

CHAPITRE 6

Calcul trigonométrique

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

2026–2027

Objectifs du chapitre

Établir et utiliser les formules d'addition et de duplication ; transformer un produit en somme et une somme en produit ; écrire $a \cos x + b \sin x$ sous la forme $r \cos(x - \alpha)$; résoudre des équations et des inéquations trigonométriques.

Parcours du chapitre

I	Formules d'addition et de duplication	2
1	Formules d'addition pour le cosinus et le sinus	2
2	Formules d'addition pour la tangente	4
3	Formules de duplication	5
II	Transformation de produits en sommes et de sommes en produits	6
1	Transformation de produits en sommes	6
2	Transformation de sommes en produits	7
III	Transformation de l'expression $a \cos x + b \sin x$	8
1	Forme $r \cos(x - \alpha)$	8
IV	Équations et inéquations trigonométriques	9
1	Équations de base	9
2	Applications	10

Cours, activités et applications

Les zones pointillées sont réservées à la rédaction des corrections.

ABDELLAOUI Said ABDELLAOUI ACADEMY

I. Formules d'addition et de duplication

1. Formules d'addition pour le cosinus et le sinus

Activité 1 | Formules d'addition

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et (C) est le cercle trigonométrique associé. Soient a et b deux réels. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, avec

$$(\vec{i}; \vec{u}) \equiv b \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad (\vec{i}; \vec{v}) \equiv a \pmod{2\pi}.$$

1. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ en fonction de a et b .
2. Calculer de deux façons le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
3. En déduire que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
4. Montrer que $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
5. En remarquant que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, montrer que

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Formules d'addition

Soient a et b deux réels. On a :

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Application 1 | Valeurs exactes et identités

1. Sachant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

2. Soit x un réel. Montrer que :

a. $\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) ;$

b. $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 1 | Déterminer $a + b$

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ et $\sin a = \cos b = \frac{1}{3}$. Déterminer $a + b$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

2. Formules d'addition pour la tangente

Activité 2 | Tangente d'une somme et d'une différence

Soient a et b deux réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

- Montrer que, si $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.
- Montrer que, si $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Correction

Formules d'addition pour la tangente

Soient a et b deux réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

- Si $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.
- Si $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Application 2 | Un produit de tangentes

Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Simplifier l'expression

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

Correction

3. Formules de duplication

Formules de duplication

Soit a un réel. On a :

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$;
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$;
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$;
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$.

Application 3 | Duplication et angle moitié

1. Sachant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$.
2. Soit x un réel. Montrer que $1 + \cos x + 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2$.
3. Soit x un réel tel que $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II. Transformation de produits en sommes et de sommes en produits

1. Transformation de produits en sommes

Activité 3 | Somme et différence de sinus et de cosinus

Soient a et b deux réels. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sin(a + b) + \sin(a - b)$;
2. $\sin(a + b) - \sin(a - b)$;
3. $\cos(a + b) + \cos(a - b)$;
4. $\cos(a + b) - \cos(a - b)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Produits en sommes

Soient a et b deux réels. On a :

- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$;
- $\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$;
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$;
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$.

Application 4 | Transformer un produit

1. Calculer $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$.
2. Soit x un réel. Montrer que $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Transformation de sommes en produits

Soient a et b deux réels. On pose $x = a + b$ et $y = a - b$; alors $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$. En remplaçant a et b par ces expressions dans la propriété précédente, on obtient :

Sommes en produits

Soient x et y deux réels. On a :

- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$;
- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$;
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$;
- $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Application 5 | Transformer une somme

1. Montrer que $\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
2. Soit x un réel. Montrer que $\cos 6x - \cos 2x = -4 \sin^2 2x \cos 2x$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III. Transformation de l'expression $a \cos x + b \sin x$

1. Forme $r \cos(x - \alpha)$

Soient a et b deux réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$. On a

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

Or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$; donc il existe un réel α tel que

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

D'où $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha)$, c'est-à-dire $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$.

Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Soient a et b deux réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$. Pour tout réel x :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$$

où α est un réel tel que $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Application 6 | Écrire sous la forme $r \cos(x - \alpha)$

Écrire sous la forme $r \cos(x - \alpha)$ les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos x + \sin x ; \quad B(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x ; \quad C(x) = \sqrt{3} \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 2 | Calcul de $\tan \frac{\pi}{12}$

On pose $A = \frac{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}}$.

1. Montrer que $\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{3}$.
2. Montrer que $\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6}$.
3. En déduire la valeur du nombre A .
4. Déterminer la valeur de $\tan \frac{\pi}{12}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

IV. Équations et inéquations trigonométriques

1. Équations de base

Équations $\cos x = \cos \alpha$, $\sin x = \sin \alpha$, $\tan x = \tan \alpha$

Soit α un réel et $k \in \mathbb{Z}$.

- $\cos x = \cos \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$;
- $\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$;
- $\tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi$ (avec $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$).

2. Applications

Application 7 | Résoudre équations et inéquation

1. Résoudre dans l'intervalle I indiqué les équations suivantes :

a. $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$; $I = [-\pi; 2\pi]$;

b. $\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$; $I = [0; 2\pi]$;

c. $\tan x = \sqrt{3}$; $I = [-\pi; \pi]$;

d. $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$; $I = [-\pi; \pi]$.

2. Résoudre dans $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\sqrt{3} \cos x - \sin x > \sqrt{2}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3 | Étude d'une expression trigonométrique

Soit x un réel. On pose $A(x) = 2\sqrt{3}\sin^2 x - \sin 2x - \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

1. Calculer $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)(1 - 2\sin x)$.
3.
 - a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.
 - b. En déduire les solutions de l'équation $A(x) = 0$ dans $]0; 2\pi]$, puis les représenter sur un cercle trigonométrique.
4. Résoudre dans $]0; 2\pi]$ l'inéquation $A(x) > 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....