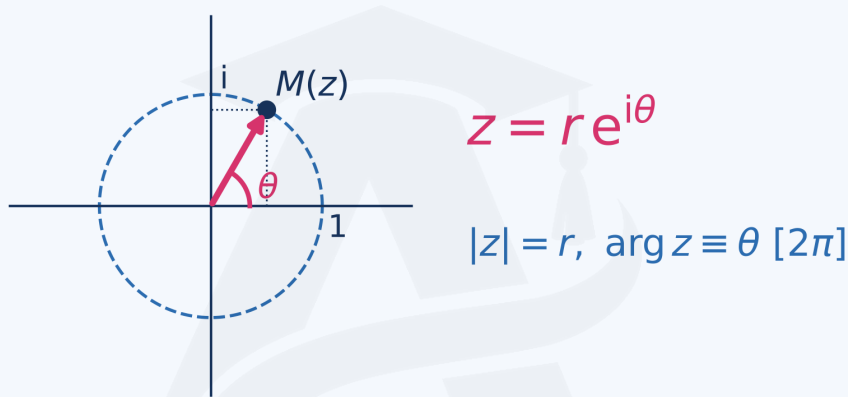


8

LES NOMBRES COMPLEXES

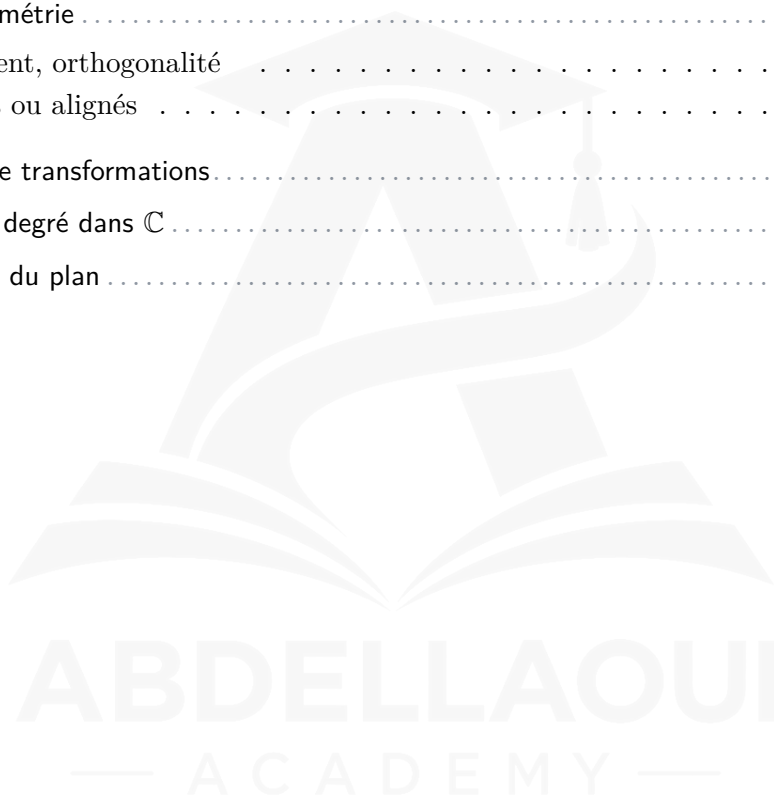


En quelques mots. Ce chapitre construit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, leur représentation dans le plan, le module et l'argument, les écritures trigonométrique et exponentielle, puis les applications à la géométrie, aux transformations, aux équations du second degré et aux ensembles de points.

Objectifs	• Calculer avec la forme algébrique et le conjugué • Utiliser module, argument et écriture exponentielle • Traduire alignement, orthogonalité, cocyclicité par un quotient • Écrire une homothétie, une translation, une rotation en complexes • Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$
Prérequis	• Trigonométrie, angles orientés • Calcul vectoriel et équations du second degré dans $\mathbb{R}$
Instruments pédagogiques	• Activités de découverte • Applications guidées • Exercices corrigés par thème • Synthèse et test
Volume horaire	20 heures (indicatif)
Évaluation	Test de fin de chapitre (2 h)

Au sommaire de ce chapitre

I	L'ensemble $\mathbb{C}$ et la forme algébrique	3
	Définition, égalité, opérations	1, p. 3
	Conjugué d'un nombre complexe	2, p. 5
II	Représentation géométrique, module et argument	6
	Affixe d'un point et d'un vecteur	1, p. 6
	Module d'un nombre complexe	2, p. 6
	Argument d'un nombre complexe non nul	3, p. 7
III	Écritures trigonométrique et exponentielle	8
	Forme trigonométrique	1, p. 8
	Forme exponentielle	2, p. 10
IV	Applications à la géométrie	11
	Distance, angles, alignement, orthogonalité	1, p. 11
	Quatre points cocycliques ou alignés	2, p. 13
V	Écritures complexes de transformations	13
VI	Équations du second degré dans $\mathbb{C}$	14
VII	Ensembles de points du plan	15



I L'ensemble $\mathbb{C}$ et la forme algébrique

1 Définition, égalité, opérations

Activités

Activité 8.1 : Un nombre dont le carré vaut -1

L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle. On convient d'ajouter à $\mathbb{R}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$, en gardant les règles usuelles de calcul.

1. Développer et simplifier $(2 + 3i) + (1 - 5i)$, puis $(2 + 3i)(1 - 5i)$.
2. Calculer $(a + ib)(a - ib)$ pour a, b réels. Quel est le signe du résultat ?
3. En déduire une écriture de $\frac{1}{2 + 3i}$ sans i au dénominateur.
4. Calculer i^2, i^3, i^4, i^5 . Que remarque-t-on ?

Définition 8.1 : L'ensemble $\mathbb{C}$

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$, tel que :

1. $\mathbb{C}$ contient un élément i vérifiant $i^2 = -1$;
2. tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec a, b réels.

L'écriture $z = a + ib$ est la *forme algébrique* de z . On a $\mathbb{C} = \{a + ib ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Remarque : Vocabulaire

Pour $z = a + ib$: $\text{Re}(z) = a$ est la *partie réelle*, $\text{Im}(z) = b$ la *partie imaginaire* (c'est un réel). Si $b = 0$, z est réel ; si $a = 0$, $z = ib$ est un *imaginaire pur*. On note $i\mathbb{R} = \{ib ; b \in \mathbb{R}\}$; le nombre 0 appartient à $\mathbb{R}$ et à $i\mathbb{R}$.

Propriété 8.1 : Égalité de deux complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ (a, b, a', b' réels).

1. $z = z' \iff a = a'$ et $b = b'$.
2. $z = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$.

Propriété 8.2 : Opérations

Les règles de calcul de $\mathbb{R}$ (addition, multiplication, identités remarquables, puissances) s'étendent à $\mathbb{C}$. Pour $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$:

1. $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et $z - z' = (a - a') + i(b - b')$;
2. $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$; en particulier $\alpha z = \alpha a + i\alpha b$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. si $z \neq 0$: $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$;
4. pour $k \in \mathbb{N}$: $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$.

Exemple 8.1 Mettre sous forme algébrique

$$\frac{3+i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i \quad (\text{on multiplie par la quantité conjuguée du dénominateur}).$$

Application 8.1 : Calculs en forme algébrique

1. Écrire sous forme algébrique $z_1 = 1 + 3i - (2 + 4i)$, $z_2 = -\frac{1}{i}$, $z_3 = (1 - 2i)^3$.
2. Déterminer les réels a et b tels que $a(1 - i) + b(2 + 3i) = 2$.
3. Calculer $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.
4. Pour x réel, on pose $Z = (1 - x) + 2(1 - x^2)i$. Déterminer x pour que : a) $Z \in \mathbb{R}$ b) $Z \in i\mathbb{R}$ c) $\text{Re}(Z) = 4$ d) $\text{Im}(Z) = 2$.

2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 8.2 : Conjugué

Le *conjugué* de $z = a + ib$ (a, b réels) est le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Propriété 8.3 : Conséquences

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

1. $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$;
2. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$;
3. $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$, réel positif, nul seulement si $z = 0$.

Propriété 8.4 : Conjugué et opérations

Pour z, z' complexes, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$ $\overline{\alpha z} = \alpha \bar{z}$ $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$;
2. si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.

Application 8.2 : Conjugué

1. Écrire sous forme algébrique le conjugué de $(2 + i)(1 - i)$ et de $\frac{3 - i}{1 + i}$.
2. On pose $Z_1 = \frac{2 + i}{1 - i}$ et $Z_2 = \frac{2 - i}{1 + i}$. Montrer que $Z_1 + Z_2 \in \mathbb{R}$ et que $Z_1 - Z_2 \in i\mathbb{R}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: a) $(1 - i)\bar{z} = 3 + i$ b) $\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} = i$.

II Représentation géométrique, module et argument

1 Affixe d'un point et d'un vecteur

Définition 8.3 : Affixe

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$: c'est le *plan complexe*.

- Au point $M(a; b)$ on associe son *affixe* $z_M = a + ib$; on écrit $M(z)$. Réciproquement M est l'*image* de z .
- Au vecteur $\vec{w}(a; b)$ on associe son affixe $a + ib$.

L'axe des abscisses est l'axe des réels, l'axe des ordonnées l'axe des imaginaires purs.

Propriété 8.5 : Affixes et vecteurs

Soient $\vec{w}(z)$, $\vec{w}'(z')$ deux vecteurs, $A(z_A)$, $B(z_B)$ deux points, $k \in \mathbb{R}$.

1. $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$ et $k\vec{w}$ a pour affixe kz ;
2. $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$;
3. le milieu de $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$.

Application 8.3 : Parallélogramme

On considère $A(2i)$, $B(1 - i)$ et $C(3)$.

1. Déterminer les affixes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ et $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer l'affixe de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Module d'un nombre complexe

Définition 8.4 : Module

Le *module* de $z = a + ib$ est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$. Si M est l'image de z , alors $|z| = OM$; si z est réel, $|z|$ est sa valeur absolue.

Propriété 8.6 : Propriétés du module

Pour z, z' complexes et $n \in \mathbb{N}$:

1. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ et $|z| = 0 \iff z = 0$; $|z|^2 = z\bar{z}$;
2. $|zz'| = |z||z'|$ $|z^n| = |z|^n$ $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ($z' \neq 0$);
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Application 8.4 : Calculs de modules

Déterminer le module de : a) $\sqrt{5} - i\sqrt{2}$ b) $(3 + 2i)^3$ c) $\frac{2 + 2i}{2 - 5i}$ d) $\frac{(1 - i)(\sqrt{2} + i)}{(3 + i)^2}$.

3 Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 8.5 : Argument

Soit $M(z)$ avec $z \neq 0$. Un *argument* de z est toute mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$; on écrit $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$. Alors

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}.$$

Application 8.5 : Arguments usuels

Placer $A(2)$, $B(-3)$, $C(3i)$, $D(1 + i)$ dans le plan complexe et déterminer un argument de chaque affixe.

Propriété 8.7 : Propriétés de l'argument

Pour z, z' non nuls et $n \in \mathbb{Z}$:

1. $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$ $\arg \frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$ $\arg(z^n) \equiv n \arg z \pmod{2\pi}$;
2. $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$ $\arg(-z) \equiv \arg z + \pi \pmod{2\pi}$;
3. $z \in \mathbb{R}^* \iff \arg z \equiv 0 \pmod{\pi}$ $z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$;
4. $z = z' \iff |z| = |z'|$ et $\arg z \equiv \arg z' \pmod{2\pi}$.

III Écritures trigonométrique et exponentielle

1 Forme trigonométrique

Propriété 8.8 : Formules de trigonométrie à connaître

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x ; \cos(\pi + x) = -\cos x ; \cos(\pi - x) = -\cos x ; \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x ; \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin(-x) &= -\sin x ; \sin(\pi + x) = -\sin x ; \sin(\pi - x) = \sin x ; \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x ; \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{aligned}$$

Définition 8.6 : Forme trigonométrique

Tout complexe $z \neq 0$ s'écrit de façon unique

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{avec} \quad \arg z \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

C'est la *forme trigonométrique* de z ; ses coordonnées sont $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$.

Remarque : Méthode

Pour passer de $a + ib$ à la forme trigonométrique : calculer $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, factoriser r , reconnaître $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$. Attention : $-r(\cos \theta + i \sin \theta)$ n'est pas une forme trigonométrique (le module r doit être positif, le signe se passe dans l'angle : $-(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)$).

Application 8.6 : Forme trigonométrique

Écrire sous forme trigonométrique :

1. $1 + i$ 2. $1 - i$ 3. $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ 4. $-2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
5. $-i$ 6. $2i(1 + i)$ 7. $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$ 8. $-\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

★ Théorème 8.1 : Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier relatif n :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Application 8.7 : Utiliser Moivre

Soit θ réel. Développer $(\cos \theta + i \sin \theta)^2$ puis $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$; en déduire $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Forme exponentielle

Définition 8.7 : Notation $e^{i\theta}$

Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$: c'est le complexe de module 1 et d'argument θ . Tout $z \neq 0$ s'écrit $z = r e^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg z \pmod{2\pi}$: c'est sa *forme exponentielle*.

Propriété 8.9 : Calculs avec $e^{i\theta}$

Pour $r, r' > 0$, θ, θ' réels et $n \in \mathbb{Z}$:

- $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$ $\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$;
- $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$;
- $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

★ Théorème 8.2 : Formules d'Euler

Pour tout réel θ :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Remarque : Linéariser

Linéariser $\cos^n x$ ou $\sin^n x$, c'est l'écrire comme combinaison linéaire de $\cos(px)$ et $\sin(qx)$ (p, q entiers). On remplace $\cos x$ par la formule d'Euler, on développe avec le binôme de Newton, puis on regroupe les termes conjugués $e^{ikx} + e^{-ikx} = 2 \cos kx$ et $e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i \sin kx$.

Exemple 8.2 Linéariser $\cos^2 x$

$$\cos^2 x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^2}{4} = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Application 8.8 : Formes algébrique, trigonométrique, exponentielle

- Compléter : $-1 - i$; $5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$; $\sqrt{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (donner les trois formes).
- Écrire sous forme exponentielle $Z_1 = \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$ et $Z_2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$.
- Pour x réel, montrer que $1 + e^{ix} = 2 \cos \frac{x}{2} e^{ix/2}$ et $1 - e^{ix} = -2i \sin \frac{x}{2} e^{ix/2}$.
- Montrer que $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$ et $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$.
- Linéariser $\cos^4 x$, $\sin^4 x$, $\cos^5 x$, $\sin^5 x$.

IV Applications à la géométrie

1 Distance, angles, alignement, orthogonalité

Propriété 8.10 : Distance et angle orienté

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$, $D(z_D)$ des points, $A \neq B$, $C \neq D$.

1. $AB = |z_B - z_A|$;
2. $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$;
3. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} [2\pi]$; en particulier $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ si A, B, C sont distincts.

Propriété 8.11 : Colinéarité et orthogonalité

Pour $A \neq B$ et $C \neq D$, on pose $q = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$.

1. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\iff q \in \mathbb{R} \iff \arg q \equiv 0 [\pi]$;
2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\iff q \in i\mathbb{R} \iff \arg q \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Remarque : Conséquences

Pour A, B, C distincts : A, B, C alignés $\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$; $(AB) \perp (AC) \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$. Le triangle ABC est isocèle en A si le quotient est de module 1, équilatéral s'il vaut $e^{\pm i\pi/3}$, rectangle isocèle en A s'il vaut $\pm i$. Pour deux droites : $(AB) \parallel (CD) \iff q \in \mathbb{R}$ et $(AB) \perp (CD) \iff q \in i\mathbb{R}$.

Application 8.9 : Nature d'un triangle, alignement

1. A, B, C d'affixes $3 + 2i, 4 + 3i, 5 + i$. Calculer AB, AC, BC ; que dire du triangle ?
2. A, B, C d'affixes $6 - 2i, 2i, 3$. Calculer module et argument de $\frac{c - b}{c - a}$; que dire de A, B, C ?
3. A, B, C, D d'affixes $2 + 2i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}, -1 + i$. Calculer $\frac{a - b}{c - d}$; que dire de (AB) et (CD) ?
4. A, B, C d'affixes $-2 + 3i, -4, 1 + i$. Calculer $\frac{b - a}{c - a}$; nature de ABC ?

Application 8.11 : Écritures complexes

1. Écrire l'homothétie de centre $\Omega(i)$ et de rapport $-\frac{1}{3}$, la translation de vecteur $\vec{w}(1-i)$, la rotation de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
2. $A(3+5i)$, $B(3-5i)$, $C(7+3i)$ et T la translation de vecteur $\vec{w}(4-2i)$. Montrer que $\frac{b-c}{a-c} = 2i$, nature de ABC ? Montrer que $T(A) = C$.
3. $A(-1+i)$ et $B\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$. Montrer que $\frac{b}{a} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$; en déduire que B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

VI Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition 8.8 : Racine carrée

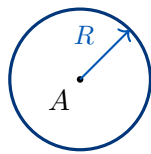
Une *racine carrée* d'un nombre a est tout complexe z tel que $z^2 = a$.

Propriété 8.14 : Racines carrées d'un réel

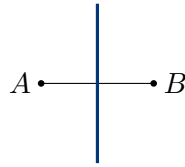
Un réel $a \neq 0$ a exactement deux racines carrées opposées : si $a > 0$, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$; si $a < 0$, $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Exemple 8.3 Racines carrées

3 a pour racines carrées $\pm\sqrt{3}$; -9 a pour racines carrées $\pm 3i$; -5 a pour racines carrées $\pm i\sqrt{5}$.



$$|z - z_A| = R$$



$$|z - z_A| = |z - z_B|$$



$$\frac{z - z_B}{z - z_A} \in \mathbb{R}$$

Application 8.13 : Ensembles de points

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : a) $|z - 1 + 2i| = 2$ b) $\left| \frac{z - 3i}{z + 5} \right| = 1$ c) $|2z - i| = 2$ d) $\arg \frac{z}{1 + i} \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

Exercice 8.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. Tout nombre réel est un nombre complexe.
2. Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.
3. Pour tous complexes z, z' : $|z + z'| = |z| + |z'|$.
4. $i^{2025} = i$.
5. Si z^2 est réel, alors z est réel.
6. Pour tout complexe z , $z\bar{z} = |z|^2$.

Exercice 8.2 : Forme algébrique ★★★

Écrire sous forme algébrique : a) $(2 - i)(3 + 2i)$ b) $(1 + i)^4$ c) $\frac{2 + 3i}{1 - i}$ d) $\frac{1}{1 + i} + \frac{1}{1 - i}$.

Exercice 8.3 : Équations ★★★

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $2z - i\bar{z} = 1 + i$.
2. $z^2 = -3 + 4i$ (on pose $z = x + iy$ et on utilise aussi $|z|^2 = |-3 + 4i|$).

Exercice 8.4 : Un quotient et deux ensembles de points ★★★

Pour $z = x + iy \neq -i$, on pose $Z = \frac{z - 1}{z + i}$.

1. Montrer que $\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - x + y}{x^2 + (y + 1)^2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{y - x + 1}{x^2 + (y + 1)^2}$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 8.5 : Valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ ★★★

On pose $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.

1. Écrire z sous forme algébrique.
2. Déterminer module et argument de $1 + i\sqrt{3}$, de $1 - i$, puis de z .
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 8.6 : Puissances ★★★

1. Calculer $(1 + i)^{20}$ et $(\sqrt{3} - i)^9$.
2. Pour quels entiers n le nombre $(1 + i\sqrt{3})^n$ est-il réel ?

Exercice 8.7 : Linéarisation et Moivre ★★★

1. Linéariser $\cos^2 x \sin^2 x$.
2. Exprimer $\cos 4\theta$ en fonction de $\cos \theta$ seulement.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos x + \cos 3x = 0$.



Exercice 8.8 : Un carré ★★★

On considère $A(2 + i)$, $B(4 + 3i)$ et $C(3i)$.

1. Montrer que $\frac{c-a}{b-a} = i$. En déduire la nature du triangle ABC .
2. Déterminer l'abscisse de D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Montrer que c'est un carré et calculer son aire.

Exercice 8.9 : Nature d'une transformation ★★★

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $z \mapsto z'$: a) $z' = iz + 1 - i$ b) $z' = -2z + 3$. Donner l'image de $2 + i$ par a).

Exercice 8.10 : Équations du second degré ★★★

1. Résoudre $z^2 - 2z + 5 = 0$.
2. Résoudre $z^3 = 1$: factoriser $z^3 - 1$ et donner les solutions sous forme exponentielle. Montrer que leur somme est nulle.

Exercice 8.11 : Ensembles de points ★★★

1. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 2| = |z + i|$ et en donner une équation cartésienne.
2. Montrer que pour $z \neq -1$: $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$. Interpréter.

ABDELLAOUI
— A C A D E M Y —

Synthèse 8.1 : Équation du troisième degré, rotation et triangle

- I.** On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 8z^3 + 1 = 0$.
- 1.** Montrer que $(E) \iff (2z + 1)(4z^2 - 2z + 1) = 0$. Résoudre (E) .
- II.** Dans le plan complexe, on considère A, B, C d'affixes $a = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$, $b = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$, $c = -\frac{1}{2}$.
- 2.** Écrire a sous forme exponentielle. Vérifier que $a^2 = b$ et en déduire un argument de b .
- 3.** Montrer que $\frac{b-a}{b} = i\sqrt{3}$. En déduire que OAB est rectangle en B .
- 4.** Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que $R(A) = C$ puis que B est le milieu de $[AC]$.





Les nombres complexes

2 BAC SE · 2 h · Date :

/20

Exercice 8.1 : Calculs en forme algébrique 4 pt

1. Écrire sous forme algébrique $z = \frac{1 + 3i}{2 + i}$ et calculer $|z|$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $3z - i\bar{z} = 7 - 5i$.

1,5 pt

2,5 pt

Exercice 8.2 : Forme exponentielle 5 pt

On pose $a = -1 + i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

1. Écrire a et b sous forme exponentielle.
2. En déduire la forme exponentielle de ab et de $\frac{a}{b}$, puis calculer a^3 .
3. Déterminer les entiers n tels que $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ soit réel.
4. Linéariser $\cos^2 x \sin^2 x$.

1,5 pt

1,5 pt

1,5 pt

0,5 pt

Exercice 8.3 : Second degré et triangle équilatéral 5 pt

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On note z_1 la solution de partie imaginaire positive et $z_2 = \bar{z}_1$.
2. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3. Soient $A(z_1)$, $B(z_2)$ et O l'origine. Montrer que OAB est équilatéral.
4. Montrer que A est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1,5 pt

1 pt

1,5 pt

1 pt

Exercice 8.4 : Géométrie dans le plan complexe 6 pt

On considère $A(1 + i)$, $B(3 + i)$ et C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Écrire la relation entre z_C , a , b , puis calculer z_C .
2. Montrer que $\frac{z_C - a}{b - a} = e^{i\pi/3}$ et que ABC est équilatéral.
3. Déterminer l'abscisse de D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Montrer que c'est un losange.
4. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 1 - i| = |z - 3 - i|$; vérifier que C lui appartient.

1,5 pt

1,5 pt

1,5 pt

1,5 pt

