

CHAPITRE 8

Rotation dans le plan

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

2026–2027

Objectifs du chapitre

Définir une rotation et sa réciproque ; construire l'image d'un point ; exploiter la conservation des distances, des angles orientés et du barycentre ; déterminer les images des figures usuelles.

Parcours du chapitre

I	Rotation et rotation réciproque	2
1	Définition et construction	2
2	Exemple et cas particuliers	3
3	Rotation réciproque	3
II	Propriétés d'une rotation	4
1	Conservation des distances	4
2	Angles orientés	4
3	Barycentre, milieu et alignement	6
III	Images des figures usuelles	8
1	Droites, segments, demi-droites et cercles	8
2	Parallélisme, perpendicularité et intersection	8
3	Exercice de synthèse	10

Cours, activités et applications

Les zones pointillées sont réservées à la rédaction des corrections.

ABDELLAOUI Said ABDELLAOUI ACADEMY

I. Rotation et rotation réciproque

Dans tout le chapitre, le plan est orienté dans le sens direct. Les angles orientés sont considérés modulo 2π .

1. Définition et construction

Activité 1 | Construire une image

Soient Ω et A deux points distincts. Construire le point A' tel que

$$\Omega A' = \Omega A \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega A'} \right) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

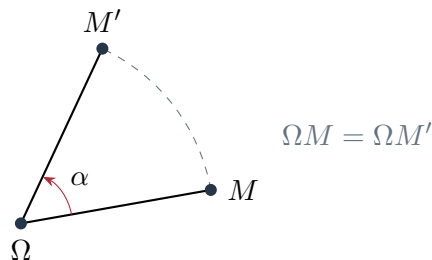
Rotation de centre Ω et d'angle α

La rotation $r = r(\Omega; \alpha)$ transforme chaque point M en un unique point M' tel que :

- si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$;
- si $M \neq \Omega$, alors

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi}.$$

On note $r(M) = M'$.

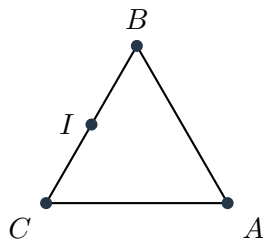


Construire $M' = r(M)$

Pour $M \neq \Omega$, tracer le cercle de centre Ω et de rayon ΩM , puis la demi-droite obtenue en tournant $[\Omega M)$ d'un angle α . Leur intersection est M' .

2. Exemple et cas particuliers

Exemple. Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pi/3 \pmod{2\pi}$, et I le milieu de $[BC]$.



$$\begin{aligned} r(C; \pi/3)(A) &= B, & r(A; -\pi/3)(C) &= B, \\ r(B; \pi/3)(C) &= A, & r(I; \pi)(B) &= C. \end{aligned}$$

Centre, médiatrice et points fixes

- La rotation conserve la distance au centre : $\Omega M' = \Omega M$.
- Si $M \neq \Omega$ et $\alpha \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $M' \neq M$ et Ω appartient à la médiatrice de $[MM']$.
- Si, de plus, $\alpha \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$, le triangle $\Omega MM'$ est isocèle en Ω .
- Si $\alpha \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, le seul point fixe de r est Ω .

Deux rotations particulières

- $\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$: r est l'identité du plan, donc $r(M) = M$ pour tout M .
- $\alpha \equiv \pi \pmod{2\pi}$: r est la symétrie centrale de centre Ω .

3. Rotation réciproque

Activité 2 | Deux quarts de tour

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$. On pose $r_1 = r(O; \pi/2)$ et $r_2 = r(O; -\pi/2)$.

1. Construire la figure.
2. Recopier et compléter le tableau :

$r_1(A) = \dots$	$r_2(D) = \dots$
$r_1(B) = \dots$	$r_2(C) = \dots$
$r_1(C) = \dots$	$r_2(B) = \dots$
$r_1(D) = \dots$	$r_2(A) = \dots$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Rotation réciproque

La rotation réciproque de $r = r(\Omega; \alpha)$ est

$$r^{-1} = r(\Omega; -\alpha).$$

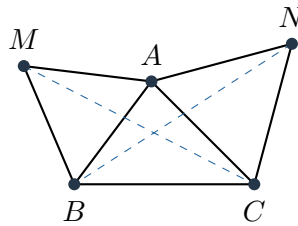
Ainsi, $r(M) = M' \iff r^{-1}(M') = M$.

II. Propriétés d'une rotation**1. Conservation des distances****Propriété**

Si $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$, alors $A'B' = AB$. Une rotation conserve les distances : c'est une isométrie.

Application 1 | Triangles équilatéraux extérieurs

Soit ABC un triangle. Les triangles MAB et NAC sont équilatéraux, construits à l'extérieur de ABC . Montrer que $MC = NB$.



Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Angles orientés**a) Angle d'un vecteur et de son image****Propriété**

Soient $r = r(\Omega; \alpha)$, $A \neq B$, $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$. Alors

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi}.$$

Cette propriété permet de déterminer l'angle d'une rotation à partir de deux points distincts et de leurs images.

Application 2 | Distance et perpendicularité

Les triangles OAB et OCD sont rectangles isocèles en O , avec $A \neq C$ et

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, \quad (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Montrer que $AC = BD$ et que $(AC) \perp (BD)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) Conservation des angles orientés**Propriété**

Soient $A \neq B$ et $C \neq D$. Si A', B', C', D' sont leurs images par une même rotation, alors

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'}) \pmod{2\pi}.$$

Application 3 | Triangle équilatéral et parallélogramme

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pi/3 \pmod{2\pi}$. On construit, à l'extérieur du triangle, le parallélogramme $BCDE$. Soit $r = r(A; \pi/3)$.

1. Construire $F = r(E)$, puis montrer que CFD est équilatéral.
2. Montrer que $(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{CF}; \overrightarrow{CA}) \pmod{2\pi}$.
3. Que peut-on dire de F si E appartient à la droite (AB) ?

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Barycentre, milieu et alignement

a) Conservation du barycentre

Propriété

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ avec $\lambda + \mu \neq 0$, et $G = \text{bar}\{(A; \lambda), (B; \mu)\}$. Si $A' = r(A)$, $B' = r(B)$ et $G' = r(G)$, alors

$$G' = \text{bar}\{(A'; \lambda), (B'; \mu)\}.$$

La propriété s'étend à trois, quatre points ou davantage, lorsque la somme des coefficients est non nulle.

Application 4 | Image d'un barycentre

Soit ABC un triangle et $D = \text{bar}\{(B; 1), (C; 2)\}$. On considère $r = r(A; \pi/2)$.

1. Construire $B' = r(B)$, $C' = r(C)$ et $D' = r(D)$.
2. Montrer que B' , C' et D' sont alignés.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) Milieu et coefficient de colinéarité

Propriété

Une rotation conserve les milieux. Si I est le milieu de $[AB]$, alors $r(I)$ est le milieu de $[r(A)r(B)]$. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{R}$,

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}.$$

Une rotation conserve donc l'alignement et le coefficient de colinéarité.

Application 5 | Image de points alignés

Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On considère $r = r(B; \pi/2)$.

1. Construire $A' = r(A)$, $C' = r(C)$ et $M' = r(M)$.
2. Montrer que A' , C' et M' sont alignés.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 1 | Un triangle rectangle isocèle

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$, et I le milieu de $[BC]$. Les points E et F vérifient

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}.$$

En utilisant la rotation $r = r(I; \pi/2)$, montrer que le triangle EIF est rectangle isocèle en I .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

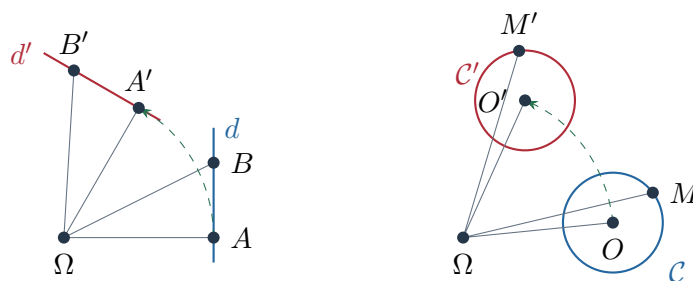
III. Images des figures usuelles

1. Droites, segments, demi-droites et cercles

Propriété

Soient $A \neq B$, $A' = r(A)$, $B' = r(B)$ et $O' = r(O)$.

Figure	Image par r
Droite (AB)	Droite $(A'B')$
Segment $[AB]$	Segment $[A'B']$
Demi-droite $[AB)$	Demi-droite $[A'B')$
Cercle $\mathcal{C}(O; R)$, $R > 0$	Cercle $\mathcal{C}'(O'; R)$



2. Parallélisme, perpendicularité et intersection

Propriété

Une rotation transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles, et deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

Si deux droites d_1 et d_2 se coupent en M , alors leurs images d'_1 et d'_2 se coupent en $r(M)$:

$$r(d_1 \cap d_2) = r(d_1) \cap r(d_2).$$

Déterminer l'image d'un point d'intersection

Identifier deux droites passant par le point, déterminer leurs images, puis prendre l'intersection des deux droites images.

Application 6 | Image d'un point dans un carré

Soit $ABCD$ un carré tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$. Soit $E \in]B, C[$. La perpendiculaire à (AE) passant par A coupe (DC) en F . On pose $r = r(A; \pi/2)$.

1. Déterminer les images des droites (BC) et (AE) par r .
2. Déterminer $r(E)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Application 7 | Image d'un cercle et d'une intersection

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$. Soit I le milieu de $[BC]$ et $r = r(I; \pi/2)$. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre C et passe par I .

1. Construire le cercle $\mathcal{C}'$, image de $\mathcal{C}$ par r .
2. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe $[AC]$ en E et le cercle $\mathcal{C}'$ coupe $[AB]$ en F . Montrer que $r(E) = F$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Exercice de synthèse

Exercice 2 | Rotation, barycentre et intersection

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$. Les points I et J sont définis par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}.$$

La droite (IC) coupe (BD) en M et la droite (JD) coupe (AC) en N . On considère $r = r(O; \pi/2)$.

1. Déterminer $r(A)$ et $r(B)$.
2. a. Montrer que $I = \text{bar}\{(A; 1), (B; -3)\}$.
b. En déduire que $r(I) = J$.
3. a. Déterminer les images des droites (BD) et (IC) .
b. En déduire que $r(M) = N$.
4. a. Montrer que $IM = JN$.
b. Montrer que $(CM) \perp (DN)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

L'essentiel

- $r(\Omega; \alpha)$: distance au centre conservée et angle de rotation α .
- $r^{-1} = r(\Omega; -\alpha)$; Ω est fixe.
- Distances, angles orientés, barycentres, milieux et alignement sont conservés.
- Les droites, segments, demi-droites et cercles ont des images de même nature.
- Pour exploiter une rotation, identifier d'abord les points et figures images.