

## CHAPITRE 2

# Généralités sur les fonctions numériques

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

Cours et applications / Année scolaire 2026–2027

## Objectifs

Déterminer un domaine, étudier les propriétés d'une fonction, composer des fonctions et exploiter leurs représentations graphiques.

## Parcours du chapitre

|            |                                                  |           |
|------------|--------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Premiers concepts</b>                         | <b>2</b>  |
| 1          | Fonction, image et antécédent                    | 2         |
| 2          | Domaine de définition                            | 2         |
| 3          | Courbe représentative                            | 3         |
| <b>II</b>  | <b>Variations et bornes</b>                      | <b>4</b>  |
| 1          | Sens de variation                                | 4         |
| 2          | Minimum et maximum                               | 4         |
| 3          | Fonction majorée, minorée et bornée              | 5         |
| <b>III</b> | <b>Symétries, comparaison et image</b>           | <b>6</b>  |
| 1          | Parité                                           | 6         |
| 2          | Périodicité                                      | 7         |
| 3          | Signe et position relative                       | 7         |
| 4          | Image d'un intervalle                            | 8         |
| <b>IV</b>  | <b>Composition de fonctions</b>                  | <b>9</b>  |
| 1          | Définition et domaine                            | 9         |
| 2          | Composition et monotonie                         | 9         |
| <b>V</b>   | <b>Fonctions de référence et transformations</b> | <b>10</b> |
| 1          | La fonction racine décalée                       | 10        |
| 2          | La fonction cube multipliée                      | 11        |
| 3          | La fonction partie entière                       | 11        |
| 4          | Les fonctions associées                          | 12        |
| 5          | L'essentiel à retenir                            | 13        |

Les zones pointillées et les repères vierges sont réservés aux corrections.

Les angles des fonctions trigonométriques sont exprimés en radians.

## I. Premiers concepts

### 1. Fonction, image et antécédent

#### Définition

Une fonction numérique  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  associe à chaque réel  $x \in D_f$  un **unique** réel  $f(x)$ .

- $f(x)$  est l'**image** de  $x$ .
- Un **antécédent** de  $y$  est un réel  $x \in D_f$  tel que  $f(x) = y$ .

Un réel peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

**Exemple.** Pour  $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$ , définie sur  $\mathbb{R}^*$  :  $f(1) = -1$ ,  $f(\frac{1}{3}) = -5$ ,  $f(-4) = \frac{3}{2}$ . Résoudre  $f(x) = 2$  donne  $x = -2$ .

Une fonction peut être donnée par une formule, un tableau de valeurs ou une courbe.

#### Application 1 | Lire un tableau

|        |    |     |            |    |   |
|--------|----|-----|------------|----|---|
| $x$    | -5 | -3  | 0,19       | 2  | 8 |
| $f(x)$ | 7  | 0,1 | $\sqrt{2}$ | -6 | 7 |

Donner  $f(-3)$  et  $f(2)$ , puis les antécédents de 7 parmi les valeurs du tableau.

Correction

### 2. Domaine de définition

#### Définition

Le domaine  $D_f$  est l'ensemble des réels pour lesquels l'expression  $f(x)$  est définie.

#### Conditions à combiner

| Expression                 | Condition                               |
|----------------------------|-----------------------------------------|
| Polynôme                   | Aucune restriction : $x \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{A(x)}{B(x)}$        | $B(x) \neq 0$                           |
| $\sqrt{A(x)}$              | $A(x) \geq 0$                           |
| $\frac{B(x)}{\sqrt{A(x)}}$ | $A(x) > 0$                              |

**Application 2 | Déterminer les domaines**

Déterminer  $D_f$  dans chaque cas :

$$f(x) = x^2 - 5x + 1; \quad f(x) = \frac{x+3}{x-7}; \quad f(x) = \sqrt{2x+3}; \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

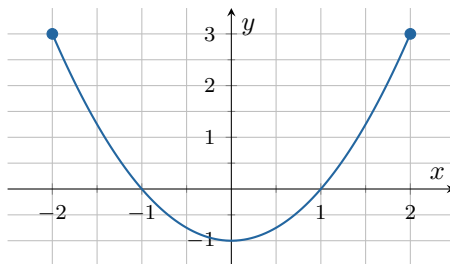
.....

**3. Courbe représentative****Définition**

Dans un repère,  $\mathcal{C}_f = \{M(x; f(x)) : x \in D_f\}$ . Ainsi,  $A(a; b) \in \mathcal{C}_f$  si et seulement si  $a \in D_f$  et  $b = f(a)$ .

**Application 3 | Lire une courbe**

Voici la courbe de  $f(x) = x^2 - 1$  sur  $[-2; 2]$ .



1. Les points  $A(0; -1)$ ,  $B(2; 0)$  et  $C(-3; 8)$  appartiennent-ils à  $\mathcal{C}_f$  ?
2. Lire  $f(-1)$ , les antécédents de 0 et le nombre de solutions de  $f(x) = 4$ .

Correction

.....

.....

.....

.....

## II. Variations et bornes

### 1. Sens de variation

#### a) Définitions

##### Définition

Soit  $I \subset D_f$  un intervalle. Pour tous  $x_1, x_2 \in I$  avec  $x_1 < x_2$  :

- $f$  est **croissante** sur  $I$  si  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ;
- $f$  est **décroissante** sur  $I$  si  $f(x_1) \geq f(x_2)$  ;
- $f$  est **constante** sur  $I$  si  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Les variations sont **strictes** si les inégalités entre les images sont strictes.

#### b) Méthode algébrique

##### Méthode

Fixer  $x_1 < x_2$  dans l'intervalle. Étudier le signe de  $f(x_2) - f(x_1)$ , souvent par factorisation, puis conclure.

**Exemple.** Pour  $f(x) = x^2$  et  $0 \leq x_1 < x_2$ ,  $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

##### Application 4 | Étudier une fonction quadratique

Soit  $f(x) = -2x^2$ . Montrer qu'elle est strictement croissante sur  $] -\infty; 0]$  et strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ . Dresser son tableau de variations.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 2. Minimum et maximum

##### Définition

Soient  $I \subset D_f$  et  $\alpha \in I$ .

- $f(\alpha)$  est le **minimum** sur  $I$  si  $\forall x \in I, f(\alpha) \leq f(x)$ .
- $f(\alpha)$  est le **maximum** sur  $I$  si  $\forall x \in I, f(x) \leq f(\alpha)$ .

Un extremum **global** est atteint sur tout  $D_f$ . Un extremum **local** est valable dans un voisinage du point, relativement à  $D_f$ .

**Exemple.**  $f(x) = (x + 1)^2 \geq 0$  et  $f(-1) = 0$  : le minimum global est 0, atteint en  $-1$ .

**Application 5 | Déterminer un extremum**

Montrer que  $f(x) = -x^2 + 4x + 1$  admet un maximum global égal à 5. Préciser où il est atteint.

Correction

.....

.....

.....

.....

**Exercice 1 | Exploiter un tableau de variations**

Une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  possède les variations suivantes :

|        |           |            |      |            |     |            |           |
|--------|-----------|------------|------|------------|-----|------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ |            | $-2$ |            | $5$ |            | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Déterminer les extrema sur  $] -\infty; 5]$  et  $[-2; +\infty[$ . Existe-t-il un extremum global sur  $\mathbb{R}$  ?

Correction

.....

.....

.....

.....

**3. Fonction majorée, minorée et bornée****Définition**

Sur un ensemble non vide  $I \subset D_f$ ,  $f$  est :

- **majorée** si  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$  ;
- **minorée** si  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leq f(x)$  ;
- **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Cela équivaut à :  $\exists K \geq 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq K$ .

**Une borne n'est pas forcément atteinte**

Un maximum est un majorant **atteint** ; un minimum est un minorant **atteint**. Par exemple,  $1/x > 0$  sur  $]0; +\infty[$ , mais cette fonction n'y possède pas de minimum.

**Application 6 | Encadrer une fonction**

Soit  $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ .

1. Écrire  $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1}$ .
2. Montrer que  $2 < f(x) \leq 3$  pour tout réel  $x$ .
3. Le majorant 3 et le minorant 2 sont-ils atteints ?

Correction

.....

.....

.....

.....

**Exercice 2 | Borner sans chercher les extrema**

Montrer que  $f(x) = \cos x - \sin x$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Correction

.....

.....

.....

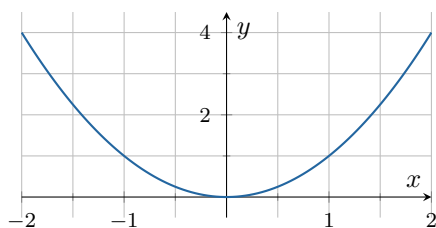
**III. Symétries, comparaison et image****1. Parité****Définition**

Vérifier d'abord que  $D_f$  est symétrique par rapport à 0 :  $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ .

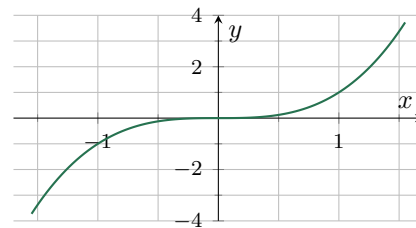
- $f$  est **paire** si  $f(-x) = f(x)$  pour tout  $x \in D_f$ .
- $f$  est **impaire** si  $f(-x) = -f(x)$  pour tout  $x \in D_f$ .

Dans un repère orthogonal, la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; celle d'une fonction impaire par rapport à l'origine.

$f(x) = x^2$  : paire



$g(x) = x^3$  : impaire



**Application 7 | Étudier la parité**

Étudier le domaine et la parité de chacune des fonctions :

$$f(x) = 3x^5 - x - 1; \quad g(x) = \frac{x^2}{1-x^2}; \quad h(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

**2. Périodicité****Définition**

Une fonction est  **$T$ -périodique**, avec  $T > 0$ , si son domaine est invariant par les translations  $x \mapsto x \pm T$  et si  $f(x + T) = f(x)$  pour tout  $x \in D_f$ .

**Propriété**

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f(x + kT) = f(x)$ . Chaque  $kT$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  est une période positive. On reproduit la courbe par translations horizontales de vecteur  $(kT; 0)$ .

**Application 8 | Vérifier une période**

1. Montrer que  $f(x) = \sin(3x + 2)$  est  $\frac{2\pi}{3}$ -périodique, puis que  $\frac{8\pi}{3}$  est aussi une période.
2. Pour  $g(x) = \cos x - \sin x + 2$ , vérifier  $g(x + 2\pi) = g(x)$  et  $g(x - 4\pi) = g(x)$ .

Correction

.....

.....

.....

.....

**3. Signe et position relative****Méthode**

- Étudier le signe de  $f$  pour situer  $\mathcal{C}_f$  par rapport à l'axe des abscisses.
- Étudier le signe de  $f - g$  sur le domaine commun pour comparer les courbes.
- Résoudre  $f(x) = g(x)$  pour trouver leurs points communs.

$f \geq g$  signifie que  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_g$ , points communs inclus. Un point commun n'implique pas toujours un croisement des courbes.

**Application 9 | Comparer deux courbes**

Sur  $]1; 5[$ , on pose  $f(x) = x - 1$  et  $g(x) = \frac{1}{x - 1}$ .

1. Montrer que  $g$  est positive.
2. Déterminer le point d'intersection des deux courbes.
3. Factoriser  $f(x) - g(x)$ , puis étudier leur position relative.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

**4. Image d'un intervalle****Définition**

L'image de  $I \subset D_f$  est  $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ . Ainsi,  $y \in f(I) \Leftrightarrow \exists x \in I, f(x) = y$ .

**Attention aux valeurs intermédiaires**

L'image d'un intervalle n'est pas toujours un intervalle. Pour une fonction **continue et monotone** sur  $[a; b]$ , l'image est l'intervalle fermé de bornes  $f(a)$  et  $f(b)$ .

**Application 10 | Lire les images d'intervalles**

La fonction  $f$  est **continue** sur  $[-4; 5]$  et admet le tableau suivant :

|        |    |              |               |              |
|--------|----|--------------|---------------|--------------|
| $x$    | -4 | 0            | 4             | 5            |
| $f(x)$ | 3  | $\nearrow$ 5 | $\searrow$ -1 | $\nearrow$ 7 |

Donner  $f(0)$ ,  $f(4)$ ,  $f(5)$ , puis  $f([-4; 0])$ ,  $f([0; 4])$  et  $f([-4; 5])$ .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

## IV. Composition de fonctions

### 1. Définition et domaine

#### Définition

La composée de  $u$  suivie de  $v$  est  $v \circ u : x \mapsto v(u(x))$ .

$$D_{v \circ u} = \{x \in D_u : u(x) \in D_v\}.$$

On applique d'abord  $u$ , puis  $v$ . En général,  $v \circ u \neq u \circ v$ .

#### Application 11 | Composer dans les deux sens

Soient  $f(x) = x + 1$  et  $g(x) = x^2 - 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer  $(f \circ g)(3)$  et  $(g \circ f)(3)$ .
2. Déterminer les expressions de  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

Correction

.....

.....

.....

.....

### 2. Composition et monotonie

#### Propriété

Supposons  $u(I) \subset J$ ,  $u$  monotone sur  $I$  et  $v$  monotone sur  $J$ .

| $u$ sur $I$  | $v$ sur $J$  | $v \circ u$ sur $I$ |
|--------------|--------------|---------------------|
| Croissante   | Croissante   | Croissante          |
| Croissante   | Décroissante | Décroissante        |
| Décroissante | Croissante   | Décroissante        |
| Décroissante | Décroissante | Croissante          |

Les conclusions sont strictes lorsque les deux monotonies sont strictes.

**Application 12 | Décomposer pour étudier les variations**

Soit  $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$  sur  $I = [-1; +\infty[$ . Trouver  $u$  et  $v$  tels que  $f = v \circ u$ , vérifier les domaines, puis déduire le sens de variation de  $f$ .

Correction

.....

.....

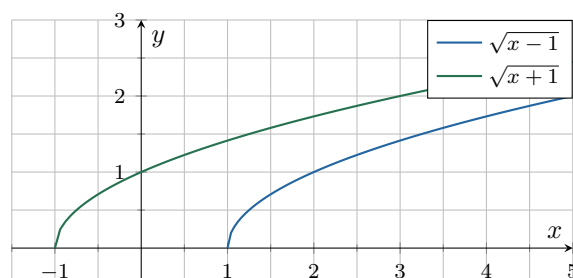
.....

.....

.....

**V. Fonctions de référence et transformations****1. La fonction racine décalée****Propriété**

Pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x+a}$  est définie et strictement croissante sur  $[-a; +\infty[$ . Sa courbe est celle de  $x \mapsto \sqrt{x}$  traduite du vecteur  $(-a; 0)$ .

**Application 13 | Comparer deux fonctions racines**

Pour  $f(x) = \sqrt{x-1}$  et  $g(x) = \sqrt{x+1}$ , déterminer les domaines, dresser les tableaux de variations et comparer  $f$  et  $g$  sur leur domaine commun.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

## 2. La fonction cube multipliée

### Propriété

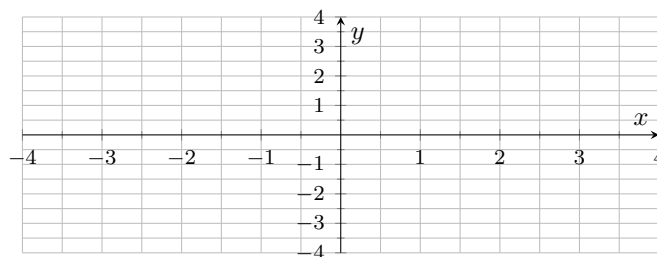
$f(x) = ax^3$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et impaire.

- Si  $a > 0$ , elle est strictement croissante ; si  $a < 0$ , elle est strictement décroissante.
- Si  $a = 0$ , elle est constante et nulle.

### Application 14 | Comparer deux courbes cubiques

Dresser les tableaux de variations de  $f(x) = x^3$  et  $g(x) = 2x^3$ . Tracer leurs courbes pour  $-1 \leq x \leq 1$  à l'aide de quelques points.

Correction



## 3. La fonction partie entière

### Définition

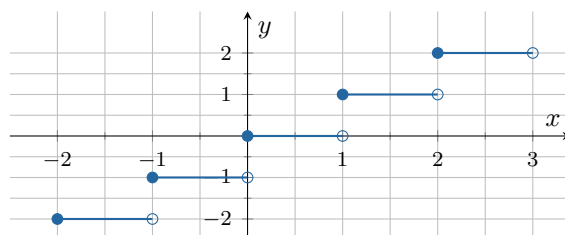
La partie entière de  $x$ , notée  $E(x) = \lfloor x \rfloor$ , est l'unique entier  $n$  tel que  $n \leq x < n + 1$ .

### Propriété

Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$E(n) = n, \quad E(x) \leq x < E(x) + 1, \quad E(x + n) = E(x) + n.$$

$E$  est constante sur chaque  $[n; n + 1[$  et croissante, mais non strictement croissante, sur  $\mathbb{R}$ .



**Application 15 | Calculer une partie entière**

Déterminer  $E(1)$ ,  $E(-1)$ ,  $E(2,3)$ ,  $E(-9,1)$ ,  $E(\sqrt{2})$  et  $E(4/3)$ .

Correction

.....

.....

.....

**4. Les fonctions associées****a) Translation verticale :  $f + k$** **Propriété**

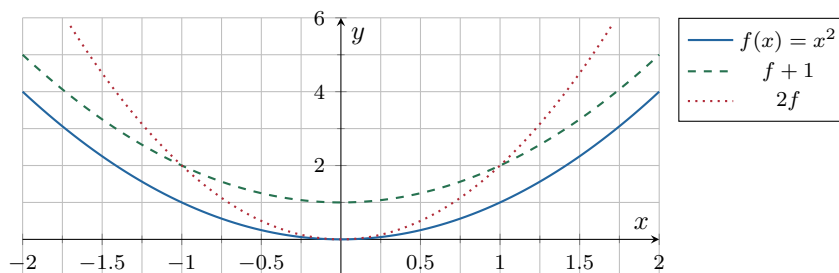
Pour  $k \in \mathbb{R}$ ,  $f + k$  a le même domaine et les mêmes variations que  $f$ . Sa courbe s'obtient par la translation de vecteur  $(0; k)$ .

**b) Multiplication des ordonnées :  $kf$** **Propriété**

La fonction  $kf$ , considérée sur  $D_f$ , a :

- les mêmes variations que  $f$  si  $k > 0$  ;
- les variations contraires si  $k < 0$  ;
- une valeur constante égale à 0 si  $k = 0$ .

Chaque point  $(x; f(x))$  devient  $(x; kf(x))$ . Pour  $k = -1$ , on obtient une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



**Exercice 3 | Translations d'une courbe**

Soit  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$  sur  $[-2; 2]$ .

1. Dresser son tableau de variations et calculer ses valeurs aux entiers de l'intervalle.
2. En déduire les variations de  $f + 2$  et  $f - 5$ .
3. Sur le cahier, tracer les trois courbes dans un même repère adapté.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exercice 4 | Multiplier une fonction**

Avec  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$  sur  $[-2; 2]$ , donner les expressions et les variations de  $2f$ ,  $3f$  et  $-f$ . Tracer leurs courbes sur le cahier.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**5. L'essentiel à retenir****Ordre de travail**

1. Déterminer le domaine avant tout calcul.
2. Vérifier la symétrie du domaine avant d'étudier la parité.
3. Préciser l'intervalle pour les variations et les extrema.
4. Étudier  $f - g$  pour comparer deux courbes.
5. Pour  $v \circ u$ , vérifier  $u(x) \in D_v$ .
6. Distinguer translation  $f + k$  et multiplication  $kf$ .

*Adaptation du document fourni à main(1).pdf à. Énoncés reformulés, incohérences corrigées et figures redessinées.*