

CHAPITRE 10

Vecteurs de l'espace

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

2026–2027

Objectifs du chapitre

Définir un vecteur de l'espace et opérer sur les vecteurs ; reconnaître des vecteurs colinéaires ou coplanaires ; caractériser une droite et un plan par des vecteurs ; démontrer des parallélismes dans l'espace.

Parcours du chapitre

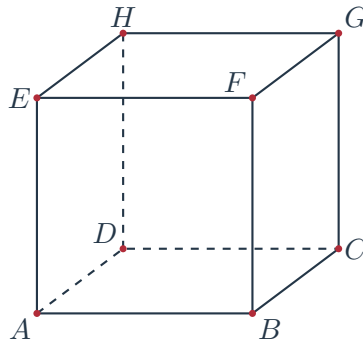
I	Vecteurs de l'espace	2
1	Définition et caractérisation	2
II	Opérations dans $\mathcal{V}_3$	3
1	Addition	3
2	Produit d'un vecteur par un réel	4
III	Vecteurs colinéaires	5
1	Colinéarité de deux vecteurs	5
2	Droite vectorielle et détermination d'une droite	6
IV	Vecteurs coplanaires	7
1	Trois vecteurs coplanaires	7
2	Plan vectoriel et détermination d'un plan	8
V	Parallélisme dans l'espace	9
1	Parallélisme de deux droites	9
2	Parallélisme d'une droite et d'un plan	9
3	Parallélisme de deux plans	10

Cours, activités et applications

Les zones pointillées sont réservées à la rédaction des corrections.

ABDELLAOUI Said ABDELLAOUI ACADEMY

Dans tout le chapitre, $ABCDEFGH$ désigne un cube (ou un parallélépipède) dont les sommets E, F, G, H sont situés au-dessus de A, B, C, D respectivement.



I. Vecteurs de l'espace

1. Définition et caractérisation

Activité 1 | Vecteurs égaux dans un cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessus, citer tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$, puis tous ceux égaux à $\overrightarrow{AE}$. Justifier en utilisant des parallélogrammes.

Correction

.....

.....

.....

.....

Vecteur de l'espace

Soient A et B deux points de l'espace $\mathcal{E}$.

- Si $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
 - sa *direction* : celle de la droite (AB) ;
 - son *sens* : de A vers B ;
 - sa *norme* : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Si $A = B$, on obtient le *vecteur nul*, noté $\vec{0}$.

L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{V}_3$.

Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme. Pour quatre points A, B, M, N :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \iff ABNM \text{ est un parallélogramme (éventuellement aplati).}$$

Représentant d'un vecteur

Soit O un point de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}_3$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Autrement dit, l'application $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{V}_3$.

II. Opérations dans $\mathcal{V}_3$

1. Addition

Somme de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On choisit des points A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. La somme $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}} \quad (\text{relation de Chasles}).$$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ où $ABDC$ est un parallélogramme (règle du parallélogramme).

Propriétés de l'addition

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathcal{V}_3$:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité) ;
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativité) ;
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ est l'élément neutre) ;
4. tout vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ admet un opposé $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

On dit que $(\mathcal{V}_3, +)$ est un *groupe commutatif*.

Différence de deux vecteurs

La *différence* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. En particulier, pour tous points A, B, C :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

Application 1 | Simplifier une somme

Dans le cube $ABCDEFGH$, simplifier en un seul vecteur :

$$\vec{t} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CG}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

2. Produit d'un vecteur par un réel

Produit par un réel

Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. Le vecteur $k\vec{u}$ est défini ainsi :

- si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$;
- sinon, $k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$, le même sens si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$, et pour norme $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$.

Règles de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathcal{V}_3$ et tous réels k, k' :

1. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
2. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;
3. $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$;
4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Ces propriétés, jointes à celles de l'addition, expriment que $(\mathcal{V}_3, +, \cdot)$ est un *espace vectoriel réel*.
De plus : $k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Application 2 | Milieux et vecteurs

Soit $ABCD$ un tétraèdre ; I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CD]$. Montrer que

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III. Vecteurs colinéaires

1. Colinéarité de deux vecteurs

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors ils sont non nuls.

Colinéarité et alignement

1. Pour des points $A \neq B$ et $C \neq D$: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si $(AB) \parallel (CD)$ ou $(AB) = (CD)$.
2. Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Combinaison nulle

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et a, b deux réels.

1. Si $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \implies a = b = 0$.

Application 3 | Droite parallèle dans un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$.
2. Que peut-on dire des droites (MN) et (BD) ?

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Application 4 | Centre de gravité et alignement

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et G le point tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Montrer que A , G et I sont alignés et exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AI}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Application 5 | Identifier des coefficients

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Déterminer les réels a et b tels que

$$a(\vec{u} + \vec{v}) + b(2\vec{u} - \vec{v}) = 5\vec{u} + \vec{v}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

2. Droite vectorielle et détermination d'une droite**Droite vectorielle**

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ s'appelle la *droite vectorielle* engendrée par $\vec{u}$:

$$\mathbb{R}\vec{u} = \{k\vec{u} ; k \in \mathbb{R}\}.$$

Détermination vectorielle d'une droite

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} = k\vec{u}$, où $k \in \mathbb{R}$, est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; on la note $D(A, \vec{u})$:

$$M \in D(A, \vec{u}) \iff (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \vec{AM} = k\vec{u}.$$

Remarque

Le couple $(A, \vec{u})$ est un repère de la droite $D(A, \vec{u})$. Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de cette droite.

IV. Vecteurs coplanaires

1. Trois vecteurs coplanaires

Rappel : déterminer un plan

Un plan est déterminé par trois points non alignés, par deux droites sécantes (ou strictement parallèles), ou par une droite et un point extérieur à cette droite.

Vecteurs coplanaires

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs et A un point. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont *coplanaires* si les points A , B , C , D sont coplanaires.

Caractérisation de la coplanarité

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Remarque

Si deux des vecteurs sont colinéaires, alors les trois vecteurs sont coplanaires.

Application 6 | Trois vecteurs coplanaires dans un cube

Dans le cube $ABCDEFGH$, I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[EH]$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Application 7 | Quatre points coplanaires

Soient A, B, C, D, E cinq points de l'espace tels que $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - 3\overrightarrow{ED} = \vec{0}$. Montrer que les points A, B, C, D sont coplanaires.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Plan vectoriel et détermination d'un plan**Plan vectoriel**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble des vecteurs $\vec{w}$ de $\mathcal{V}_3$ de la forme $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$, où $x, y \in \mathbb{R}$, est le *plan vectoriel* engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Détermination vectorielle d'un plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, où $x, y \in \mathbb{R}$, est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{v}$; on le note $P(A; \vec{u}, \vec{v})$:

$$P(A; \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in \mathcal{E} ; \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}\}.$$

Remarque

Le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan $P(A; \vec{u}, \vec{v})$; le couple (x, y) est le couple des coordonnées de M dans ce repère.

V. Parallélisme dans l'espace

1. Parallélisme de deux droites

Droites parallèles

1. $D(A, \vec{u}) \parallel \Delta(B, \vec{v}) \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$
 2. Pour $A \neq B$ et $C \neq D$: $(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{CD} = k \overrightarrow{AB}$ pour un réel k .
- (Ici, $\parallel$ parallèles $\hat{=}$ inclut le cas de droites confondues.)

Application 8 | Milieux d'un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre. I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB], [CD], [AC], [BD]$. Montrer que $IKJL$ est un parallélogramme.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Parallélisme d'une droite et d'un plan

Droite et plan parallèles

La droite $D(A, \vec{u})$ est parallèle au plan $P(B; \vec{v}, \vec{w})$ si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires, c'est-à-dire s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$.

Remarque

Dans ce cas, la droite est soit strictement parallèle au plan, soit contenue dans le plan : elle est contenue dans le plan dès qu'un de ses points appartient au plan.

Application 9 | Droite parallèle à un plan

Dans le cube $ABCDEFGH$, montrer que la droite (AH) est parallèle au plan (BCG) . Est-elle contenue dans ce plan ?

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

3. Parallélisme de deux plans

Plans parallèles

Deux plans $P(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $Q(B; \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'$ sont coplanaires *et* les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}'$ sont coplanaires.

Remarque

Une seule de ces deux conditions ne suffit pas : deux plans sécants peuvent partager une direction de droite.

Application 10 | Deux plans parallèles

Dans le cube $ABCDEFGH$, montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 1 | Synthèse

Soit $ABCD$ un tétraèdre, E le milieu de $[BC]$ et F le point tel que $\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AD}$.

1. Exprimer $\vec{EF}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.
2. Soit G le point tel que $\vec{EG} = \vec{AD}$. Que peut-on dire des droites (AD) et (EG) ? Justifier.
3. Montrer que les vecteurs $\vec{EF}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas coplanaires.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....