

CHAPITRE 9

Dérivation et ses applications

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

2026–2027

Objectifs du chapitre

Définir le nombre dérivé et la tangente ; étudier la dérivabilité à droite et à gauche ; utiliser l'approximation affine ; calculer des fonctions dérivées ; exploiter la dérivée pour étudier les variations et les extremums ; résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$.

Parcours du chapitre

I	Dérivabilité d'une fonction en un point	2
1	Nombre dérivé	2
2	Tangente à la courbe représentative d'une fonction	2
3	Dérivabilité à droite et à gauche en un point	3
4	Demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées	4
5	Approximation locale d'une fonction par une fonction affine	5
II	Fonctions dérivées	6
1	Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle	6
2	Dérivées des fonctions usuelles	7
3	Opérations sur les fonctions dérivées	7
4	Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$	8
5	Dérivée de la fonction $x \mapsto (u(x))^n$	9
6	Dérivée de la fonction $x \mapsto u(ax + b)$	9
7	Dérivées successives	10
III	Applications de la dérivation	11
1	Sens de variation d'une fonction	11
2	Extremums d'une fonction sur un intervalle	12
3	Équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$	13

Cours, activités et applications

Les zones pointillées sont réservées à la rédaction des corrections.

ABDELLAOUI Said ABDELLAOUI ACADEMY

I. Dérivabilité d'une fonction en un point

1. Nombre dérivé

Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel L tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

Le réel L est appelé **nombre dérivé** de f en a ; on le note $f'(a)$.

Application 1 | Calculer un nombre dérivé

Montrer que f est dérivable en a et déterminer $f'(a)$ dans chacun des cas :

1. $f(x) = x^2$; $a = \sqrt{2}$;
2. $f(x) = x^3$; $a = 1$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

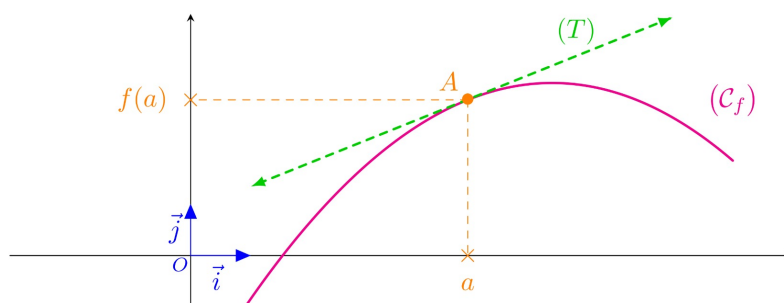
2. Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Tangente en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel $a \in I$.

1. La tangente à la courbe représentative de f au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.
2. Une équation de cette tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Application 2 | Tangente à une parabole

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Correction

.....

.....

.....

.....

3. Dérivabilité à droite et à gauche en un point

Dérivabilité à droite, à gauche

1. Soit f définie sur un intervalle $[a; a + \alpha[$ avec $\alpha > 0$. On dit que f est dérivable à droite en a s'il existe un réel L tel que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

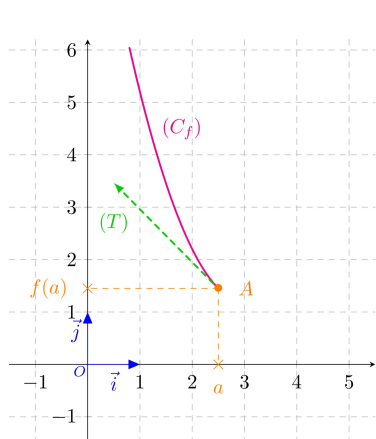
L est le nombre dérivé de f à droite en a , noté $f'_d(a)$.

2. Soit f définie sur un intervalle $]a - \alpha; a]$ avec $\alpha > 0$. On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un réel L tel que

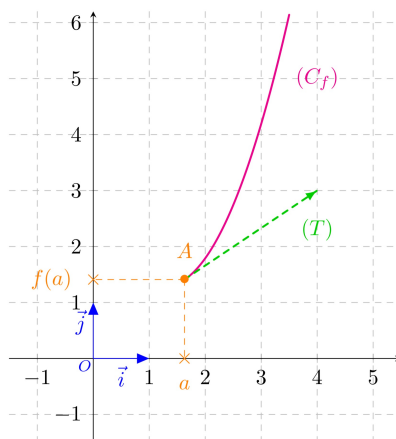
$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

L est le nombre dérivé de f à gauche en a , noté $f'_g(a)$.

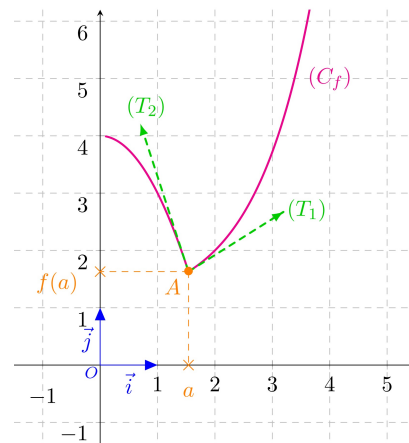
Interprétation géométrique. Si f est dérivable à droite (ou à gauche) en a , la courbe représentative de f admet au point $A(a; f(a))$ une demi-tangente de coefficient directeur $f'_d(a)$ (ou $f'_g(a)$).



$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$



(T_1) : demi-tangente à droite
(pente $f'_d(a)$) ; (T_2) :
demi-tangente à gauche (pente
 $f'_g(a)$)

Dérivabilité et dérivées latérales

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Application 3 | Dérivabilité en 0

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Correction

.....

.....

.....

.....

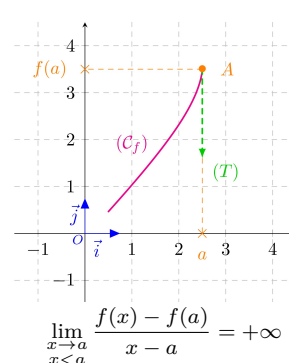
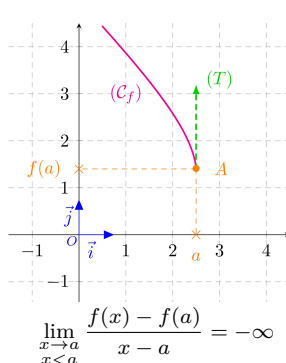
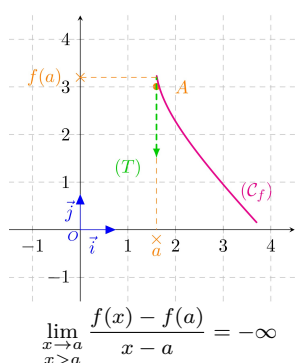
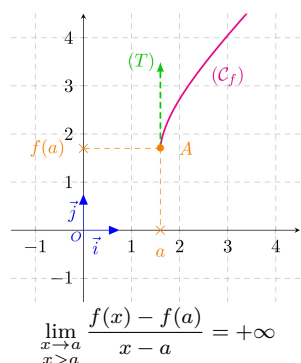
.....

4. Demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées

Demi-tangente verticale

Soit f une fonction définie au voisinage de a .

1. Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$, la courbe admet à droite au point d'abscisse a une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.
2. Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$, la courbe admet à droite au point d'abscisse a une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.
3. Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$, la courbe admet à gauche au point d'abscisse a une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.
4. Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$, la courbe admet à gauche au point d'abscisse a une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.



Application 4 | Racine carrée et demi-tangentes

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

1. Montrer que f n'est pas dérivable à gauche en 2. Interpréter géométriquement le résultat.
2. Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

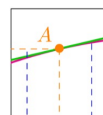
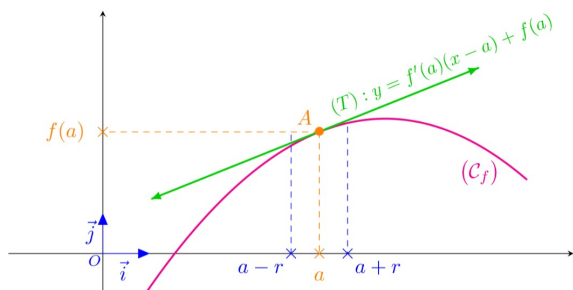
5. Approximation locale d'une fonction par une fonction affine

Fonction affine tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel $a \in I$.

1. La fonction $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée *fonction affine tangente* de f en a .
2. Une approximation affine de f au voisinage de a est donnée par

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a).$$



Au voisinage de a , la courbe (C_f) et la droite (T) se confondent, d'où :

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$$

Application 5 | Approximations affines

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2$.

1. Montrer que f est dérivable en $a = 0$ et en $b = 1$.
2. Expliciter les fonctions affines tangentes de f en a et en b .
3. Donner une approximation affine de chacun des réels $(1,0004)^2$ et $(2,00001)^2$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II. Fonctions dérivées

1. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Dérivabilité sur un intervalle

Soient $a < b$ deux réels.

1. f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a; b[$.
2. f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a; b]$ si elle est dérivable :
 - a. en tout point de $]a; b[$;
 - b. à droite en a ;
 - c. à gauche en b .
3. On définit de façon analogue la dérivabilité sur $]a; b]$ et sur $[a; b[$.

Fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . La **fonction dérivée** de f est la fonction notée f' qui, à tout $x \in I$, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x :

$$f' : x \longmapsto f'(x).$$

2. Dérivées des fonctions usuelles

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans son domaine de définition. Le tableau donne la dérivée des fonctions usuelles.

Fonction f	Domaine de f	Fonction f'	Domaine de f'
constante c	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Pour $\frac{1}{x}$ et $\tan x$, la dérivée est valable sur tout intervalle inclus dans le domaine de définition.

3. Opérations sur les fonctions dérivées

Somme, produit, quotient

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Les fonctions $u + v$, $u \times v$ et ku sont dérivables sur I et, pour tout $x \in I$:

1. $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$;
2. $(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
3. $(ku)'(x) = ku'(x)$.

Si v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et, pour tout $x \in I$:

4. $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$;
5. $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

Application 6 | Calculer des dérivées

Déterminer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1. $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 5x)$;
2. $f(x) = \frac{5}{2}x^3 - 7x^2 - 9x + \sqrt{8}$;
3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;
4. $f(x) = x^3 \cos x$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Conséquences

- Toute fonction polynôme est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable en tout point où elle est définie.

4. Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ **Dérivée de $\sqrt{u}$**

Soit u une fonction définie sur un intervalle I . Si u est strictement positive et dérivable sur I , alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Application 7 | Dériver une racine carrée

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Dérivée de la fonction $x \mapsto (u(x))^n$ **Dérivée de u^n**

Soit n un entier naturel non nul. Si u est dérivable sur un intervalle I , alors u^n est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad ((u(x))^n)' = n u'(x) (u(x))^{n-1}.$$

Application 8 | Dériver une puissance

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}x - \frac{\pi}{3}\right)^7 \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{x}{x^4 + 1}\right)^5.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Dérivée de la fonction $x \mapsto u(ax + b)$ **Composée avec une fonction affine**

Soient a et b deux réels et u une fonction dérivable sur un intervalle J . La fonction $x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable sur tout intervalle I tel que $ax + b \in J$ pour tout $x \in I$, et sa dérivée est $x \mapsto a u'(ax + b)$.

Application 9 | Dériver $u(ax + b)$

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x - 3)$ et $g(x) = \sin\left(-\frac{5}{7}x + \frac{1}{6}\right)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Conséquences

Fonction f	Fonction f'	Domaine de f et de f'
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\tan(ax + b)$	$a(1 + \tan^2(ax + b))$	$ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

7. Dérivées successives**Dérivée seconde, dérivée d'ordre n**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Si f' est dérivable sur I , sa dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est la *dérivée seconde* (ou dérivée d'ordre 2) de f .
2. Par itération, pour tout entier $n \geq 2$, la dérivée d'ordre n , notée $f^{(n)}$, est la dérivée de la dérivée d'ordre $n - 1$:

$$(f')' = f^{(2)} ; \quad (f^{(2)})' = f^{(3)} ; \quad \dots ; \quad (f^{(n-1)})' = f^{(n)}.$$

Application 10 | Dérivées d'ordre 1, 2 et 3

Déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction f dans chacun des cas :

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6$;
2. $f(x) = \cos x + \sin x$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III. Applications de la dérivation

1. Sens de variation d'une fonction

Dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. $f' \geq 0$ sur I si et seulement si f est croissante sur I .
2. $f' \leq 0$ sur I si et seulement si f est décroissante sur I .
3. $f' = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I .

Remarque

Si f' est strictement positive sur I (sauf en un nombre fini de points), alors f est strictement croissante sur I . Si f' est strictement négative sur I (sauf en un nombre fini de points), alors f est strictement décroissante sur I .

Application 11 | Variations de $(x - 1)^3$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)^3$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

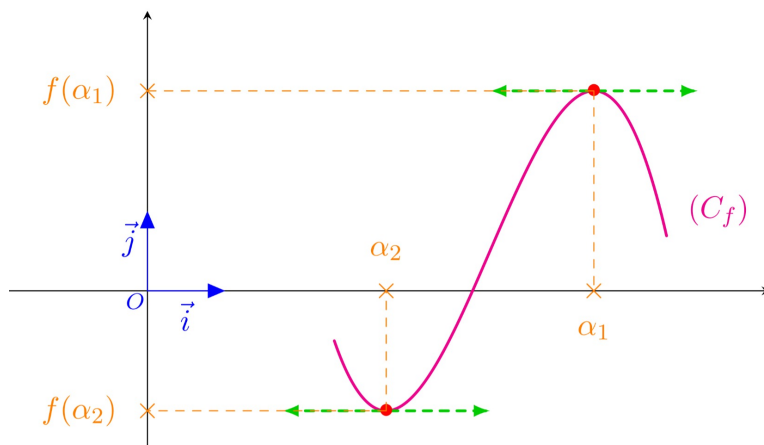
.....

2. Extremums d'une fonction sur un intervalle

Extremum et dérivée nulle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et α un élément de I qui n'est pas une extrémité de I . Si f admet un extremum en α , alors $f'(\alpha) = 0$.

En particulier, la tangente à la courbe de f au point $(\alpha; f(\alpha))$ a pour pente $f'(\alpha) = 0$: c'est une droite horizontale.



Remarque

Cette propriété se lit sur le tableau de variations :

- un minimum local correspond au cas où f' s'annule en α , est négative juste avant α (donc f décroît) et positive juste après (donc f croît) ;
- le cas d'un maximum local est analogue : f' s'annule, est positive avant α et négative après.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et α un élément de I qui n'est pas une extrémité de I . Si f' s'annule et change de signe en α , alors f admet un extremum en α .

Application 12 | Extremums de $3x - x^3$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - x^3$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f admet un extremum sur chacun des intervalles $\left[-\frac{3}{2}; 0\right]$ et $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ **Équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$**

Soit ω un réel non nul.

1. L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, d'inconnue la fonction y , est une *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants*.
2. Toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ pour tout x est appelée *solution* sur $\mathbb{R}$ de cette équation.

Solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$

Soit ω un réel non nul. L'ensemble des solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

où A et B sont deux réels quelconques.

Remarque

On peut aussi écrire la solution générale sous la forme $x \mapsto A \cos(\omega x + B)$ ou $x \mapsto A \sin(\omega x + B)$, où A et B sont deux réels quelconques.

Application 13 | Résoudre une équation différentielle

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 9y = 0$;
2. $\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2u(t) = 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....