

CHAPITRE 11

Étude des fonctions

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

2026–2027

Objectifs du chapitre

Déterminer les branches infinies d'une courbe (asymptotes, branches paraboliques) ; reconnaître un axe ou un centre de symétrie ; étudier la convexité d'une courbe et ses points d'inflexion.

Parcours du chapitre

I	Branches infinies	2
1	Droites asymptotiques	2
2	Directions asymptotiques	6
II	Éléments de symétrie d'une courbe	9
1	Axe de symétrie	9
2	Centre de symétrie	10
III	Convexité d'une courbe	11
1	Convexité et concavité	11
2	Point d'inflexion	11

Cours, activités et applications

Les zones pointillées sont réservées à la rédaction des corrections.

ABDELLAOUI Said ABDELLAOUI ACADEMY

I. Branches infinies

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction numérique, D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Droites asymptotiques

a) Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

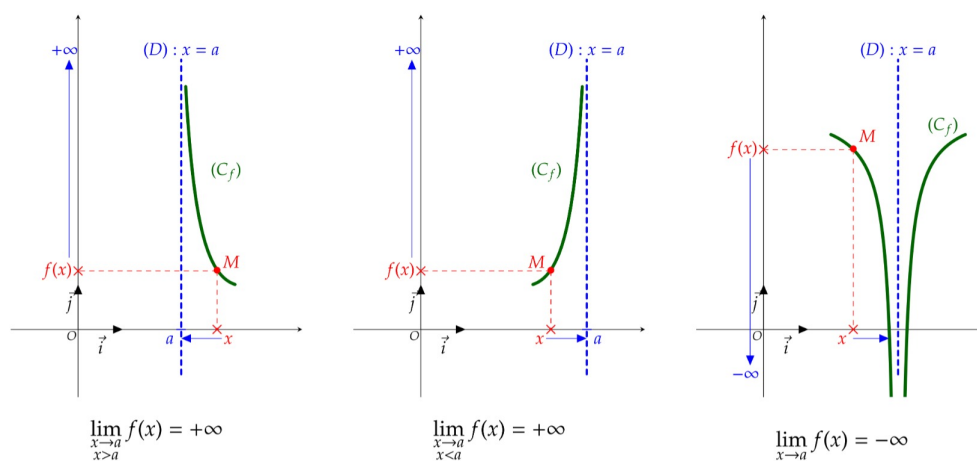
Asymptote verticale

Soit a un réel. On dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à (C_f) si l'une au moins des limites suivantes est infinie :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty.$$

Remarque

Une asymptote verticale est une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.



Application 1 | Asymptotes verticales

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

1. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$. En déduire que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote de (C_f) .
2. Montrer que la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote de (C_f) .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

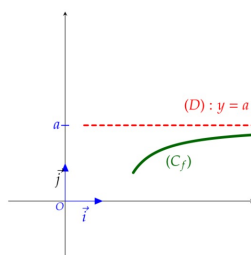
b) Asymptote parallèle à l'axe des abscisses**Asymptote horizontale**

Soit a un réel. On dit que la droite d'équation $y = a$ est une **asymptote horizontale** à (C_f) si

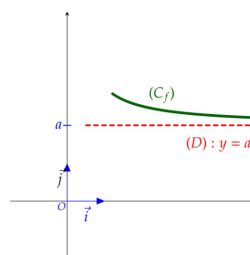
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a.$$

Remarque

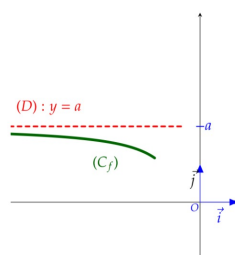
1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, on dit aussi que la droite d'équation $y = a$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$; de même au voisinage de $-\infty$.
2. Si la droite $(D) : y = a$ est une asymptote horizontale à (C_f) , pour étudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) , il suffit d'étudier le signe de $f(x) - a$.



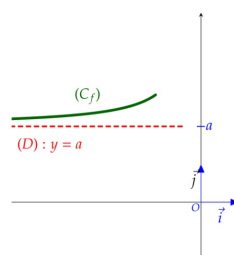
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

Application 2 | Asymptote horizontale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{(x-1)^2}{2x^2+5}$.

1. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
2. Montrer que (C_f) est au-dessus de (D) sur $[1; +\infty[$ et au-dessous de (D) sur $] -\infty; -1]$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) Asymptote oblique

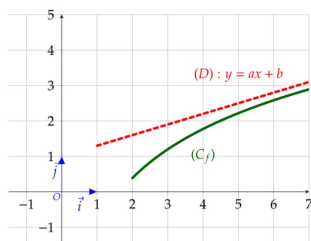
Asymptote oblique

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à (C_f) si

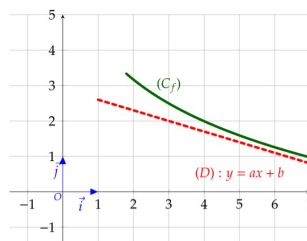
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Remarque

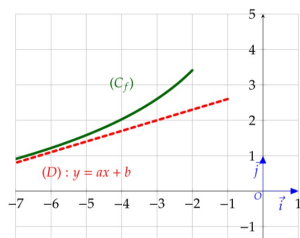
Si la droite $(D) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) , pour étudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) , il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$.



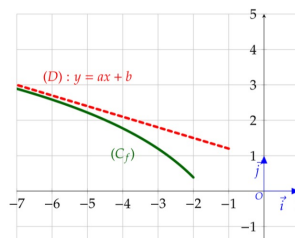
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Application 3 | Asymptote oblique et position relative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$.

- Montrer que la droite (D) d'équation $y = -3x - 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.
- Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

La propriété suivante donne une méthode pratique pour déterminer une asymptote oblique.

Caractérisation d'une asymptote oblique

La droite d'équation $y = ax + b$ (avec $a \neq 0$) est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b.$$

Le résultat est analogue au voisinage de $-\infty$ en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

Application 4 | Asymptotes de $\sqrt{x^2 + 1}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ que l'on précisera.
2. Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ que l'on précisera.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

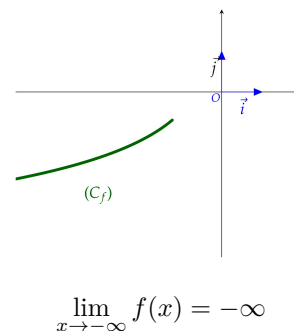
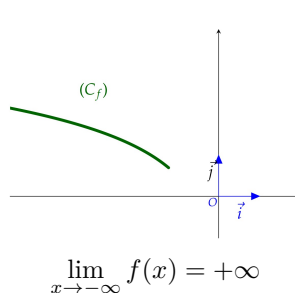
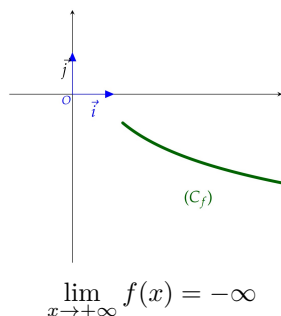
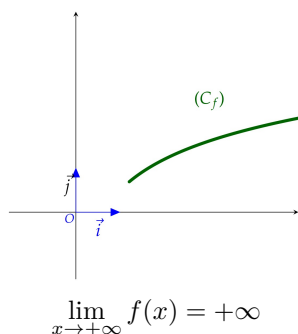
.....

2. Directions asymptotiques**a) Branche parabolique de direction l'axe des abscisses****Branche parabolique de direction (Ox)**

On dit que (C_f) présente une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Au voisinage de $-\infty$, les mêmes conditions s'écrivent avec $x \rightarrow -\infty$.

**Application 5 | Branche parabolique de direction (Ox)**

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x}$. Montrer que (C_f) présente une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $-\infty$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

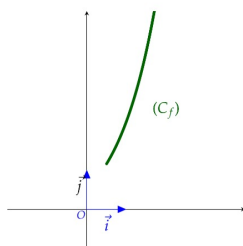
b) Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

Branche parabolique de direction (Oy)

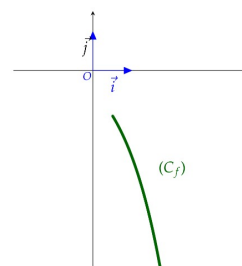
On dit que (C_f) présente une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty.$$

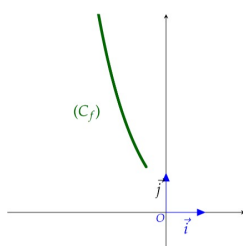
Au voisinage de $-\infty$, les mêmes conditions s'écrivent avec $x \rightarrow -\infty$.



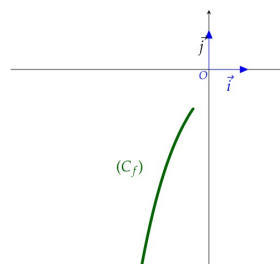
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Application 6 | Branche parabolique de direction (Oy)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 3 + \sqrt{x} + x^2$. Montrer que (C_f) présente une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

Correction

.....

.....

.....

.....

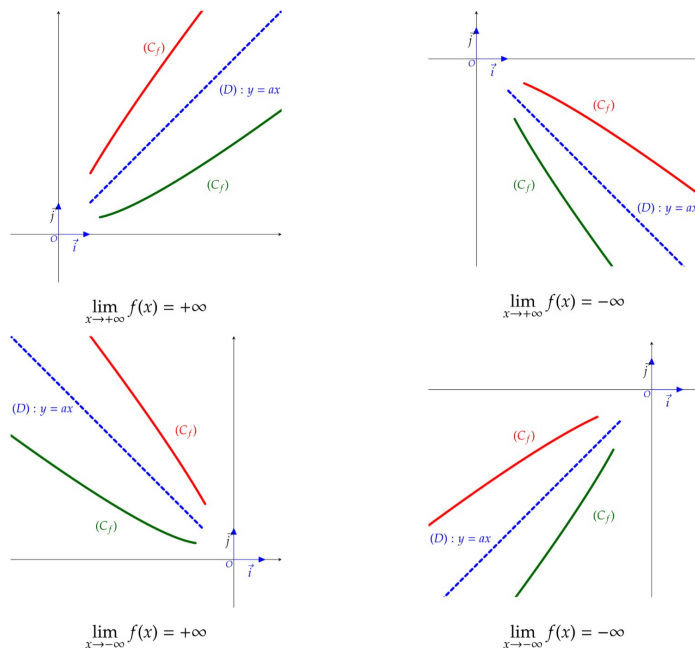
.....

c) Branche parabolique de direction la droite $y = ax$ Branche parabolique de direction $y = ax$

Soit a un réel non nul. On dit que (C_f) présente une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty.$$

Au voisinage de $-\infty$, les mêmes conditions s'écrivent avec $x \rightarrow -\infty$.

Application 7 | Branche parabolique de direction $y = \frac{1}{2}x$

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-2} + \frac{x}{2}$. Montrer que (C_f) présente une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ au voisinage de $+\infty$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Bilan des branches infinies en $+\infty$

Si $f(x) \rightarrow \pm\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, on étudie $\frac{f(x)}{x}$:

- limite 0 : branche parabolique de direction (Ox) ;
- limite infinie : branche parabolique de direction (Oy) ;
- limite $a \neq 0$: on étudie $f(x) - ax$; si cette limite est un réel b , la droite $y = ax + b$ est asymptote oblique ; si elle est infinie, branche parabolique de direction $y = ax$.

II. Éléments de symétrie d'une courbe

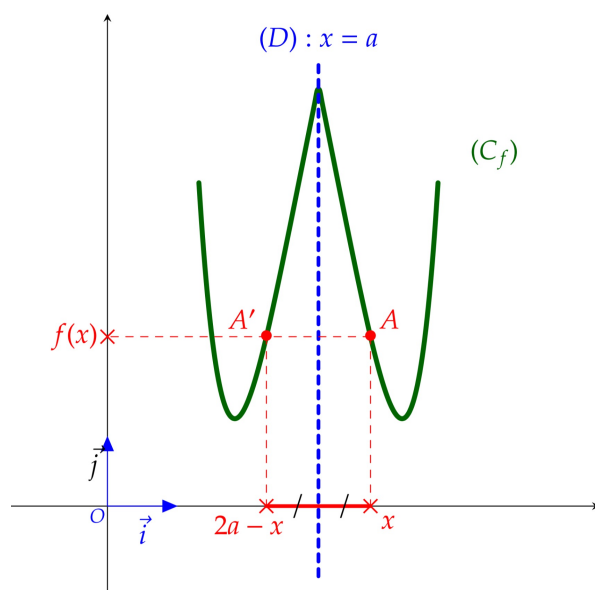
1. Axe de symétrie

Axe de symétrie

Soit a un réel. La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si, pour tout $x \in D_f$:

1. $2a - x \in D_f$;
2. $f(2a - x) = f(x)$.

Cas particulier : si $a = 0$, l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées (Oy) ; c'est le cas d'une fonction paire.



Application 8 | Axe de symétrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $2-x \neq 1$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(2-x) = f(x)$.
3. En déduire que la droite $(D) : x = 1$ est un axe de symétrie de (C_f) .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Centre de symétrie**Centre de symétrie**

Soient a et b deux réels. Le point $A(a; b)$ est un centre de symétrie de (C_f) si et seulement si, pour tout $x \in D_f$:

1. $2a - x \in D_f$;
2. $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

Cas particulier : si $a = b = 0$, le centre de symétrie est l'origine O du repère ; c'est le cas d'une fonction impaire.

Application 9 | Centre de symétrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $-1-x \neq -\frac{1}{2}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $f(-1-x) = 1 - f(x)$.
3. En déduire que le point $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

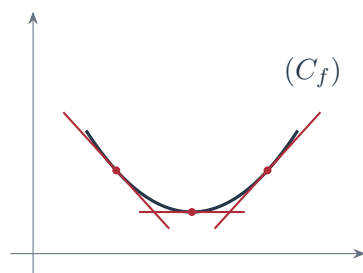
.....

III. Convexité d'une courbe

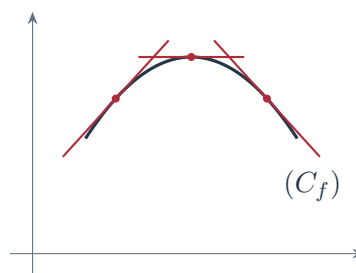
1. Convexité et concavité

Courbe convexe, courbe concave

1. (C_f) est **convexe** si elle est située au-dessus de toutes ses tangentes.
2. (C_f) est **concave** si elle est située au-dessous de toutes ses tangentes.



(C_f) est **convexe** :
au-dessus de ses tangentes



(C_f) est **concave** :
au-dessous de ses tangentes

Convexité et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

1. Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors (C_f) est convexe sur I .
2. Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors (C_f) est concave sur I .

Application 10 | Convexité de x^4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que la courbe (C_f) est convexe sur $\mathbb{R}$.

Correction

.....

.....

.....

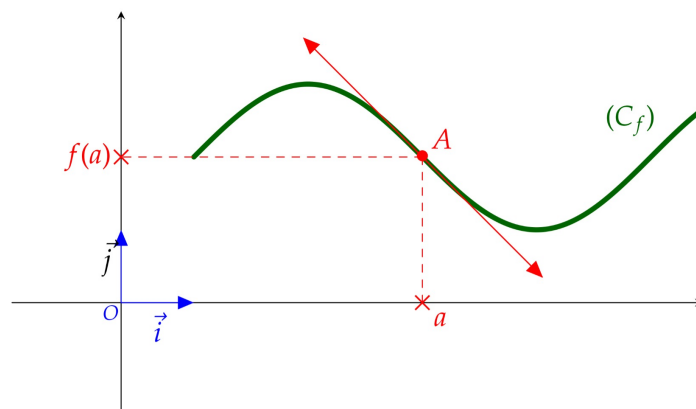
.....

.....

2. Point d'inflexion

Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . Le point A de (C_f) d'abscisse $a \in I$ est un **point d'inflexion** de (C_f) si (C_f) change de convexité en a .



Le point $A(a; f(a))$ est point d'inflexion

Remarque

Si $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) , alors (C_f) traverse sa tangente au point A .

Point d'inflexion et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Si f'' s'annule et change de signe en a , alors le point d'abscisse a est un point d'inflexion de (C_f) .

Application 11 | Point d'inflexion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 3$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Étudier la convexité de la courbe (C_f) sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le point d'abscisse $a = 0$ est un point d'inflexion de (C_f) .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....