

CHAPITRE 5

Suites numériques

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

Cours et applications

2026–2027

Objectifs

Calculer les termes d'une suite, étudier ses variations et ses bornes ; reconnaître les suites arithmétiques et géométriques ; déterminer un terme général et calculer une somme.

Parcours du chapitre

I	Définir et calculer une suite	2
1	Termes et indices	2
2	Deux modes de définition	2
II	Bornes et variations	3
1	Suites majorées, minorées et bornées	3
2	Sens de variation	4
III	Suites arithmétiques	5
1	Définition et terme général	5
2	Variations et sommes	6
IV	Suites géométriques	7
1	Définition et terme général	7
2	Variations et sommes	8
3	Se ramener à une suite géométrique	9
V	Raisonner par récurrence	10
1	Les trois étapes	10
2	Fiche de synthèse	10

Conventions. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Une suite est étudiée à partir du rang indiqué. Une somme de u_p à u_n contient $n - p + 1$ termes.

Cours reformulé à partir du document fourni à Généralités sur les suites numériques z. Les notations et les indices ont été harmonisés.

I. Définir et calculer une suite

1. Termes et indices

Définition

Une **suite réelle** est une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto u_n.$$

On note cette suite $(u_n)_{n \in I}$. Le nombre u_n est son **terme de rang n** .

Exemple. Pour $u_n = 2n$, $n \geq 0$, le premier terme est $u_0 = 0$, le deuxième est $u_1 = 2$ et le cinquième est $u_4 = 8$.

Application 1 | Bien lire les indices

Soit $u_n = 2n$ pour $n \geq 0$. Exprimer en fonction de n :

$$u_{n+1}, \quad u_{2n}, \quad u_n + 1.$$

Correction

2. Deux modes de définition

a) Formule explicite

Le terme u_n se calcule directement à partir de n : par exemple $u_n = 2n$.

b) Relation de récurrence

On donne un ou plusieurs termes initiaux et une relation permettant de calculer les suivants.

Application 2 | Calculer les premiers termes

On considère

$$\begin{cases} u_0 = -3, \\ u_{n+1} = 4u_n + 7 \quad (n \geq 0), \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 2, \quad v_2 = 0, \\ v_{n+2} = 2v_n + v_{n+1} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Calculer u_1 , u_2 , u_4 , puis v_3 et v_4 .

Correction

II. Bornes et variations

1. Suites majorées, minorées et bornées

Définition

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est :

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$;
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$;
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Les bornes m et M sont **indépendantes** de n .

Propriété

Une suite est bornée si et seulement s'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq K.$$

Application 3 | Encadrer une suite explicite

Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

1. Calculer le premier terme.
2. Montrer que $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 2$.
3. En déduire que la suite est bornée, puis qu'elle est aussi majorée par $\sqrt{2}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Encadrer une suite définie par récurrence

On vérifie l'encadrement au premier rang, puis on montre que la relation de récurrence le conserve. Le raisonnement par récurrence est détaillé à la fin du chapitre.

Exemple. Si $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 1$, alors $v_n \geq -2$ pour tout $n \geq 0$: $v_0 \geq -2$ et $v_n \geq -2$ entraîne $v_{n+1} \geq \frac{1}{2}(-2) - 1 = -2$.

2. Sens de variation

Définition

Pour tout $n \geq n_0$, une suite (u_n) est :

$$\begin{array}{lll} \text{croissante} & \text{si} & u_{n+1} \geq u_n, \\ \text{décroissante} & \text{si} & u_{n+1} \leq u_n, \\ \text{constante} & \text{si} & u_{n+1} = u_n. \end{array}$$

Elle est **monotone** si elle est croissante ou décroissante. Pour une variation stricte, on remplace l'inégalité large par une inégalité stricte.

a) Étudier une différence

Méthode

Calculer $u_{n+1} - u_n$, puis étudier son signe sur tous les rangs considérés.

Exemple. Si $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$, alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n+5} - \frac{2n-1}{n+4} = \frac{9}{(n+4)(n+5)} > 0 \quad (n \geq 0).$$

La suite est donc strictement croissante.

b) Comparer un quotient à 1

Si tous les termes sont strictement positifs, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Un quotient supérieur à 1 donne une croissance ; inférieur à 1, une décroissance.

Application 4 | Étudier la monotonie

Étudier les variations des suites

$$v_n = 4 \left(\frac{1}{3} \right)^n \quad (n \geq 1), \quad \begin{cases} w_0 = 2, \\ w_{n+1} = w_n - 3n \end{cases} \quad (n \geq 0).$$

Pour (w_n) , comparer aussi w_0 et w_1 , puis préciser à partir de quel rang la décroissance est stricte.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III. Suites arithmétiques

1. Définition et terme général

Définition

Une suite est **arithmétique de raison** $r \in \mathbb{R}$ lorsque

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est constante et égale à r .

Relation entre deux termes

Pour tous les rangs n et p de la suite,

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

En particulier : $u_n = u_0 + nr$ si le premier rang est 0.

Exemple. Si $u_2 = -3$ et $r = \frac{1}{2}$, alors $u_n = -3 + \frac{n-2}{2}$ pour $n \geq 2$.

Application 5 | Reconnaître une suite arithmétique

Parmi les suites suivantes, lesquelles sont arithmétiques ? Préciser leur raison.

$$u_n = 3n + 5, \quad v_n = n^2, \quad \begin{cases} w_0 = -1, \\ w_n - w_{n+1} + 3 = 0 \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

Application 6 | Retrouver la raison

Une suite arithmétique $(v_n)_{n \geq 0}$ vérifie $v_0 = 5$ et $v_8 = -16$. Déterminer sa raison, puis exprimer v_n en fonction de n .

Correction

.....

.....

.....

2. Variations et sommes

a) Le signe de la raison

Comme $u_{n+1} - u_n = r$, une suite arithmétique est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$ et constante si $r = 0$.

b) Somme de termes consécutifs

Propriété

Pour $n \geq p$, une suite arithmétique vérifie

$$\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Autrement dit : **nombre de termes** $\times$ **moyenne des termes extrêmes**. En particulier,

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}.$$

Exemple. $3 + 7 + 11 + 15 + 19 = 5 \times \frac{3 + 19}{2} = 55$.

Avant d'appliquer la formule

Repérer le premier et le dernier rang ; compter les termes ; calculer les deux termes extrêmes ; remplacer dans la formule.

Application 7 | Terme général et somme

On considère $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 5$ pour tout $n \geq 0$.

1. Justifier que (u_n) est arithmétique et donner sa raison.
2. Montrer que $u_n - 2 = 5n$ pour tout $n \geq 0$.
3. Pour $n \geq 2$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k$ en fonction de n .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

IV. Suites géométriques

1. Définition et terme général

Définition

Une suite est **géométrique de raison** $q \in \mathbb{R}$ lorsque

$$u_{n+1} = q u_n.$$

Si $u_n \neq 0$, cette relation équivaut à $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Relation entre deux termes

Pour $n > p$,

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

Si $q \neq 0$, la formule vaut pour tous les rangs n, p . En particulier, $u_n = u_0 q^n$ pour $n \geq 0$. Si $q = 0$, tous les termes suivant le terme initial sont nuls.

Exemple. Si $u_0 = 1$ et $q = \sqrt{3}$, alors $u_n = (\sqrt{3})^n$.

Application 8 | Reconnaître une suite géométrique

Parmi les suites suivantes, lesquelles sont géométriques ? Préciser leur raison.

$$u_n = \frac{3}{2^n}, \quad v_n = -3n, \quad \begin{cases} w_0 = -1, \\ 2w_n - 3w_{n+1} = 0 \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

Application 9 | Retrouver une raison géométrique

Une suite géométrique (v_n) vérifie $v_1 = 1$ et $v_4 = \frac{1}{27}$. Déterminer sa raison q , puis son terme général pour $n \geq 1$.

Correction

.....

.....

.....

2. Variations et sommes

a) Tenir compte du signe des termes

$$u_{n+1} - u_n = (q - 1)u_n.$$

Si tous les termes sont strictement positifs : $q > 1$ donne une croissance stricte, $0 < q < 1$ une décroissance stricte, et $q = 1$ une suite constante. Si $q < 0$ et le terme initial est non nul, les signes alternent et la suite n'est pas monotone.

b) Somme de termes consécutifs

Propriété

Pour $n \geq p$ et $N = n - p + 1$ termes :

$$\sum_{k=p}^n u_k = \begin{cases} u_p \frac{1 - q^N}{1 - q} & \text{si } q \neq 1, \\ Nu_p & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

En particulier, si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exemple. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 31$.

Application 10 | Compter les termes avant de sommer

Calculer exactement les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^5 3 \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad B = \sum_{k=2}^6 2^k.$$

Pour chacune, indiquer le nombre de termes et le premier terme.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Se ramener à une suite géométrique

Une récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$

Si $a \neq 1$, chercher le réel ℓ vérifiant $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \frac{b}{1-a}$. En posant $v_n = u_n - \ell$, on obtient

$$v_{n+1} = a(u_n - \ell) = av_n.$$

La suite (v_n) est géométrique. On exprime v_n , puis $u_n = v_n + \ell$.

Exercice 1 | Une suite auxiliaire

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3}$ pour $n \geq 0$. On pose $v_n = u_n + \frac{4}{3}$.

1. Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et v_0 .
2. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
3. Pour $n \geq 1$, calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k, \quad T_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Attention aux bornes de la somme

S_n contient n termes ; T_n en contient $n + 1$. Pour sommer $u_k = v_k - \frac{4}{3}$, on retranche $\frac{4}{3}$ autant de fois qu'il y a de termes.

V. Raisonner par récurrence

1. Les trois étapes

Méthode

Pour démontrer une propriété $P(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : fixer un entier $n \geq n_0$, supposer $P(n)$ vraie, puis démontrer $P(n+1)$.
3. **Conclusion** : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Application 11 | Divisibilité

Montrer par récurrence que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$. *Indication* : $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Fiche de synthèse

	Arithmétique	Géométrie
Relation	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
Reconnaissance	Différence constante	Relation multiplicative constante
Terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p q^{n-p}, n > p$
Somme de N termes	$N \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$	$\text{premier} \times \frac{1 - q^N}{1 - q}, q \neq 1$

Les bons réflexes

Vérifier le premier rang ; conserver des notations cohérentes ; compter les termes d'une somme ; ne jamais diviser par un terme sans vérifier qu'il est non nul.