

CHAPITRE 4

Produit scalaire dans le plan

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

Cours et applications / Année scolaire 2026–2027

Objectifs

Calculer un produit scalaire, exploiter l'orthogonalité, déterminer des équations de droites et de cercles, puis étudier leurs intersections et leurs tangentes.

Parcours du chapitre

I	Expression analytique du produit scalaire	2
1	Produit scalaire et orthogonalité	2
2	Norme et distance	2
3	Angles orientés et aire	3
4	Inégalités usuelles	4
II	Droites et orthogonalité	5
1	Vecteur normal et équation cartésienne	5
2	Perpendicularité et parallélisme	6
3	Distance d'un point à une droite	6
III	Équations d'un cercle	7
1	Centre et rayon	7
2	Cercle de diamètre donné	8
3	Représentation paramétrique	8
4	Reconnaître la nature d'un ensemble	9
IV	Droites, cercles et tangentes	10
1	Positions relatives	10
2	Tangente en un point du cercle	10
3	Synthèse	11

Cadre : repère orthonormé, direct pour les angles orientés.

Les zones pointillées sont réservées aux corrections en classe.

Adaptation du document fourni à main(3).pdf ; erreurs repérées corrigées et figures redessinées.

I. Expression analytique du produit scalaire

1. Produit scalaire et orthogonalité

Propriété

Dans un repère **orthonormé**, pour $\vec{u} = (x; y)$ et $\vec{v} = (x'; y')$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple. Pour $\vec{u} = (5; 3)$ et $\vec{v} = (2; -1)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10 - 3 = 7$. Ces vecteurs ne sont donc **pas** orthogonaux. En revanche, $(5; 3)$ et $(3; -5)$ le sont.

Rappels de calcul

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u}, & \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \\ (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}), & \vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\|^2.\end{aligned}$$

Application 1 | Une condition d'orthogonalité

Déterminer les réels m tels que $\vec{u} = (2 - m; 0)$ et $\vec{v} = (4m; -6)$ soient orthogonaux. Préciser pour quelle solution $\vec{u}$ est nul.

Correction

.....

.....

.....

.....

2. Norme et distance

Propriété

Pour $\vec{u} = (x; y)$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Application 2 | Reconnaître un triangle

Soient $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$ et $C(-3; 3)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis leur produit scalaire.
2. Calculer AB et AC . En déduire la nature du triangle ABC .

Correction

.....

.....

.....

.....

3. Angles orientés et aire**a) Cosinus et sinus****Propriété**

Dans un repère orthonormé **direct**, soient $\vec{u} = (a; b)$, $\vec{v} = (c; d)$ deux vecteurs **non nuls** et θ une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$.

$$\cos \theta = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}}, \quad \sin \theta = \frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}}.$$

On note $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc$. Une mesure de l'angle est déterminée modulo 2π par son cosinus **et** son sinus.

b) Aire d'un triangle**Propriété**

Pour un triangle ABC ,

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} AB \times AC \times |\sin \theta|,$$

où θ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Application 3 | Déterminer un angle et une aire

On donne $A(-2; 0)$, $B(1; 1)$ et $C(2; -2)$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$.
2. Calculer le cosinus et le sinus de $(\vec{AB}, \vec{AC})$, puis en donner une mesure.
3. Calculer l'aire du triangle ABC .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Inégalités usuelles**Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire**

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$,

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|, \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

En coordonnées, pour $\vec{u} = (a; b)$ et $\vec{v} = (c; d)$:

$$|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2},$$

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Application 4 | Appliquer une inégalité vectorielle

1. Pour $a \geq 0$, appliquer Cauchy–Schwarz à $(a; 1)$ et $(1; \sqrt{a})$ pour montrer que

$$a + \sqrt{a} \leq \sqrt{(a^2 + 1)(a + 1)}.$$

En déduire $a + \sqrt{a} \leq (a + 1)(a^2 + 1)$.

2. Avec la relation de Chasles, démontrer $AC \leq AB + BC$ pour tous points A, B, C .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II. Droites et orthogonalité**1. Vecteur normal et équation cartésienne****Définition**

Un vecteur **normal** à une droite est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

Propriété

La droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (a; b) \neq \vec{0}$ a pour équation

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

Pour $D : ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$, un vecteur normal est $(a; b)$ et un vecteur directeur est $(-b; a)$.

Équation d'une médiatrice

Pour $A \neq B$, calculer le milieu I de $[AB]$. La médiatrice passe par I et admet $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal.

Application 5 | Déterminer une médiatrice

On donne $A(-1; -1)$ et $B(3; 1)$. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

2. Perpendicularité et parallélisme**Propriété**

Soient D_1, D_2 deux droites de vecteurs normaux non nuls $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$ et $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$.

$$D_1 \perp D_2 \iff a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0,$$

$$D_1 \parallel D_2 \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Ici, le parallélisme inclut le cas de deux droites confondues.

Application 6 | Étudier trois droites

On considère $D_1 : -2x + y - 3 = 0$, $D_2 : mx - y = 0$ et $D_3 : -4x + 2y + 5 = 0$.

1. Déterminer m pour que $D_1 \perp D_2$.
2. Montrer que D_1 et D_3 sont strictement parallèles.

Correction

.....

.....

.....

.....

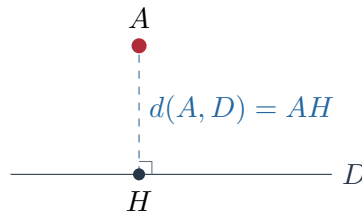
.....

3. Distance d'un point à une droite**Propriété**

Pour $A(x_A; y_A)$ et $D : ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$,

$$d(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Cette distance est AH , où H est le projeté orthogonal de A sur D . Elle est nulle exactement lorsque $A \in D$.



Application 7 | Calculer une distance

Soit $D : x - 2y + 1 = 0$. Calculer $d(A, D)$ pour $A(2; -1)$, puis $d(B, D)$ pour $B(3; 2)$. Préciser si ces points appartiennent à D .

Correction

.....

.....

.....

.....

III. Équations d'un cercle

1. Centre et rayon

Propriété

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et de rayon $R > 0$ a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Cette égalité traduit $\Omega M = R$.

Application 8 | Passer d'une forme à l'autre

- Donner une équation du cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
- Mettre $x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{5}y + 6 = 0$ sous forme canonique, puis préciser le centre et le rayon.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

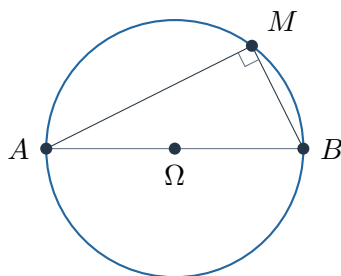
2. Cercle de diamètre donné

Propriété

Pour $A \neq B$, le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Son équation est

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

Son centre est le milieu de $[AB]$ et son rayon vaut $AB/2$.



Pour $M \neq A, B$, le triangle AMB est rectangle en M . Les points A et B appartiennent aussi au cercle.

Application 9 | Déterminer un cercle par son diamètre

Soient $A(10; 4)$ et $B(0; 4)$. Déterminer le centre, le rayon et une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

Correction

.....

.....

.....

.....

3. Représentation paramétrique

Propriété

Le cercle de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et de rayon $R > 0$ admet la représentation

$$\begin{cases} x = \alpha + R \cos t, \\ y = \beta + R \sin t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

On peut se limiter à $t \in [0; 2\pi[$ pour parcourir le cercle une fois.

Application 10 | Relier deux représentations

Donner une représentation paramétrique, puis une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(0;1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

4. Reconnaître la nature d'un ensemble**Compléter les carrés**

L'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ s'écrit

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}.$$

En posant $\Delta = a^2 + b^2 - 4c$:

- $\Delta > 0$: cercle de centre $(-a/2; -b/2)$ et de rayon $\sqrt{\Delta}/2$;
- $\Delta = 0$: singleton $\{(-a/2; -b/2)\}$;
- $\Delta < 0$: ensemble vide.

Application 11 | Cercle, point ou ensemble vide ?

Déterminer la nature des ensembles définis par :

1. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$;
2. $x^2 + y^2 - y + 1 = 0$;
3. $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

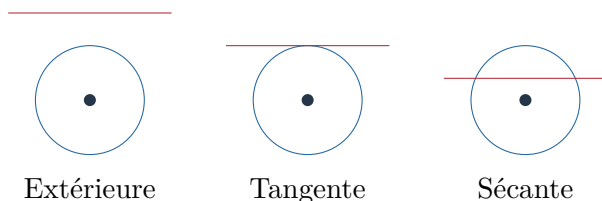
IV. Droites, cercles et tangentes

1. Positions relatives

Propriété

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$, et D une droite. Posons $d = d(\Omega, D)$.

Condition	Position de D	Points communs
$d > R$	Extérieure	Aucun
$d = R$	Tangente	Un seul
$d < R$	Sécante	Deux



Application 12 | Étudier les intersections

Pour chaque cas, vérifier d'abord la nature de l'ensemble E , puis déterminer les points communs à D et E .

- $D : y = x$; $E : x^2 + (y - 4)^2 = 8$.
- $D : x + y + 5 = 0$; $E : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.
- $D : y = \sqrt{2}x$; $E : x^2 + y^2 + 3x + 3y + 9 = 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

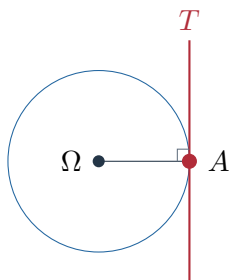
2. Tangente en un point du cercle

Propriété

Soit $A(x_A; y_A) \in \mathcal{C}$, cercle de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et de rayon $R > 0$. La tangente en A est perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$. Elle a pour équation

$$(x_A - \alpha)(x - x_A) + (y_A - \beta)(y - y_A) = 0.$$

Elle traduit $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.



Application 13 | Équation d'une tangente

Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - x - 2y = 0$ et $A(1; 2)$.

1. Déterminer le centre et le rayon de $\mathcal{C}$, puis vérifier $A \in \mathcal{C}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

3. Synthèse

Les vérifications à garder

- Calculs de coordonnées : repère **orthonormé** ; sinus orienté : repère **direct**.
- Angle : les deux vecteurs doivent être non nuls.
- Droite : le vecteur normal doit être non nul.
- Cercle : le carré du rayon doit être strictement positif.
- Tangente en A : vérifier d'abord que A appartient au cercle.
- Aire et distance : conserver les valeurs absolues.