

CHAPITRE 7

Limites de fonctions

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

Cours et applications / Année scolaire 2026–2027

Objectifs

Interpréter une limite, distinguer limites à droite et à gauche, calculer des limites finies ou infinies, lever des indéterminations et utiliser la comparaison ou l'encadrement.

Parcours du chapitre

I	Limite d'une fonction en un point	2
1	Limite finie	2
2	Lever une forme indéterminée	2
3	Limites infinies et limites latérales	3
4	Existence d'une limite en un point	5
II	Limites à l'infini	6
1	Puissances et comportement à l'infini	6
2	Inverses des puissances	7
3	Polynômes et fractions rationnelles	8
4	Limites et racine carrée	8
III	Opérations sur les limites	9
1	Règles de calcul	9
2	Calculs et indéterminations	10
IV	Limites trigonométriques	10
1	Limites usuelles en un réel	10
2	Limites remarquables en zéro	11
V	Limites et ordre	11
1	Comparaison et encadrement	11
2	Applications de l'encadrement	12

Cadre : fonctions réelles ; angles exprimés en radians.

Les zones pointillées sont réservées aux corrections en classe.

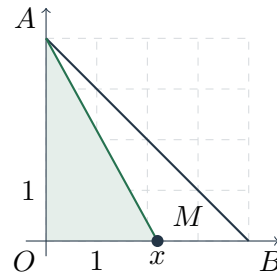
Adaptation du document fourni à Limite de fonction ; erreurs repérées corrigées et figures redessinées.

I. Limite d'une fonction en un point

1. Limite finie

a) Approche géométrique

Le triangle OAB a une aire de 8 cm^2 . Le point M , d'abscisse x , se déplace sur $[OB]$. On note $f(x)$ l'aire du triangle OAM .



Pour $x \in [0, 4]$, on a $f(x) = 2x$. Quand x se rapproche de 4, l'aire se rapproche de 8 ; quand x se rapproche de 0, elle se rapproche de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 8, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

b) Vocabulaire et unicité

Limite finie : lecture intuitive

Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. On considère une fonction f définie sur $]a - \alpha, a + \alpha[$, éventuellement sauf en a . Si $f(x)$ se rapproche aussi près que l'on veut de ℓ lorsque x se rapproche suffisamment de a , avec $x \neq a$, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

La valeur éventuelle de $f(a)$ n'intervient pas dans cette limite.

Unicité de la limite

Si une fonction admet une limite en un point, cette limite est unique.

2. Lever une forme indéterminée

Une forme indéterminée ne donne pas la limite

Les formes usuelles sont

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad +\infty - \infty, \quad 0 \times (\pm\infty).$$

Elles demandent une transformation de l'expression : factorisation, simplification ou multiplication par le conjugué.

Exemple. Utiliser le conjugué. Pour $x \neq 3$,

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{1}{4}.$

Exemple. Factoriser. On a $2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x+1)(2x^2+1)$ et $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 3.$$

Application 1 | Substitution, factorisation et conjugué

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+5}.$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}.$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 3}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x}.$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x} - 1}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$

8. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{3-\sqrt{x+4}}.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Limites infinies et limites latérales

a) Limite infinie

Limite infinie en un point

Dire que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ devient supérieur à tout réel fixé lorsque x est suffisamment proche de a , avec $x \neq a$. Dire que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ signifie que $f(x)$ devient inférieur à tout réel fixé dans les mêmes conditions.

b) À droite et à gauche

Sens d'approche

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$: x se rapproche de a avec $x > a$.
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$: x se rapproche de a avec $x < a$.

Limites usuelles en zéro

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exemple. Étudier le signe du dénominateur. Au voisinage de 3, $x+2 \rightarrow 5 > 0$ et $3x-x^2 = x(3-x)$ est positif à gauche, négatif à droite. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{3x-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{3x-x^2} = -\infty.$$

Application 2 | Calculer des limites latérales

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3-1}{x^2-x}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x^2-x+5}{x-4}.$

5. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-2x^2}{x-x^3}.$

6. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+3}{1-x^2}.$

7. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|}.$

8. $\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} \frac{3x^2-x-1}{1-2x}.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Existence d'une limite en un point

Critère des limites à droite et à gauche

Si f est définie de part et d'autre de a au voisinage de a , et si $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

Si les deux limites latérales existent mais sont différentes, f n'admet pas de limite en a .

Exemple. Pour $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \geq 3, \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si } x < 3, \end{cases}$ on obtient $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2$.
Donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$.

Application 3 | Fonctions définies par morceaux

1. On considère f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{si } x < 1, \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Conclure.

2. On considère g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{-x + 3} & \text{si } x \leq 2, \\ 1 - ax^2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Déterminer une valeur de a pour laquelle g admet une limite en 2.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

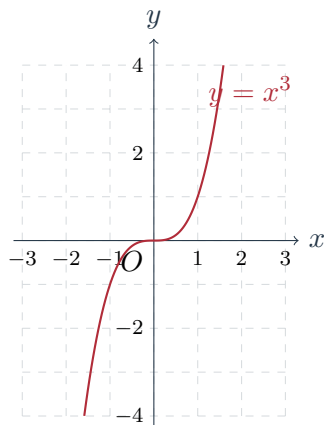
.....

II. Limites à l'infini

1. Puissances et comportement à l'infini

Activité 1 | Observer la fonction cube

La figure représente $f : x \mapsto x^3$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



1. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
2. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus petites, en tendant vers $-\infty$?
3. Exprimer ces deux remarques en utilisant le symbole $\lim$.

Correction

.....

.....

.....

.....

Limites des puissances

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ pair,} \\ -\infty & n \text{ impair.} \end{cases}$$

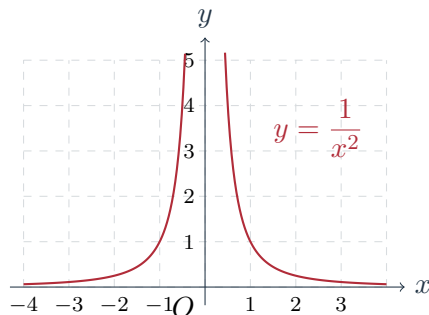
Pour $k \neq 0$, les limites de kx^n se déduisent du signe de k :

	$x \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow -\infty$	
	tout n	n pair	n impair
$k > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$k < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2. Inverses des puissances

Activité 2 | Observer la fonction inverse du carré

La figure représente $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
2. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus petites, en tendant vers $-\infty$?
3. Exprimer ces deux remarques en utilisant le symbole $\lim$.

Correction

.....

.....

.....

.....

Limites des inverses des puissances

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel k ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0.$$

Exemple. En divisant par la puissance dominante,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4x^2} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3 + \frac{1}{x^2} \right) = -3.$$

3. Polynômes et fractions rationnelles

Rôle du terme de plus haut degré

Soient P, Q deux polynômes non nuls dont les termes de plus haut degré sont respectivement ax^n et bx^m , avec $a, b \neq 0$. À $+\infty$ comme à $-\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{bx^m}.$$

Ces règles concernent les limites à l'infini, pas les limites en un réel.

Application 4 | Utiliser les termes dominants

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 5x^2 + 8x).$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 1).$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x + (1 - \sqrt{2})x^2 + 4].$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 2x^3}{3x^3 + 5x^2 + 1}.$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2 - \sqrt{3})x^3 - x^2}{2x^2 - 3}.$

6. $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{|x| - 3x}{|x + 5|}.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Limites et racine carrée

Passage à la racine carrée

Supposons que $f(x) \geq 0$ pour les valeurs de x considérées.

- Si $f(x) \rightarrow \ell$ avec $\ell \geq 0$, alors $\sqrt{f(x)} \rightarrow \sqrt{\ell}$.
- Si $f(x) \rightarrow +\infty$, alors $\sqrt{f(x)} \rightarrow +\infty$.

Ces résultats valent à l'infini, en un point, à droite ou à gauche, sur le domaine de définition.

Application 5 | Passer à la racine carrée

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 5}.$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 1}.$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-4}}.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

III. Opérations sur les limites

1. Règles de calcul

Dans cette section, a désigne un réel ou $\pm\infty$. Les résultats valent aussi pour les limites latérales. On note ℓ, ℓ' des réels et F.I. une forme indéterminée.

Somme, produit et quotient

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$	$\lim(fg)$	$\lim(f/g)$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\ell + \ell'$	$\ell\ell'$	ℓ/ℓ'
$\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	F.I.
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	0
$+\infty$	0	$+\infty$	F.I.	signe à étudier
0	0	0	0	F.I.
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	signe à étudier

Un quotient dont le dénominateur tend vers 0 exige une étude de signe. Sans signe stable, la limite peut ne pas exister.

Quotient et dénominateur tendant vers zéro

Si $f(x) \rightarrow \ell > 0$, alors $g(x) \rightarrow 0^+$ donne $f(x)/g(x) \rightarrow +\infty$ et $g(x) \rightarrow 0^-$ donne $f(x)/g(x) \rightarrow -\infty$. Les signes sont inversés si $\ell < 0$.

2. Calculs et indéterminations

Application 6 | Combiner les règles de calcul

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3 + \frac{1}{x} \right) \left(1 + \frac{2}{x} \right).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 4/x^3}{2 - x^5}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x - 3}}{x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x + 1).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x).$$

Correction

IV. Limites trigonométriques

1. Limites usuelles en un réel

Sinus, cosinus et tangente

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a.$$

Si $a \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$.

Exemple. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sin x = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\pi/4} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \tan x = \sqrt{3}$.

Comportements particuliers

Les fonctions sinus, cosinus et tangente n'ont pas de limite à $+\infty$ ni à $-\infty$. Au voisinage de $\pi/2$,

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \tan x = -\infty.$$

2. Limites remarquables en zéro

Angles en radians

Pour tout réel $a \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit notamment $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$.

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5$.

Application 7 | Utiliser les limites remarquables

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(\pi x)}{x - 1}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$.

6. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

V. Limites et ordre

1. Comparaison et encadrement

Les inégalités ci-dessous doivent être vraies au voisinage du point étudié ou à partir d'un certain rang à l'infini, sur le domaine considéré.

Comparaison pour une limite infinie

- Si $g(x) \leq f(x)$ et $g(x) \rightarrow +\infty$, alors $f(x) \rightarrow +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \rightarrow -\infty$, alors $f(x) \rightarrow -\infty$.

Théorème des gendarmes

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $g(x) \rightarrow \ell$ et $h(x) \rightarrow \ell$, alors $f(x) \rightarrow \ell$. En particulier,

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \quad \text{et} \quad g(x) \rightarrow 0 \quad \implies \quad f(x) \rightarrow \ell.$$

Ces résultats valent à $\pm\infty$, en un réel, à droite ou à gauche.

2. Applications de lencadrement**Application 8 | Comparer des fonctions trigonométriques**

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$.
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2 - \cos x}$.
- On considère f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2$. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x) - 2| \leq |x|$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Les vérifications à garder

- Identifier le point, le sens d'approche et le domaine de définition.
- Une forme indéterminée demande une transformation avant de conclure.
- Dans une racine carrée, $\sqrt{x^2} = |x|$: tenir compte du signe de x .
- Les termes dominants s'utilisent à l'infini.
- Un dénominateur tendant vers zéro exige une étude de signe.
- Pour les limites trigonométriques, les angles sont en radians.