

CHAPITRE 3

Barycentre

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

Cours, activités et applications / Année scolaire 2026–2027

Objectifs

Reconnaître et construire un barycentre, calculer ses coordonnées, regrouper des points pondérés et résoudre des problèmes d'alignement ou de lieux géométriques.

Parcours du chapitre

I	Barycentre de deux points pondérés	2
1	Activités préparatoires	2
2	Définition et construction	3
3	Propriétés fondamentales	4
4	Coordonnées du barycentre	5
II	Barycentre de trois points pondérés	6
1	Définition et caractérisation	6
2	Coordonnées	6
3	Associativité et construction	7
4	Isobarycentre d'un triangle	8
5	Lieux géométriques	9
III	Barycentre de quatre points pondérés	9
1	Définition et coordonnées	9
2	Regroupement et construction	10
3	Synthèse des méthodes	10

Adaptation du document fourni à main(2).pdf à. Activités et applications réorganisées ; figures redessinées.

Prérequis : relation de Chasles, colinéarité, coordonnées de vecteurs.

Les zones pointillées sont réservées à la rédaction des corrections.

I. Barycentre de deux points pondérés

1. Activités préparatoires

Activité 1 | Réactiver le calcul vectoriel

Soit ABC un triangle. On définit I, J, K par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BK} = -2\overrightarrow{BC}.$$

1. Placer les points sur une figure tracée dans le cahier.
2. Vérifier que $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
3. Établir $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IK} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
4. En déduire $\overrightarrow{IK} = -5\overrightarrow{IJ}$. Que peut-on dire de I, J, K ?

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Activité 2 | Découvrir un point d'équilibre

Soient $A \neq B$ et G tel que $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

1. Avec la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, puis construire G .
2. Pour tout point M , établir $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 15$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Définition et construction

a) Définition

Définition

Un **point pondéré** $(A; a)$ est un point A muni d'un coefficient réel a . Si $a + b \neq 0$, il existe un unique point G tel que

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}.$$

On l'appelle le **barycentre** du système $\{(A; a), (B; b)\}$ et on note $G = \text{bar}\{(A; a), (B; b)\}$.

b) Formule de construction

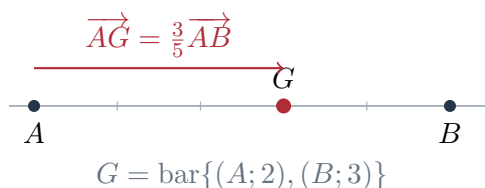
Propriété

Pour $a + b \neq 0$,

$$G = \text{bar}\{(A; a), (B; b)\} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}.$$

De même, $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{BA}$. Si $A \neq B$, les points A, B, G sont alignés.

Justification. Remplacer $\overrightarrow{GB}$ par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ dans la définition. On obtient $(a+b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, d'où la formule et l'unicité.



Position du barycentre

Pour $A \neq B$, si a, b sont non nuls et de même signe, $G \in]A; B[$. S'ils sont de signes contraires et $a + b \neq 0$, G est hors du segment $[AB]$. Si $a = 0$, $G = B$; si $b = 0$, $G = A$.

c) Isobarycentre

Définition

Lorsque $a = b \neq 0$, G est l'**isobarycentre** de A et B : c'est le milieu de $[AB]$.

Application 1 | Reconnaître les coefficients

Soient $A \neq B$. Pour chaque relation, écrire G comme barycentre, puis exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

1. $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{AB}$.

2. $-7\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

Construire les deux points obtenus sur le cahier.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

3. Propriétés fondamentales**a) Conservation du barycentre****Propriété**

Multiplier tous les coefficients par un même réel $k \neq 0$ ne change pas le barycentre :

$$\text{bar}\{(A; a), (B; b)\} = \text{bar}\{(A; ka), (B; kb)\}.$$

Exemple. $\text{bar}\{(A; 0,05), (B; 0,1)\} = \text{bar}\{(A; 1), (B; 2)\}.$

b) Réduction d'une somme vectorielle**Propriété**

Si $G = \text{bar}\{(A; a), (B; b)\}$, alors, pour tout point M ,

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}.$$

Réciproquement, si cette identité est vraie pour tout M , on retrouve la définition en prenant $M = G$.

Justification. Utiliser $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$, puis $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

Passer aux distances

$$\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}\| = |a + b| MG.$$

Ne pas oublier la valeur absolue lorsque la somme des coefficients est négative.

Application 2 | Déterminer des lieux géométriques

Soient $A \neq B$. Déterminer l'ensemble des points M dans chaque cas :

1. $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 6$.
2. $\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|-2\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB}\|$.

Introduire les barycentres utiles, puis préciser le centre et le rayon du cercle ou la médiatrice obtenue.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Coordonnées du barycentre**Propriété**

Dans un repère, si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $a + b \neq 0$, alors

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a + b}, \quad y_G = \frac{ay_A + by_B}{a + b}.$$

Exemple. Avec $A(-2; 3)$, $B(1; 4)$ et $G = \text{bar}\{(A; 3), (B; 1)\}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ et $G(-\frac{5}{4}; \frac{13}{4})$.

Application 3 | Calculer les coordonnées

On donne $A(2; -5)$ et $B(4; 3)$. Déterminer les coordonnées de

$$G = \text{bar}\{(A; 3), (B; 6)\}, \quad G' = \text{bar}\{(A; -2), (B; 1)\}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

II. Barycentre de trois points pondérés

1. Définition et caractérisation

Définition

Si $s = a + b + c \neq 0$, le barycentre $G = \text{bar}\{(A; a), (B; b), (C; c)\}$ est l'unique point tel que

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Formules utiles

Pour tout point M ,

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = s\overrightarrow{MG}.$$

En particulier,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{s}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{s}\overrightarrow{AC}.$$

La multiplication de tous les coefficients par $k \neq 0$ conserve le barycentre.

Application 4 | Reconnaître et construire

Soit ABC un triangle.

1. Écrire comme barycentre le point G vérifiant $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
2. Pour $H = \text{bar}\{(A; 2), (B; -1), (C; -2)\}$, exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, puis construire H .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Coordonnées

Propriété

Si $a + b + c \neq 0$, les coordonnées de G sont

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}, \quad y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}.$$

Application 5 | Un calcul dans un repère

On donne $A(1; 4)$, $B(0; 5)$, $C(2; -1)$. Calculer les coordonnées de $G = \text{bar}\{(A; 2), (B; -3), (C; -6)\}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

3. Associativité et construction**Regrouper deux points**

Supposons $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$. Si $H = \text{bar}\{(A; a), (B; b)\}$, alors

$$\text{bar}\{(A; a), (B; b), (C; c)\} = \text{bar}\{(H; a + b), (C; c)\}.$$

Le point regroupé reçoit la **somme des coefficients** de son groupe.

Méthode

Choisir deux coefficients dont la somme est non nulle, construire leur barycentre H , puis construire le barycentre de H et du troisième point.

Application 6 | Ramener une construction à un milieu

Soit ABC un triangle et K tel que $\overrightarrow{BK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$. On pose $G = \text{bar}\{(A; 3), (B; 7), (C; -4)\}$.

1. Vérifier que $K = \text{bar}\{(B; 7), (C; -4)\}$.
2. En déduire que G est le milieu de $[AK]$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

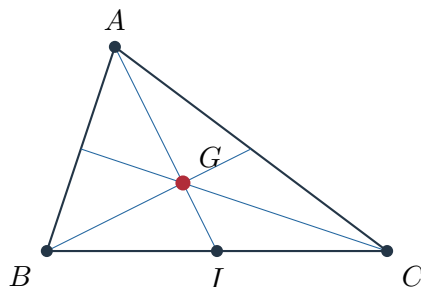
4. Isobarycentre d'un triangle

Propriété

L'isobarycentre $G = \text{bar}\{(A; 1), (B; 1), (C; 1)\}$ d'un triangle ABC est son **centre de gravité**. Si I est le milieu de $[BC]$, alors

$$G = \text{bar}\{(A; 1), (I; 2)\}, \quad \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Les trois médianes sont concourantes en G .



Exercice 1 | Démontrer une concurrence

Soit ABC un triangle, $G = \text{bar}\{(A; -2), (B; 3), (C; 3)\}$, I le milieu de $[BC]$, et K, H définis par $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AC}$.

1. Vérifier $K = \text{bar}\{(A; -2), (B; 3)\}$ et $H = \text{bar}\{(A; -2), (C; 3)\}$.
2. Montrer que $G = \text{bar}\{(K; 1), (C; 3)\} = \text{bar}\{(H; 1), (B; 3)\} = \text{bar}\{(A; -1), (I; 3)\}$.
3. En déduire que (CK) , (BH) et (AI) sont concourantes en G .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Lieux géométriques

Application 7 | Réduire des sommes de trois vecteurs

Soit ABC un triangle. Déterminer les ensembles de points M tels que :

1. $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4$.

2. $\|2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} - \vec{MB}\|$.

Introduire les barycentres et justifier, dans le deuxième cas, que les deux centres sont distincts.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III. Barycentre de quatre points pondérés

1. Définition et coordonnées

Définition

Si $s = a + b + c + d \neq 0$, l'unique point G tel que

$$a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} + d\vec{GD} = \vec{0}$$

est le barycentre $\text{bar}\{(A; a), (B; b), (C; c), (D; d)\}$.

Propriété

Pour tout point M ,

$$a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} + d\vec{MD} = s\vec{MG}.$$

Dans un repère,

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{s}, \quad y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{s}.$$

La conservation par multiplication des coefficients s'applique encore.

2. Regroupement et construction

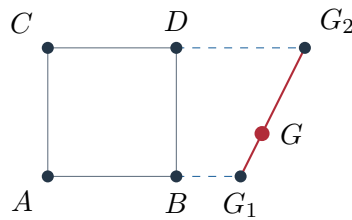
Propriété

Si $a + b \neq 0$, $c + d \neq 0$ et $a + b + c + d \neq 0$, poser

$$G_1 = \text{bar}\{(A; a), (B; b)\}, \quad G_2 = \text{bar}\{(C; c), (D; d)\}.$$

Alors $G = \text{bar}\{(G_1; a + b), (G_2; c + d)\}$.

Exemple. Pour $G = \text{bar}\{(A; -1), (B; 3), (C; -1), (D; 2)\}$, construire $G_1 = \text{bar}\{(A; -1), (B; 3)\}$ et $G_2 = \text{bar}\{(C; -1), (D; 2)\}$. Puis $G = \text{bar}\{(G_1; 2), (G_2; 1)\}$, donc $\overrightarrow{G_1G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{G_1G_2}$.



Application 8 | Vérifier une construction par le calcul

Dans un repère, $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(0;2)$, $D(2;2)$. Pour le système de l'exemple précédent :

1. Calculer G_1 et G_2 , puis les coordonnées de G par regroupement.
2. Retrouver le résultat avec la formule directe à quatre points.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

3. Synthèse des méthodes

Les réflexes essentiels

1. **Existence** : vérifier que la somme totale des coefficients est non nulle.
2. **Construction** : isoler un vecteur ou regrouper des points.
3. **Regroupement** : vérifier que chaque somme partielle utilisée est non nulle.
4. **Alignement** : écrire un point comme barycentre de deux points distincts.
5. **Lieu** : réduire les sommes et utiliser $\|s\overrightarrow{MG}\| = |s| MG$.

Reconnaître le lieu obtenu

$MG = r$: cercle de centre G si $r > 0$; singleton $\{G\}$ si $r = 0$; ensemble vide si $r < 0$.
 $MG = MH$: médiatrice de $[GH]$ si $G \neq H$; tout le plan si $G = H$.