de symétrie d'une représentation graphique de fonction . . . . . | 96 |
| 5.1 | Axe de symétrie . . . . .                                                      | 96 |
| 5.2 | Centre de symétrie . . . . .                                                   | 96 |
| 6   | Position relative de deux courbes . . . . .                                    | 97 |
| 6.1 | Principe . . . . .                                                             | 97 |
| 6.2 | Exemple . . . . .                                                              | 98 |

## 1. Asymptote oblique

*Passage illisible dans la source (page 158 du livre) : le début de cette partie (définition de l'asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$  et figure associée) n'est pas restitué par le fichier fourni. Il n'a pas été reconstitué ; le texte lisible est reproduit ci-dessous.*

### Exemple 11.1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x + 1}{2x + 1}$$

et  $D$  la droite d'équation  $y = -x + 3$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**REMARQUE 11.1.** Pour étudier la position de la courbe représentant  $f$  par rapport à son asymptote, il suffit d'étudier le signe de  $\varphi(x) = f(x) - (ax + b)$ .

### Exercice 11.1

Reprendre l'exemple précédent et étudier les positions relatives de la courbe représentant  $f$  et de son asymptote.

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exemple 11.2**

$$f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

- $\mathcal{C}_f$  admet-elle une droite comme asymptote en  $+\infty$  ?
- Justifier.

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exemple 11.3**

$$f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1} + 2x$$

- Déterminer  $D_f$  ;
- Prouver que la droite  $d: y = 3x$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  ;
- $\mathcal{C}_f$  admet-elle une asymptote oblique en  $-\infty$  ? (attendre ce qui suit pour répondre à cette question)

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

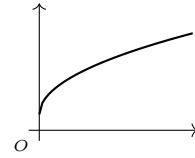
## 2. Branches paraboliques

### 2.1. Branche parabolique de direction $(Ox)$

#### Définition 11.1 — Branche parabolique de direction $(Ox)$

On dit que  $\mathcal{C}_f$  présente une *branche parabolique de direction asymptotique  $(Ox)$*  en  $+\infty$  si :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$  ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  ;

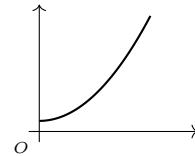


### 2.2. Branche parabolique de direction $(Oy)$

#### Définition 11.2 — Branche parabolique de direction $(Oy)$

On dit que  $\mathcal{C}_f$  présente une *branche parabolique de direction asymptotique  $(Oy)$*  en  $+\infty$  si :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$  ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$  ;

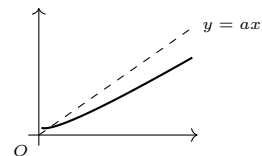


### 2.3. Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$

#### Définition 11.3 — Branche parabolique de direction $y = ax$

On dit que  $\mathcal{C}_f$  présente une *branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation  $y = ax$*  en  $+\infty$  si :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$  ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$  ;



## 3. Convexité – Point d'inflexion

### 3.1. Notion de convexité, de concavité

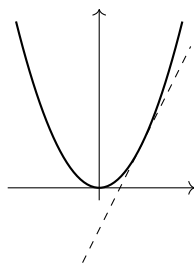
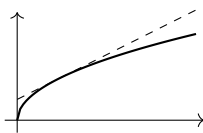
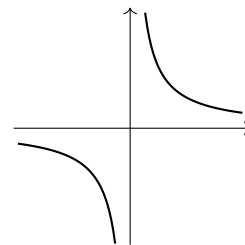
#### Définition 11.4 — Convexité, concavité

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère.

- On dit que  $f$  est *convexe* sur  $I$  si, sur l'intervalle  $I$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que  $f$  est *concave* sur  $I$  si, sur l'intervalle  $I$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

**Exemple 11.4**

1. La fonction carrée  $x \mapsto x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  (voir figure 1).
2. La fonction racine carrée  $x \mapsto \sqrt{x}$  est concave sur  $[0; +\infty[$  (voir figure 2).
3. La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est concave sur  $] -\infty; 0[$  et convexe sur  $]0; +\infty[$  (voir figure 3).

**Fig. 1** – La fonction carrée**Fig. 2** – La fonction racine carrée**Fig. 3** – La fonction inverse

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

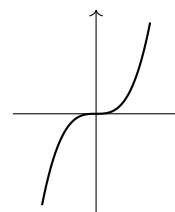
**3.2. Point d'inflexion****Définition 11.5 — Point d'inflexion**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ ,  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère et  $a \in I$ .

On dit que le point  $A(a; f(a))$  est un *point d'inflexion* de  $\mathcal{C}$  si, en  $A$ , la courbe  $\mathcal{C}$  traverse sa tangente.

**Exemple 11.5**

La fonction cube  $x \mapsto x^3$  admet un point d'inflexion en l'origine  $O$  du repère (voir figure 4). Elle est concave sur  $] -\infty; 0]$  et convexe sur  $[0; +\infty[$ .

**Figure 4** – La fonction cube

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

**REMARQUE 11.2.** En l'abscisse  $a$  du point d'inflexion, la courbe  $\mathcal{C}$  passe de concave à convexe ou de convexe à concave.

### 3.3. Convexité et opérations

#### Propriété 11.1

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables et convexes sur un intervalle  $I$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- La fonction  $f + g$  est convexe sur  $I$ .
- Si  $\lambda > 0$ , la fonction  $\lambda f$  est convexe sur  $I$ .
- Si  $\lambda < 0$ , la fonction  $\lambda f$  est concave sur  $I$ .

#### Propriété 11.2

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables et concaves sur un intervalle  $I$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- La fonction  $f + g$  est concave sur  $I$ .
- Si  $\lambda > 0$ , la fonction  $\lambda f$  est concave sur  $I$ .
- Si  $\lambda < 0$ , la fonction  $\lambda f$  est convexe sur  $I$ .

## 4. Convexité et dérivées

### 4.1. Convexité et sens de variation de $f'$

#### Théorème 11.1 — admis

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est croissante sur  $I$ .
- $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est décroissante sur  $I$ .

### 4.2. Convexité et signe de $f''$

#### Définition 11.6 — Dérivée seconde

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Si la dérivée  $f'$  de  $f$  est elle aussi dérivable sur  $I$ , on dit que  $f$  est *deux fois dérivable* sur  $I$  et on note  $f''$  la dérivée de  $f'$  sur  $I$ .

$f''$  est appelée *dérivée seconde* de  $f$ .

#### Exemple 11.6

$$f(x) = 3x^2 - 3x + 1$$

----- CORRECTION -----

#### Théorème 11.2

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f''$  est positive sur  $I$ .

–  $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si  $f''$  est négative sur  $I$ .

### 4.3. Point d'inflexion et dérivée seconde

#### Théorème 11.3 — admis

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  admet un point d'inflexion au point  $A(a; f(a))$  si et seulement si  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $a$ .

## 5. Axe et centre de symétrie d'une représentation graphique de fonction

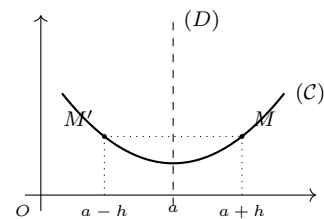
Soit  $f$  une fonction définie sur l'ensemble  $D_f$  et qui est représentée graphiquement dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  par une courbe  $(\mathcal{C})$ .

### 5.1. Axe de symétrie

#### Propriété 11.3 — Axe de symétrie

La droite  $(D)$  d'équation  $x = a$  est axe de symétrie de  $(\mathcal{C})$  si et seulement si, pour tout  $M \in (\mathcal{C})$ , son symétrique  $M'$  par rapport à  $(D)$  appartient aussi à  $(\mathcal{C})$ . On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous :

- Pour tout  $x \in D_f$ , on a :  $2a - x \in D_f$  et  $f(2a - x) = f(x)$
- Pour tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $a + h \in D_f$ , on a :  $a - h \in D_f$  et  $f(a + h) = f(a - h)$



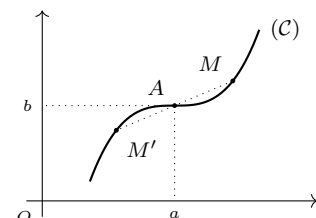
Dans le cas particulier où  $a = 0$ , on retrouve la propriété du graphique d'une fonction paire : axe de symétrie : axe des ordonnées.

### 5.2. Centre de symétrie

#### Propriété 11.4 — Centre de symétrie

Le point  $A$  de coordonnées  $(a; b)$  est centre de symétrie de  $(\mathcal{C})$  si et seulement si, pour tout  $M \in (\mathcal{C})$ , son symétrique  $M'$  par rapport à  $A$  appartient aussi à  $(\mathcal{C})$ . On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous :

- Pour tout  $x \in D_f$ , on a :  $2a - x \in D_f$  et  $f(2a - x) + f(x) = 2b$
- Pour tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $a + h \in D_f$ , on a :  $a - h \in D_f$  et  $f(a + h) + f(a - h) = 2b$



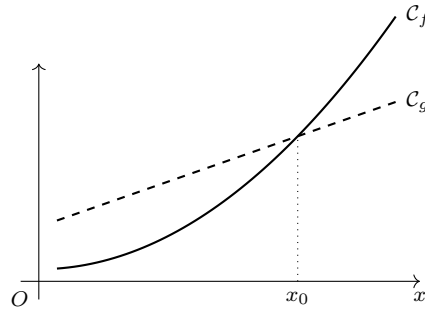
Dans le cas particulier où  $a = b = 0$ , on retrouve la propriété du graphique d'une fonction impaire : centre de symétrie : origine  $O$  du repère.

## 6. Position relative de deux courbes

### 6.1. Principe

On considère deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur leurs ensembles de définition. Soient  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  leurs courbes représentatives respectives. On suppose que ces courbes ont des points d'intersection.

Par exemple :



Soit  $x_0$  l'abscisse du point d'intersection.

Graphiquement, on voit que :

- pour  $x = x_0$ , il y a intersection.
- pour  $x < x_0$ , la courbe de  $f$  est en dessous de celle de  $g$
- pour  $x > x_0$ , la courbe de  $f$  est au-dessus de celle de  $g$

On peut dire également que :

- pour  $x = x_0$ ,  $f(x) = g(x)$
- pour  $x < x_0$ ,  $f(x) < g(x)$
- pour  $x > x_0$ ,  $f(x) > g(x)$

En fait, on doit « prévoir » par le calcul ce positionnement relatif des deux courbes.

Ceci revient donc à comparer les expressions  $f(x)$  et  $g(x)$ .

Or en mathématiques, on utilise le principe suivant :

« pour comparer deux nombres, on étudie le signe de leur différence »

#### Méthode 11.1 — Position relative de deux courbes

Par conséquent, pour étudier la position relative de deux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , on étudie le signe de la différence  $f(x) - g(x)$ .

- Dans le cas où  $f(x) - g(x) > 0$ , on en déduit que  $f(x) > g(x)$  et par conséquent  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_g$
- Dans le cas où  $f(x) - g(x) < 0$ , on en déduit que  $f(x) < g(x)$  et par conséquent  $\mathcal{C}_f$  est au-dessous de  $\mathcal{C}_g$
- Dans le cas où  $f(x) - g(x) = 0$ , il y a intersection

## 6.2. Exemple

**Exemple 11.7**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \boxed{\text{passage illisible dans la source : expression de } f}$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \boxed{\text{passage illisible dans la source : expression de } g}$  et  $\mathcal{C}_g$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Étudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CHAPITRE

# 12

---

## Vecteurs de l'espace

---

### Sommaire du chapitre

---

|   |                                     |     |
|---|-------------------------------------|-----|
| 1 | Colinéarité, applications . . . . . | 100 |
| 2 | Coplanarité . . . . .               | 101 |

Passage illisible dans la source (page 191 du livre) : les paragraphes 1.1 et 1.2 de ce chapitre ne sont pas restitués par le fichier fourni. Ils n'ont pas été reconstitués ; le cours reprend ci-dessous au paragraphe 1.3 du livre.

## 1. Colinéarité, applications

### Définition 12.1 — Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont *colinéaires* si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel  $k$  (c'est-à-dire  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$ ).

### Propriété 12.1

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont même direction.

### Propriété 12.2 — Applications

- Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.
- Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

### Exercice 12.1

Soit  $ABCD$  un tétraèdre et  $K$ ,  $L$  et  $M$  les points de l'espace définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

1. Faire une figure.
2. Sur quelle face du tétraèdre se situe le point  $K$  ? le point  $L$  ?
3. (a) Montrer que les droites  $(KL)$  et  $(BD)$  sont parallèles.  
 (b) Montrer que  $K$ ,  $M$  et  $B$  sont alignés.  
 (c) Montrer que  $L$ ,  $M$  et  $D$  sont alignés.  
 (d) Que peut-on en déduire pour les points  $M$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $B$  et  $D$  ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 2. Coplanarité

### Définition 12.2 — Coplanarité

1. On dit que quatre points  $A, B, C$  et  $D$  de l'espace sont *coplanaires* s'ils sont dans un même plan.
2. Soit  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace.  
Il existe quatre points  $A, B, C$  et  $D$  de l'espace tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ .  
On dit que les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont *coplanaires* si et seulement si les quatre points  $A, B, C$  et  $D$  le sont.

REMARQUE 12.1. Si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires, les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles et, donc, les points  $A, B, C$  et  $D$  sont coplanaires.

### Théorème 12.1 — admis

1. Soit  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace, tels que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne soient pas colinéaires.  
Alors, les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

2. Soit  $A, B, C$  et  $D$  quatre points de l'espace, tels que  $A, B$  et  $C$  ne soient pas alignés.  
Alors, les points  $A, B, C$  et  $D$  sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

CHAPITRE

# 13

## Droites et plans dans l'espace

### Sommaire du chapitre

|          |                                                                  |     |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>1</b> | Repérage dans l'espace . . . . .                                 | 103 |
| 1.1      | Définition – Coordonnées . . . . .                               | 103 |
| 1.2      | Calcul sur les coordonnées . . . . .                             | 104 |
| 1.3      | Colinéarité, coplanarité . . . . .                               | 105 |
| <b>2</b> | Distance, orthogonalité . . . . .                                | 107 |
| 2.1      | Distance entre deux points dans un repère orthonormé . . . . .   | 107 |
| 2.2      | Relation d'orthogonalité de deux vecteurs . . . . .              | 107 |
| <b>3</b> | Représentations paramétriques d'une droite de l'espace . . . . . | 108 |
| 3.1      | Définition . . . . .                                             | 108 |
| <b>4</b> | Équation cartésienne d'un plan . . . . .                         | 109 |
| <b>5</b> | Les positions relatives de droites et de plans . . . . .         | 111 |
| 5.1      | Intersection d'une droite et d'un plan . . . . .                 | 111 |
| 5.2      | Intersection de deux droites . . . . .                           | 112 |
| 5.3      | Intersection de deux plans . . . . .                             | 113 |

## 1. Repérage dans l'espace

### 1.1. Définition – Coordonnées

#### Définition 13.1 — Repère de l'espace

On appelle *repère de l'espace* tout quadruplet  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  où  $O$  est un point de l'espace et où  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont trois vecteurs non coplanaires.

Si les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont deux à deux orthogonaux, le repère est dit *orthogonal*.

Si, de plus, les vecteurs sont unitaires ( $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ ), on dit que le repère est *orthonormal*.

#### Exemple 13.1

1. Dans le cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1 (voir figure 3), le quadruplet  $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$  forme un repère orthonormé.
2. Dans un tétraèdre  $ABCD$  (voir figure 4), le quadruplet  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$  est un repère (quelconque).

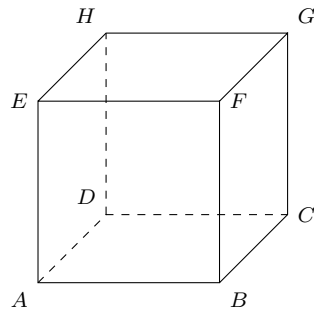


Fig. 3 – Un cube

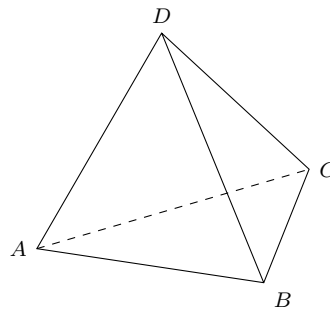


Fig. 4 – Un tétraèdre

----- CORRECTION -----

#### Théorème 13.1 — admis

Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  un repère de l'espace.

1. Soit  $M$  un point de l'espace.

Il existe un unique triplet  $(x; y; z)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  (voir figure 5).  
Ce triplet est appelé coordonnées de  $M$ . On note  $M(x; y; z)$ .

2. Soit  $\vec{u}$  un vecteur de l'espace.

Il existe un unique triplet  $(a; b; c)$  tel que  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ .

Ce triplet est appelé coordonnées de  $\vec{u}$ . On note  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

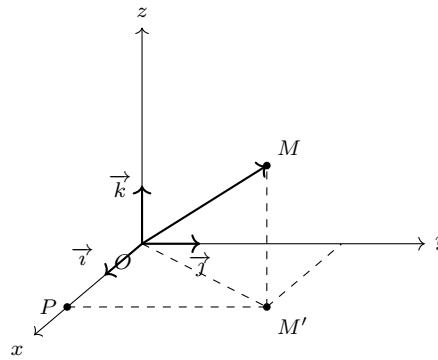


Fig. 5 — Coordonnées dans un repère de l'espace

REMARQUE 13.1.  $x$  est appelé *abscisse*,  $y$  est appelé *ordonnée* et  $z$  est appelé *cote*.

## 1.2. Calcul sur les coordonnées

Les résultats sont identiques à ceux du plan.

### Propriété 13.1 — Calcul sur les coordonnées

On a, par exemple :

– Si  $A(x_A; y_A; z_A)$  et si  $B(x_B; y_B; z_B)$  alors :

– les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

– les coordonnées du milieu  $I$  du segment  $[AB]$  sont :  $I \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

– Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et si  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  alors :

– les coordonnées de  $\vec{u} + \vec{v}$  sont :  $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix}$

– Si  $k$  est un réel, les coordonnées du vecteur  $k\vec{u}$  sont :  $k\vec{u} \begin{pmatrix} k \times a \\ k \times b \\ k \times c \end{pmatrix}$

### Exercice 13.1

Soit  $A(3; 1; 5)$  et  $B(0; 5; 4)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

1. Placer ces points dans le repère.
2. Calculer les coordonnées du milieu  $I$  de  $[AB]$  et du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
3. Quelles sont les coordonnées du point  $M$  de la droite  $(AB)$  dont la cote est 2 ?

---

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 1.3. Colinéarité, coplanarité

#### Méthode 13.1 — Colinéarité, coplanarité

- Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$ .
- Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  (tels que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non colinéaires) sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ .

Il s'agit donc, grâce aux coordonnées des vecteurs, de trouver ces réels pour montrer la colinéarité ou la coplanarité.

**REMARQUE 13.2.** Dans l'espace, il n'existe pas de propriété simple équivalente à celle des « produits en croix » de coordonnées pour des vecteurs colinéaires du plan.

#### Définition 13.2 — Déterminant de trois vecteurs

On appelle déterminant des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  le déterminant :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

#### Propriété 13.2 — Déterminant et coplanarité

- $\vec{w}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ssi  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$
- $A, B, C, D$  coplanaires ssi  $\overrightarrow{AD}$  est une combinaison linéaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  donc ssi  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$ .

### Propriété 13.3 — Colinéarité de deux vecteurs

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère de l'espace.

Deux vecteurs  $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$  et  $\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$  sont colinéaires si et seulement si

$$d_x = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad d_y = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = x_u z_v - z_u x_v = 0 \quad \text{et} \quad d_z = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v = 0$$

### Exercice 13.2 — Exercice résolu

Dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de l'espace, on considère les points :

$$A(4;0;0) \quad B(0;3;0) \quad C(0;0;6) \quad \text{et} \quad M\left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

On note  $I$  le milieu de  $[AC]$  et  $L$  le point tel que  $3\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC}$ .

1. Déterminer les coordonnées de  $I$  et de  $L$ .
2. Montrer que les points  $A$ ,  $M$  et  $L$  sont alignés.
3. Montrer que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $M$  sont coplanaires.

.....

## 2. Distance, orthogonalité

### 2.1. Distance entre deux points dans un repère orthonormé

#### Propriété 13.4 — Norme et distance

On se place dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé.

1. Si le vecteur  $\vec{u}$  a comme coordonnées  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , alors sa norme est :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
2. Si  $A(x_A; y_A; z_A)$  et si  $B(x_B; y_B; z_B)$  alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

DÉMONSTRATION (DU 1.). Soit  $M$  le point de l'espace tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ . On pourra se reporter à la figure 5.

Le repère étant orthonormal, le triangle  $OMM'$  est rectangle en  $M'$ . D'après le théorème de Pythagore, on a :  $OM^2 = OM'^2 + MM'^2$ .

Or,  $MM' = c\vec{k}$  donc  $MM'^2 = c^2$ .

De plus, le triangle  $OPM'$  est rectangle en  $P$ , donc :  $OM'^2 = OP^2 + PM'^2$ .

Or,  $\overrightarrow{OP} = a\vec{i}$  donc  $OP^2 = a^2$  et  $\overrightarrow{PM'} = b\vec{j}$  donc  $PM'^2 = b^2$ .

On obtient donc :  $OM^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .

Donc,  $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . □

REMARQUE 13.3. La deuxième partie de la propriété se prouve en remarquant simplement que

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| \text{ et que } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

### 2.2. Relation d'orthogonalité de deux vecteurs

#### Propriété 13.5 — admise

On se place dans un repère orthonormé.

Les vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  sont orthogonaux si et seulement si :  $aa' + bb' + cc' = 0$

### 3. Représentations paramétriques d'une droite de l'espace

#### 3.1. Définition

On se place dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de l'espace.

Soit  $D$  une droite passant par un point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

$M(x; y; z)$  est un point de  $D$  si et seulement s'il existe un réel  $t$  tel que  $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ .

En passant aux coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

#### Définition 13.3 — Représentation paramétrique d'une droite

On appelle *représentation paramétrique* ou *système d'équations paramétriques* de la droite  $D$  passant par un point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  le système :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Le réel  $t$  est appelé *paramètre*.

#### REMARQUES 13.4.

1. Un point  $M$  est sur  $D$  si et seulement s'il existe un réel  $t$  tel que les coordonnées de  $M$  vérifient le système d'équations paramétriques de  $D$ .

2. Réciproquement, si la droite  $\Delta$  admet comme équation paramétrique  $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$ , cette droite passe par le point  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  et admet comme vecteur directeur  $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ .

3. Pour obtenir une représentation paramétrique du segment  $[AB]$ , il suffit de prendre comme vecteur directeur  $\overrightarrow{AB}$ , comme point de la droite le point  $A$  et de prendre  $t \in [0; 1]$ .
4. Pour obtenir une représentation paramétrique de la demi-droite  $[AB)$ , il suffit de prendre comme vecteur directeur  $\overrightarrow{AB}$ , comme point de la droite le point  $A$  et de prendre  $t \in [0; +\infty[$ .

## 4. Équation cartésienne d'un plan

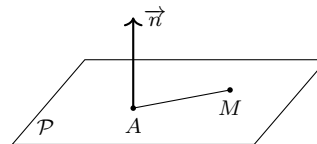
### Définition 13.4 — Vecteur normal à un plan

Un *vecteur normal*  $\vec{n}$  à un plan  $\mathcal{P}$  est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à  $\mathcal{P}$ .

Soit  $A$  un point d'un plan  $\mathcal{P}$  et  $\vec{n}$  un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ .

On a, pour tout point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$ ,  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Réciproquement, si  $M$  est un point de l'espace tel que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ , alors  $M \in \mathcal{P}$ . On a donc le résultat suivant :



### Propriété 13.6 — Caractérisation d'un plan $\mathcal{P}$

Le plan  $\mathcal{P}$  qui passe par  $A$  et qui est orthogonal à  $\vec{n}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

### Exercice 13.3 — Exercice 1

Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on donne  $A(1; 2; 3)$  et  $\vec{n}(1; -3; 1)$ . Trouver une équation du plan  $\mathcal{P}$  qui passe par  $A$  et qui est orthogonal à  $\vec{n}$ .

----- CORRECTION -----

### Théorème 13.2 — Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tout plan  $\mathcal{P}$  admet une équation (dite *cartésienne*) de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec  $a, b, c$  réels non tous nuls et  $d$  réel.

De plus le vecteur  $\vec{n}(a; b; c)$  est normal à  $\mathcal{P}$ .

PREUVE. Notons  $A(x_0; y_0; z_0)$  un point de  $\mathcal{P}$  et  $\vec{n}(a; b; c)$  un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ , alors on a :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

i.e.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

En posant  $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$  on obtient le résultat désiré. □

### REMARQUES 13.5.

- Notons que l'équation d'un plan n'est pas unique. En effet si  $\mathcal{P} : x + y + z = 1$  alors  $\mathcal{P}$  a aussi pour équation  $2x + 2y + 2z = 2$ .

– Quelques cas particuliers :

Le plan  $(Oxy)$  a pour équation  $z = 0$ , en effet  $O(0;0;0) \in (Oxy)$  et  $\vec{k}(0;0;1)$  est normal à ce plan, ainsi :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = 0 \iff z = 0$$

De la même manière les plans  $(Oxz)$  et  $(Oyz)$  ont respectivement pour équation  $y = 0$  et  $x = 0$ .

Enfin le plan  $\mathcal{P}$  passant par les points  $A(a;0;0)$ ,  $B(0;b;0)$  et  $C(0;0;c)$  a pour équation :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (\text{plan } (ABC)).$$

### Exercice 13.4 — Exercice 2

On donne les équations cartésiennes de deux plans :

$$\mathcal{P} : x - 4y + 7 = 0 \qquad \mathcal{Q} : x + 2y - z + 1 = 0$$

1. Montrer que ces plans sont sécants. On note  $d$  leur droite d'intersection.
2. Déterminer un vecteur directeur de  $d$ .

----- CORRECTION -----

### Théorème 13.3 — Plans orthogonaux, plans parallèles

Deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.  
Deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

### Corollaire 13.7

Soit deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  d'équations

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

1.  $\mathcal{P} // \mathcal{Q} \iff (a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  sont proportionnels.
2.  $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q} \iff aa' + bb' + cc' = 0$ .

PREUVE.

1.  $\mathcal{P} // \mathcal{Q} \iff \vec{n}(a; b; c) = k \vec{n}'(a'; b'; c')$
2.  $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q} \iff \vec{n} \perp \vec{n}' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \iff aa' + bb' + cc' = 0$

□

**Exercice 13.5 — Exercice 3**Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle au plan  $(xOy)$  ?

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

**Exercice 13.6 — Exercice 4**Quelle est l'équation générale d'un plan perpendiculaire au plan  $(xOy)$  ?

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

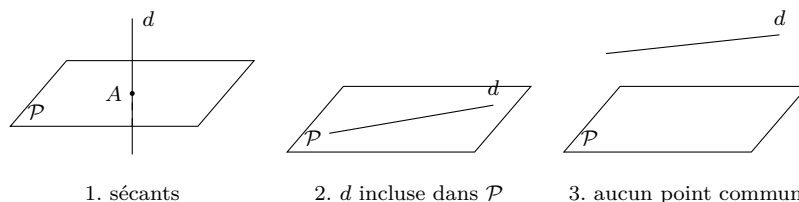
**5. Les positions relatives de droites et de plans****5.1. Intersection d'une droite et d'un plan**

Considérons un plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  et une droite  $d$  dont on connaît une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Il n'existe que trois possibilités :

1. la droite et le plan n'ont qu'un point commun, la droite et le plan sont dits sécants,
2. la droite est incluse dans le plan,
3. la droite et le plan n'ont aucun point commun.



C'est le premier cas qui nous intéresse, pour cela supposons que le vecteur normal  $\vec{n}(a; b; c)$  au plan  $\mathcal{P}$  et le vecteur directeur  $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$  ne sont pas orthogonaux (comme dans les cas deux et trois), ainsi  $\mathcal{P}$  et  $d$  sont sécants en un point  $A$ .

On cherche alors les coordonnées de  $A$  en résolvant l'équation suivante (d'inconnue  $t$ ) :

$$a(\alpha t + x_0) + b(\beta t + y_0) + c(\gamma t + z_0) + d = 0$$

i.e. (en factorisant par  $t$ ) :

$$t(a\alpha + b\beta + c\gamma) = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$$

Comme on a supposé  $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$ , on peut diviser par  $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$  et on obtient :

$$t = \frac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

Finalement, en remplaçant dans le système de représentation paramétrique de  $d$ , on trouve les coordonnées de  $A$ . Mais observons sur un exemple...

### Exercice 13.7

Soit  $\mathcal{P} : 2x - z = 0$  et  $d : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -3t \\ z = 2 \end{cases}$  où  $t \in \mathbb{R}$ .

Déterminer les coordonnées du point  $A = \mathcal{P} \cap d$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

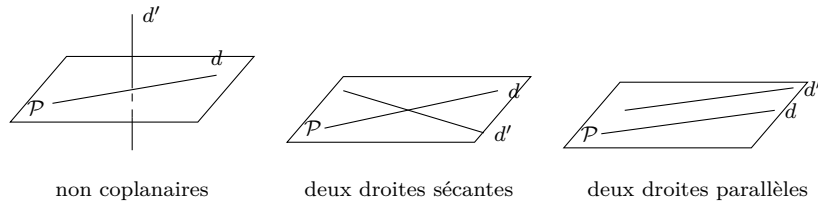
## 5.2. Intersection de deux droites

On donne deux droites  $d$  et  $d'$  dont on connaît les représentations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \qquad d' : \begin{cases} x = \alpha' t' + x_1 \\ y = \beta' t' + y_1 \\ z = \gamma' t' + z_1 \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}$$

$d$  et  $d'$  sont deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

1. il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites *non coplanaires*,
2. il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites *coplanaires* (elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan).



On résout alors le système (qui peut ne pas avoir de solutions) (d'inconnues  $t$  et  $t'$ ) :

$$\begin{cases} \alpha t + x_0 = \alpha' t' + x_1 \\ \beta t + y_0 = \beta' t' + y_1 \\ \gamma t + z_0 = \gamma' t' + z_1 \end{cases}$$

### Exercice 13.8

On donne  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(0; -1; 1)$ ,  $C(3; -2; 0)$  et  $D(2; -3; 3)$ .

Étudier l'intersection des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

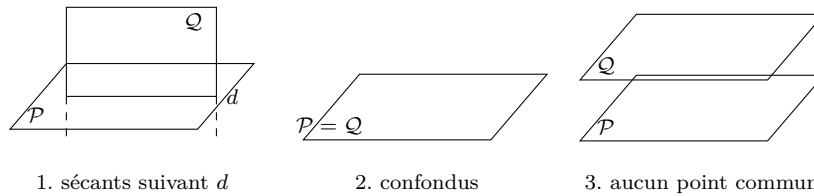
### 5.3. Intersection de deux plans

On considère deux plans sécants  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{Q} : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

1. les plans ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point, (ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points)
2. les plans sont confondus,
3. ils n'ont aucun point commun.



Lorsque les deux plans sont sécants, on peut alors récupérer le système de représentation paramétrique de la droite d'intersection en utilisant une des trois coordonnées comme paramètre et en résolvant le système.

### Exercice 13.9

Donner une représentation paramétrique de la droite  $d$  définie, intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  d'équations respectives :

$$\mathcal{P} : 2x + y - z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} : x + 3y + 7z - 11 = 0$$

----- CORRECTION -----

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....