

CHAPITRE 12

Géométrie dans l'espace

1 BAC Sc. expérimentales BIOF

2026–2027

Objectifs du chapitre

Opérer sur les vecteurs de l'espace ; reconnaître des vecteurs colinéaires ou coplanaires ; se repérer dans l'espace ; utiliser le déterminant ; représenter une droite et un plan (représentations paramétriques et équations cartésiennes) ; étudier leurs positions relatives.

Parcours du chapitre

I	Calcul vectoriel dans l'espace	2
1	Notion de vecteur de l'espace	2
2	Opérations sur les vecteurs	2
II	Vecteurs colinéaires dans l'espace	5
1	Deux vecteurs colinéaires	5
2	Caractérisation vectorielle d'une droite	6
III	Vecteurs coplanaires	7
1	Trois vecteurs coplanaires	7
2	Caractérisation vectorielle d'un plan	7
IV	Repérage dans l'espace	9
1	Coordonnées d'un point dans un repère	9
2	Coordonnées d'un vecteur dans une base	10
V	Déterminant et coplanarité	12
1	Déterminant de trois vecteurs	12
2	Critère de coplanarité	12
VI	Droites dans l'espace	13
1	Représentation paramétrique d'une droite	13
2	Deux équations cartésiennes d'une droite	13
VII	Plans dans l'espace	14
1	Équation cartésienne d'un plan	14
2	Représentation paramétrique d'un plan	15
VIII	Positions relatives de droites et de plans	16
1	Deux droites	16
2	Deux plans	17
3	Droite et plan	17

Cours, activités et applications

Les zones pointillées sont réservées à la rédaction des corrections.

ABDELLAOUI Said ABDELLAOUI ACADEMY

I. Calcul vectoriel dans l'espace

1. Notion de vecteur de l'espace

Vecteur de l'espace

Soient A et B deux points de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le bipoint (A, B) d'origine A et d'extrémité B .

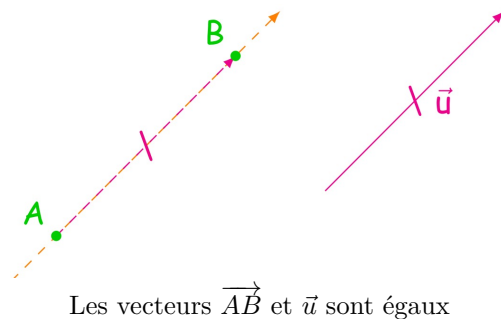
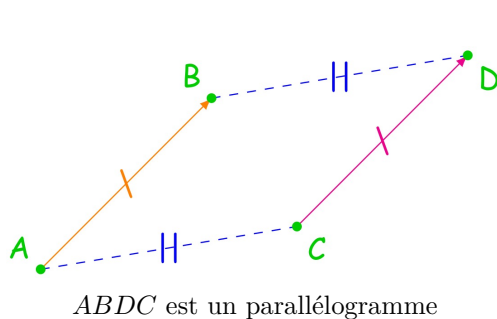
1. Si $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
 - a. une *direction*, celle de la droite (AB) ;
 - b. un *sens*, de A vers B ;
 - c. une *norme*, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, égale à la distance AB .
2. Si $A = B$, $\overrightarrow{AB}$ est le *vecteur nul*, noté $\vec{0}$.

Remarque

L'ensemble des vecteurs de l'espace est appelé *espace vectoriel* ; on le note $\mathcal{V}_3$.

Égalité de vecteurs et parallélogramme

1. Pour tout point A de l'espace et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
2. Un quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



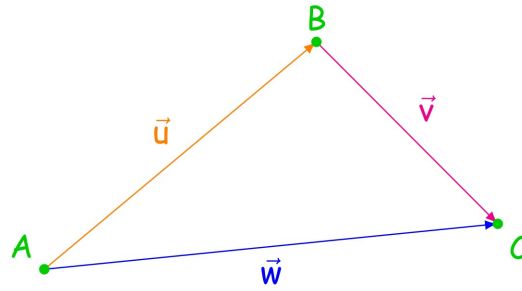
2. Opérations sur les vecteurs

On définit, comme dans le plan, des opérations sur les vecteurs.

Somme de deux vecteurs

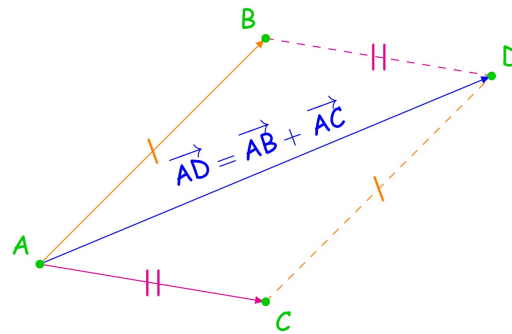
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On construit les points A , B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. La somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



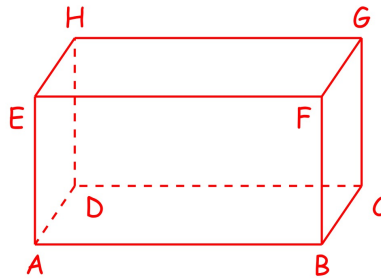
Règle du parallélogramme

Soient A , B et C trois points non alignés de l'espace. La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



Application 1 | Somme de vecteurs dans un parallélépipède

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$:



1. Montrer que $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BH}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AF}$.

Correction

.....

.....

.....

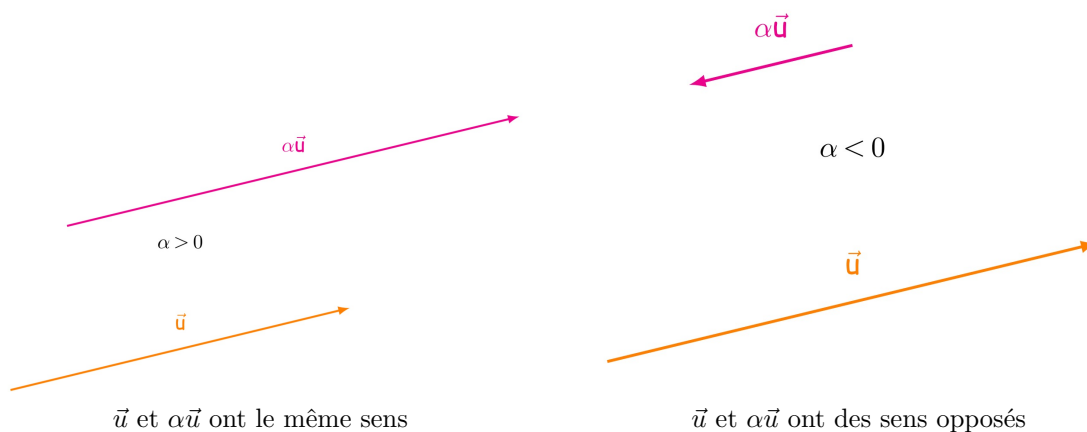
.....

.....

Produit d'un vecteur par un réel

Soient $\vec{u} \in \mathcal{V}_3$ et α un réel. Le *produit* de $\vec{u}$ par α est le vecteur noté $\alpha\vec{u}$ tel que :

1. si $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\alpha\vec{u} = \vec{0}$;
2. si $\alpha \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\alpha\vec{u}$ ont la même direction, et :
 - a. si $\alpha > 0$, ils ont le même sens et $\|\alpha\vec{u}\| = \alpha \|\vec{u}\|$;
 - b. si $\alpha < 0$, ils ont des sens opposés et $\|\alpha\vec{u}\| = -\alpha \|\vec{u}\|$.



Règles de calcul

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_3$ et α, β deux réels.

1. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;
2. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;
3. $\alpha(\beta\vec{u}) = \beta(\alpha\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$.

II. Vecteurs colinéaires dans l'espace

1. Deux vecteurs colinéaires

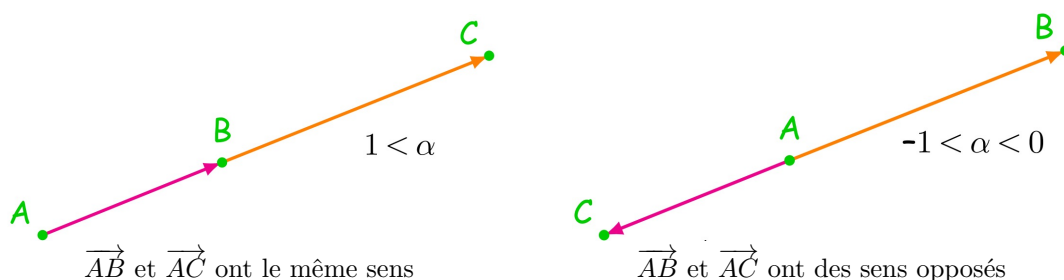
Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}_3$ sont *colinéaires* s'il existe un réel α tel que

$$\vec{u} = \alpha \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \alpha \vec{u}.$$

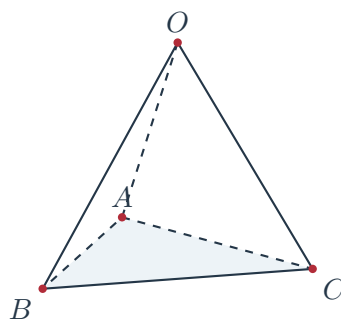
Points alignés

Soient A , B et C trois points de l'espace. Les points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel α tel que $\vec{AB} = \alpha \vec{AC}$ ou $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$.



Application 2 | Alignement de trois points

Soit $OABC$ un tétraèdre.



On considère les points I , E et F tels que $2\vec{OI} = \vec{OA}$, $3\vec{OE} = \vec{OB} + \vec{OC}$ et $\vec{BF} = \vec{AC}$.

1. Montrer que $\vec{IF} = -\frac{3}{2}\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.
2. En déduire que les points I , E et F sont alignés.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

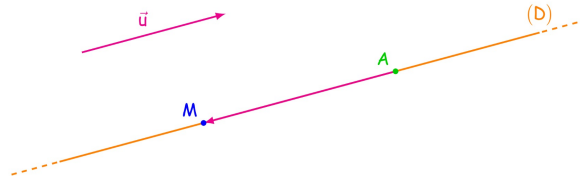
.....

2. Caractérisation vectorielle d'une droite

Théorème : caractérisation d'une droite

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}_3$ et A un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, est la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; on la note $D(A, \vec{u})$:

$$M \in D(A, \vec{u}) \iff (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}.$$

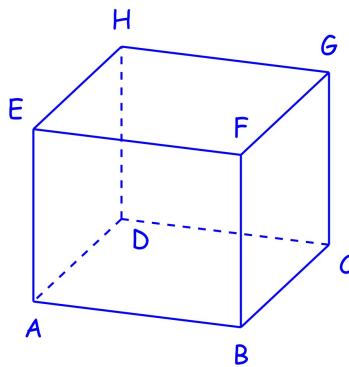


Corollaire

1. La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{CD}$ (les points C et D étant distincts).

Application 3 | Droites parallèles dans un cube

On considère le cube $ABCDEFGH$:



Soient I et J les milieux respectifs de $[BG]$ et $[HG]$, et K le point tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BA}$. Montrer que les droites (AJ) et (IK) sont parallèles.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

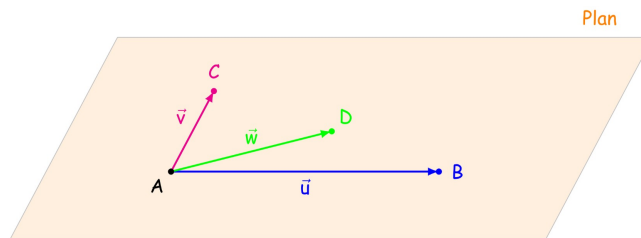
.....

III. Vecteurs coplanaires

1. Trois vecteurs coplanaires

Vecteurs coplanaires

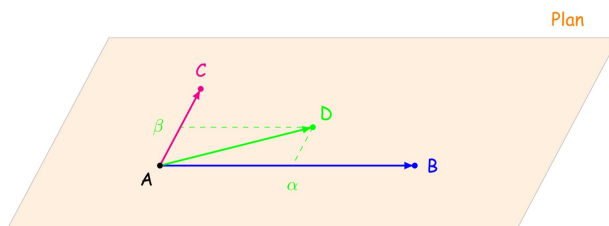
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de $\mathcal{V}_3$. On construit quatre points A , B , C et D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires* si les points A , B , C et D appartiennent à un même plan.



Caractérisation de la coplanarité

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de $\mathcal{V}_3$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$



Remarque

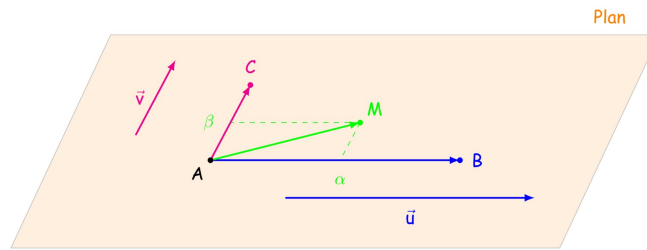
Si l'on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, on obtient $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$: le couple (α, β) est le couple des coordonnées du point D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan (ABC) .

2. Caractérisation vectorielle d'un plan

Théorème : caractérisation d'un plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, où α et β sont deux réels, est le plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; on le note $P(A, \vec{u}, \vec{v})$:

$$M \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

**Remarque**

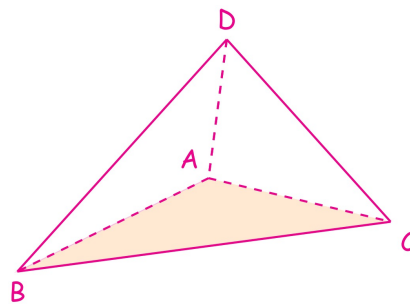
Si l'on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on obtient $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

Corollaire

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, où α et β sont deux réels.

Application 4 | Quatre points coplanaires

On considère le tétraèdre $ABCD$:



Soient I et J les milieux respectifs de $[AD]$ et $[AB]$, et E et F les points tels que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CA}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CF}$.
3. Montrer que les points I, J, C et F sont coplanaires.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

IV. Repérage dans l'espace

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{V}_3$ désigne l'espace vectoriel.

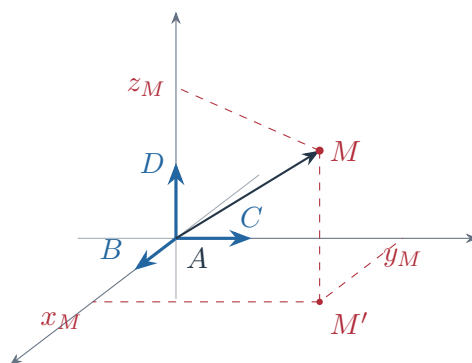
1. Coordonnées d'un point dans un repère

Repère de l'espace, coordonnées d'un point

Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace.

1. Ces points déterminent un *repère cartésien* de l'espace, noté $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
2. Pour tout point M de l'espace, il existe trois réels uniques x_M, y_M et z_M tels que

$$\overrightarrow{AM} = x_M \overrightarrow{AB} + y_M \overrightarrow{AC} + z_M \overrightarrow{AD}.$$



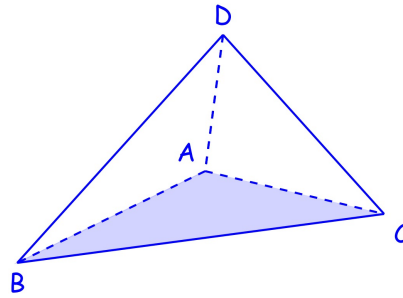
- a. Les réels x_M, y_M, z_M sont les *coordonnées cartésiennes* de M dans ce repère ; on écrit $M(x_M ; y_M ; z_M)$.
- b. x_M est l'*abscisse*, y_M l'*ordonnée* et z_M la *côte* de M .

Remarque

Le point M' est la projection orthogonale de M sur le plan (ABC) parallèlement à (AD) .

Application 5 | Coordonnées dans un tétraèdre

On considère le tétraèdre $ABCD$:



Soient I le milieu de $[BD]$ et J le centre de gravité du triangle ACD . Déterminer, dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$:

1. les coordonnées du point C ;
2. les coordonnées du point I ;
3. les coordonnées du point J .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

2. Coordonnées d'un vecteur dans une base**Base, coordonnées d'un vecteur**

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{V}_3$.

1. Ils constituent une *base* de l'espace vectoriel, notée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}_3$, il existe trois réels uniques $x_{\vec{u}}$, $y_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{u}}$ tels que

$$\vec{u} = x_{\vec{u}} \vec{i} + y_{\vec{u}} \vec{j} + z_{\vec{u}} \vec{k}.$$

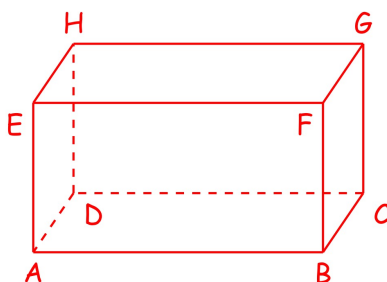
Ces réels sont les *coordonnées* de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on note $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}}; z_{\vec{u}})$.

Calculs avec les coordonnées

- Soient $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{V}_3$.
 - $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$;
 - pour tout réel α , $\alpha\vec{u}$ a pour coordonnées $(\alpha x; \alpha y; \alpha z)$.
- Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 - $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$;
 - le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Application 6 | Coordonnées dans une base

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$:



- Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$ forment une base de $\mathcal{V}_3$.
- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $-3\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EC}$ dans la base $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

V. Déterminant et coplanarité

1. Déterminant de trois vecteurs

Définition : déterminant de trois vecteurs

Soient $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$ et $\vec{w}(x_3; y_3; z_3)$ trois vecteurs dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{V}_3$. Le **déterminant** de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, noté $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, est le réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Remarque

- Cette formule est le développement du déterminant par rapport à la première colonne.
- On peut développer par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne. Par exemple, par rapport à la première ligne :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

2. Critère de coplanarité

Théorème : trois vecteurs coplanaires

Soient $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$ et $\vec{w}(x_3; y_3; z_3)$ trois vecteurs dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{V}_3$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Application 7 | Vecteurs coplanaires ou non

Soient $\vec{u}_1(-1; -2; 0)$, $\vec{u}_2(3; 5; -1)$, $\vec{u}_3(-5; -5; 5)$ et $\vec{u}_4(0; -1; 2)$ quatre vecteurs de $\mathcal{V}_3$.

1. Montrer que $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont coplanaires.
2. Montrer que $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_4$ ne sont pas coplanaires.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

VI. Droites dans l'espace

Dans tout ce qui suit, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Représentation paramétrique d'une droite

Soit (D) la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$. Pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace :

$$M \in (D) \iff (\exists t \in \mathbb{R}) \overrightarrow{AM} = t \vec{u} \iff (\exists t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x - x_A = \alpha t \\ y - y_A = \beta t \\ z - z_A = \gamma t \end{cases} \iff (\exists t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$$

Théorème : représentation paramétrique d'une droite

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ un vecteur non nul. La droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet le système d'équations, appelé *représentation paramétrique*, suivant :

$$(D) : \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Application 8 | Droite passant par deux points

Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $A(2; 0; 1)$ et $B(2; 3; 2)$.

Correction

.....

2. Deux équations cartésiennes d'une droite

Théorème : équations cartésiennes d'une droite

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ un vecteur non nul. La droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet un système de deux équations cartésiennes de la forme :

1. si $\alpha\beta\gamma \neq 0$: $\frac{x - x_A}{\alpha} = \frac{y - y_A}{\beta} = \frac{z - z_A}{\gamma}$;

2. si $\alpha = 0$ et $\beta\gamma \neq 0$: $\begin{cases} \frac{y - y_A}{\beta} = \frac{z - z_A}{\gamma} \\ x = x_A \end{cases}$;

3. si $\alpha = \beta = 0$: $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$.

Les autres cas s'obtiennent en permutant les rôles de x, y et z .

Application 9 | Équations cartésiennes d'une droite

Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ dans chacun des cas :

1. $A(1; 5; -2)$ et $\vec{u}(-2; 3; 1)$;
2. $A(3; -2; 0)$ et $\vec{u}(2; 0; -1)$;
3. $A(-1; -2; 8)$ et $\vec{u}(6; 0; 0)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VII. Plans dans l'espace**1. Équation cartésienne d'un plan**

Soit (P) le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha'; \beta'; \gamma')$. Pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace :

$$\begin{aligned}
 M \in (P) &\iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \\
 &\iff (x - x_A) \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix} - (y - y_A) \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix} + (z - z_A) \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = 0 \\
 &\iff ax + by + cz + d = 0,
 \end{aligned}$$

$$\text{où } a = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}, b = - \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} \text{ et } d = -(ax_A + by_A + cz_A).$$

Théorème : équation cartésienne d'un plan

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$, $\vec{v}(\alpha'; \beta'; \gamma')$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{V}_3$.

1. Le plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec a , b , c et d définis ci-dessus.
2. Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, où $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, est un plan de l'espace.

Application 10 | Équation cartésienne d'un plan

Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\sqrt{2}; 0; -1)$ et $\vec{v}(0; 1; \sqrt{2})$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

2. Représentation paramétrique d'un plan

Soit (P) le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha'; \beta'; \gamma')$. Pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace :

$$\begin{aligned}
 M \in (P) &\iff (\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2) \overrightarrow{AM} = t_1 \vec{u} + t_2 \vec{v} \\
 &\iff (\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2) \begin{cases} x - x_A = \alpha t_1 + \alpha' t_2 \\ y - y_A = \beta t_1 + \beta' t_2 \\ z - z_A = \gamma t_1 + \gamma' t_2 \end{cases} \\
 &\iff (\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2) \begin{cases} x = x_A + \alpha t_1 + \alpha' t_2 \\ y = y_A + \beta t_1 + \beta' t_2 \\ z = z_A + \gamma t_1 + \gamma' t_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Théorème : représentation paramétrique d'un plan

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$, $\vec{v}(\alpha'; \beta'; \gamma')$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{V}_3$. Le plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admet pour *représentation paramétrique* :

$$(P) : \begin{cases} x = x_A + \alpha t_1 + \alpha' t_2 \\ y = y_A + \beta t_1 + \beta' t_2 \\ z = z_A + \gamma t_1 + \gamma' t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Application 11 | Représentations paramétriques de plans

- Déterminer une représentation paramétrique du plan (P) passant par $A(5; 5; 5)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(0; 0; -1)$ et $\vec{v}(\sqrt{5}; 1; \sqrt{5})$.
- Déterminer une représentation paramétrique du plan (Q) d'équation cartésienne $2x - y + 4z - 1 = 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VIII. Positions relatives de droites et de plans**1. Deux droites****Théorème : deux droites**

Soient $D(A, \vec{u})$ et $\Delta(B, \vec{v})$ deux droites de l'espace.

- (D) et (Δ) sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- (D) et (Δ) sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Application 12 | Deux droites : parallèles ? coplanaires ?

Soient $M(1; -3; 2)$ et $N(0; -1; 1)$ deux points et (Δ) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites (MN) et (Δ) .
- Les droites (MN) et (Δ) sont-elles parallèles ? coplanaires ?

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Deux plans

Théorème : deux plans

Soient $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $Q(B, \vec{u}', \vec{v}')$ deux plans de l'espace. Les plans (P) et (Q) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont coplanaires, c'est-à-dire si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}') = 0 \quad \text{et} \quad \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}') = 0.$$

Remarque

Si les plans (P) et (Q) sont sécants, leur intersection est une droite.

Application 13 | Position relative de deux plans

- Étudier la position relative des plans (P) et (Q) d'équations respectives $-2x + 2y - 4z - 1 = 0$ et $x - y + 2z = 0$.
- On considère les plans $(P) : x - y + 2z + 1 = 0$ et $(Q) : x - 4y + 3z = 0$.
 - Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de (P) et (Q) .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Droite et plan

Théorème : droite et plan

Soient $D(A, \vec{u})$ une droite et $P(B, \vec{v}, \vec{w})$ un plan de l'espace. La droite (D) est parallèle au plan (P) si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Remarque

Si (D) est parallèle à (P) et si un point de (D) appartient à (P) , alors la droite (D) est incluse dans (P) .

Droite parallèle à un plan, avec une équation

Soient (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ et (P) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. La droite (D) est parallèle au plan (P) si et seulement si

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Application 14 | Position relative d'une droite et d'un plan

On considère le plan $(P) : 3x - 2y + z + 5 = 0$ et la droite (D) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Étudier la position relative de (P) et de (D) .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....