

CHAPITRE 1

Notions de logique

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

Cours et applications / Année scolaire 2026–2027

Objectifs

Lire et nier une proposition, utiliser les quantificateurs et choisir une méthode de démonstration adaptée.

Parcours du chapitre

I	Propositions et connecteurs logiques	2
1	Proposition et valeur de vérité	2
2	Négation, conjonction et disjonction	2
3	Implication et équivalence	3
4	Lois logiques utiles	4
II	Quantificateurs	4
1	Quantificateurs universel et existentiel	4
2	Négation d'une proposition quantifiée	5
3	Ordre des quantificateurs	6
III	Méthodes de raisonnement	6
1	Raisonnement direct	6
2	Raisonnement par équivalences	7
3	Raisonnement par contraposée	7
4	Raisonnement par l'absurde	8
5	Raisonnement par disjonction des cas	9
6	Réfutation par contre-exemple	9
7	Raisonnement par récurrence	10
IV	Entraînement et synthèse	10
1	Exercices de consolidation	11
2	L'essentiel à retenir	13

Conventions : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Les parties pointillées sont réservées à la rédaction des corrections.

I. Propositions et connecteurs logiques

1. Proposition et valeur de vérité

Définition

Une **proposition** est un énoncé auquel on attribue une seule valeur de vérité : **vrai (V)** ou **faux (F)**.

Exemple. $2 + 3 = 5$ est vraie ; $7 < 4$ est fausse. L'énoncé $x^2 = 4$ dépend de x : on le note $P(x)$. Il devient une proposition lorsque x est fixé ou quantifié.

2. Négation, conjonction et disjonction

a) Négation

Définition

La négation de P , notée $\text{non } P$ ou $\neg P$, est vraie exactement lorsque P est fausse.

Exemple. La négation de $x < 2$ est $x \geq 2$; celle de $x = 2$ est $x \neq 2$.

b) Conjonction et disjonction

Définition

P **et** Q , notée $P \wedge Q$, est vraie lorsque les deux propositions sont vraies.

P **ou** Q , notée $P \vee Q$, est vraie lorsqu'au moins l'une des deux est vraie. Le **ou** mathématique est **inclusif**.

P	Q	$\text{non } P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Application 1 | Lire les connecteurs

Déterminer la valeur de vérité de chaque proposition.

- $(7 < 5 \text{ et } 2 + 1 = 3) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$.
- $(2^2 = 4) \text{ ou } (5 < 1)$.
- $\text{non}((3 \in \mathbb{N}) \text{ et } (3 < 0))$.

Correction

.....

.....

.....

3. Implication et équivalence

a) Implication, réciproque et contraposée

Définition

L'implication $P \Rightarrow Q$ se lit si P , alors Q . Elle est **fausse uniquement** lorsque P est vraie et Q est fausse.

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\text{non } P \text{ ou } Q).$$

La **réciproque** est $Q \Rightarrow P$. La **contraposée** est $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$.

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ est vraie. La réciproque est fausse : $x = -2$ est un contre-exemple. La contraposée $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$ est vraie.

b) Équivalence

Définition

$P \Leftrightarrow Q$ signifie $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$. Elle est vraie lorsque P et Q ont la **même valeur de vérité**.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 2)$.

Application 2 | Distinguer implication et équivalence

- Donner la valeur de vérité de $(7 < 5 \Rightarrow 2 + 1 = 0)$.
- L'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ est-il vrai ? Justifier.
- Écrire la réciproque et la contraposée de $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$.

Correction

.....

.....

.....

.....

4. Lois logiques utiles

Équivalences fondamentales

$$\begin{aligned}\text{non}(\text{non } P) &\Leftrightarrow P, \\ \text{non}(P \text{ et } Q) &\Leftrightarrow (\text{non } P \text{ ou } \text{non } Q), \\ \text{non}(P \text{ ou } Q) &\Leftrightarrow (\text{non } P \text{ et } \text{non } Q), \\ \text{non}(P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (P \text{ et } \text{non } Q), \\ (P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P).\end{aligned}$$

Les deuxième et troisième lignes sont les **lois de De Morgan**.

Commutativité et distributivité

$$\begin{aligned}(P \text{ et } Q) &\Leftrightarrow (Q \text{ et } P), \\ (P \text{ ou } Q) &\Leftrightarrow (Q \text{ ou } P), \\ P \text{ et } (Q \text{ ou } R) &\Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R), \\ P \text{ ou } (Q \text{ et } R) &\Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R).\end{aligned}$$

Application 3 | Nier une proposition composée

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, écrire la négation de chacun des énoncés :

1. $x \geq 1$ et $x < 5$.
2. $x = 0$ ou $x = 3$.
3. $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

Correction

.....

.....

.....

.....

II. Quantificateurs

1. Quantificateurs universel et existentiel

Définition

$\forall x \in E, P(x)$: il pour tout x de E , $P(x)$ est vraie.

$\exists x \in E, P(x)$: il existe au moins un x de E tel que $P(x)$ est vraie.

$\exists! x \in E, P(x)$ signifie qu'il existe un **unique** élément vérifiant P .

Exemple. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est vraie. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ est fausse. $\exists! x \in \mathbb{R}, 2x = 6$ est vraie, car $x = 3$ est l'unique solution.

Application 4 | Traduire en langage symbolique

1. Le carré de tout réel est positif ou nul.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
4. Il existe un entier naturel strictement plus grand que tous les entiers naturels.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Application 5 | Traduire en français et décider

Traduire chaque proposition, puis donner sa valeur de vérité en justifiant.

$$P : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y \quad Q : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

2. Négation d'une proposition quantifiée**Propriété**

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \text{non } P(x),$$

$$\text{non}(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \text{non } P(x).$$

Pour nier plusieurs quantificateurs : échanger $\forall$ et $\exists$, **garder leur ordre** et nier la propriété finale.

Exemple. La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, x + y > 10$ est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, x + y \leq 10$.

Application 6 | Négation et valeur de vérité

Donner la négation et la valeur de vérité de chaque proposition initiale.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 9 = 0$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n < m$.
5. $\exists x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Ordre des quantificateurs

L'ordre change le sens

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ est **vraie** : choisir $y = 1 - x$.

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y > 0$ est **fausse** : pour tout y fixé, $x = -y$ donne $x + y = 0$.

Dans le premier énoncé, y peut dépendre de x . Dans le second, le même y doit convenir à tous les x .

III. Méthodes de raisonnement

1. Raisonnement direct

Méthode

Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, supposer P vraie, puis établir Q .

Exemple. Si $a, b \in \mathbb{Q}$, écrire $a = p/q$ et $b = r/s$, avec $p, r \in \mathbb{Z}$ et $q, s \in \mathbb{N}^*$. Alors $a + b = (ps + rq)/(qs) \in \mathbb{Q}$.

Application 7 | Encadrer une moyenne

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Montrer que $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$.

Correction

.....

.....

.....

2. Raisonnement par équivalences**Méthode**

Transformer l'énoncé par des étapes **réversibles**. Préciser les conditions de définition et contrôler les signes avant d'élever au carré.

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, $8 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow -4x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Application 8 | Résoudre par équivalences

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^3 - x^2 = 0$.
2. Montrer que, pour $x \geq \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x = 1$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

3. Raisonnement par contraposée**Méthode**

Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, démontrer $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$.

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrons que n^2 pair implique n pair. Si n est impair, $n = 2k + 1$; alors $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair. La contraposée est établie.

Application 9 | Utiliser une égalité contraire

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Montrer que $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$.
2. Soient $x, y > 1$. Montrer que $x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Raisonnement par l'absurde**Méthode**

Supposer la conclusion fautive et obtenir une contradiction. Pour $P \Rightarrow Q$, supposer P vraie et Q fautive.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\frac{n+3}{n+5} = 1$, alors $n+3 = n+5$, donc $3 = 5$, contradiction. Ainsi $\frac{n+3}{n+5} \neq 1$.

Application 10 | Faire apparaître une contradiction

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\sqrt{1+x^2} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$.
2. Montrer que le système suivant n'admet aucune solution réelle :

$$\begin{cases} 2x - 3z > 3, \\ 3y - 2x \geq 3, \\ y - z \leq 2. \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Raisonnement par disjonction des cas

Méthode

Partager les possibilités en cas qui couvrent toute la situation, puis traiter chaque cas.

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, si n est pair, $n(n+1)$ est pair ; si n est impair, $n+1$ est pair, donc $n(n+1)$ est encore pair.

Application 11 | Distinguer les cas

1. Résoudre $|x - 5| = 2$ selon le signe de $x - 5$.
2. Discuter, suivant $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions réelles de $x^2 = m$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

6. Réfutation par contre-exemple

Méthode

Pour réfuter $\forall x \in E, P(x)$, trouver **un** élément $x_0 \in E$ pour lequel $P(x_0)$ est fausse. Quelques exemples favorables ne prouvent pas un énoncé universel.

Exemple. L'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$ est faux : $x = -3$ vérifie $x < 2$ mais $x^2 = 9 > 4$.

Application 12 | Trouver un contre-exemple

Montrer que chacun des énoncés suivants est faux.

1. Tous les entiers naturels sont pairs.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 = n^2 + 1$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 1$ est premier.

Correction

.....

.....

.....

.....

7. Raisonnement par récurrence

Les trois étapes

Pour établir $P(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : fixer $n \geq n_0$, supposer $P(n)$ vraie et démontrer $P(n+1)$.
3. **Conclusion** : conclure par récurrence pour tout $n \geq n_0$.

Exemple. Démontrons que $2^n > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $2^0 = 1 > 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $2^n > n$. Comme $2^n \geq 1$, on a $2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n \geq n + 1$.

Conclusion : par récurrence, $2^n > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Application 13 | Somme des premiers entiers

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

IV. Entraînement et synthèse

1. Exercices de consolidation

Exercice 1 | Tables de vérité

1. À l'aide d'une table de vérité, vérifier $\neg(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q)$.
2. Le ou exclusif est vrai lorsqu'une seule des deux propositions est vraie. Construire sa table de vérité.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 2 | Choisir une méthode

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3 | S'entraîner à la récurrence

Démontrer les propriétés suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ est divisible par 3.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4 | Approfondissement

1. Soient $0 \leq a \leq b$. Montrer que $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
2. Soient $a, b \geq 0$. Montrer par l'absurde que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$.
3. On admet que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$, montrer que $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
4. Fixons $x \geq 0$. Montrer par récurrence que $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. L'essentiel à retenir

Réflexes de rédaction

- **Nier** : échanger $\forall/\exists$, et/ou ; nier la propriété.
- **Implication** : un seul cas faux, hypothèse vraie et conclusion fausse.
- **Équivalence** : vérifier les deux sens ou utiliser des étapes réversibles.
- **Existence** : produire un exemple ; **énoncé universel faux** : un contre-exemple suffit.
- **Contraposée** : nier et inverser ; ne pas confondre avec la réciproque.
- **Récurrence** : initialisation, hérédité, conclusion.

Sources de travail : *1 logique.pdf* (série d'exercices) et *1 logique-mathematique-cours-3.pdf* (cours signé A. Afaadas).
Contenu reformulé, regroupé et adapté.