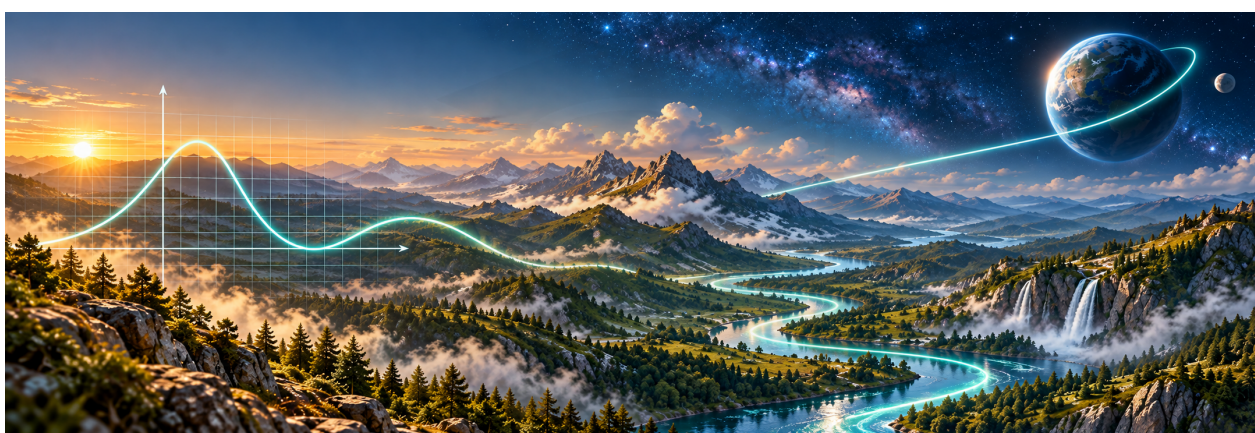


2

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION



En quelques mots. Ce chapitre étudie la continuité d'une fonction numérique, d'abord en un point, puis sur un intervalle. Il en déduit l'image d'un intervalle, le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction réciproque et la racine n -ième.

Objectifs

- Étudier la continuité d'une fonction en un point, à droite et à gauche
- Établir la continuité sur un intervalle (opérations, composée)
- Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et la dichotomie
- Déterminer une fonction réciproque ; manipuler racines et puissances rationnelles

Prérequis

- Limites de fonctions, formes indéterminées
- Dérivation et variations d'une fonction (1 BAC)

Instruments pédagogiques

- Activités de découverte
- Applications guidées
- Exercices corrigés par thème
- Problème de synthèse et test

Volume horaire

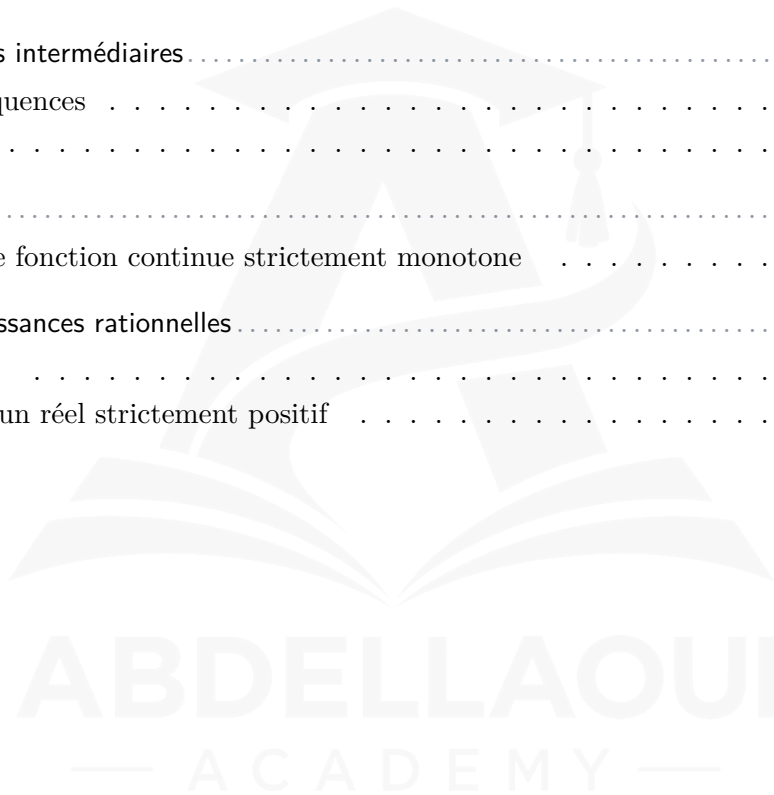
14 heures (indicatif)

Évaluation

Test de fin de chapitre (1 h 30)

Au sommaire de ce chapitre

I	Continuité en un point	3
	Notion de continuité en un point	1, p. 3
	Continuité à droite, continuité à gauche	2, p. 5
II	Continuité sur un intervalle	6
	Continuité sur un intervalle	1, p. 6
	La fonction partie entière	2, p. 7
	Continuité des fonctions usuelles et opérations	3, p. 8
	Continuité d'une fonction composée	4, p. 9
III	Image d'un intervalle par une fonction continue	10
	Image d'un segment, image d'un intervalle	1, p. 10
	Cas d'une fonction continue et strictement monotone	2, p. 12
IV	Théorème des valeurs intermédiaires	13
	Le théorème et ses conséquences	1, p. 13
	Méthode de dichotomie	2, p. 15
V	Fonction réciproque	15
	Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone	1, p. 15
VI	Racine n -ième et puissances rationnelles	17
	La fonction racine n -ième	1, p. 17
	Puissances rationnelles d'un réel strictement positif	2, p. 19



I Continuité en un point

1 Notion de continuité en un point

Activités

Activité 2.1 : Comparer la limite et l'image

Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x}{x^3 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad (x \in]-2; +\infty[).$$

1. Comparer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $f(1)$.
2. Comparer $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ et $g(2)$.
3. Que peut-on conclure ?

Correction

1. Pour $x \neq 1$: $f(x) = \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2x}{x^2+x+1}$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{3} = f(1)$.
2. Pour $x \neq 2$: $g(x) = \frac{(x+2)-4}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{1}{16} \neq 1 = g(2)$.
3. Il existe des fonctions dont la limite en x_0 est égale à l'image $f(x_0)$ (cas de f en 1) et d'autres pour lesquelles elle est différente (cas de g en 2). La première situation définit la *continuité en un point*.

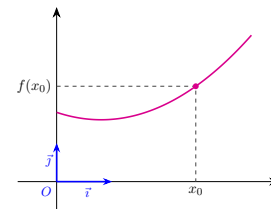
Définition 2.1 : Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 . On dit que f est *continue en x_0* si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Remarque : Interprétation graphique

Dire que f est continue en x_0 signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ ne présente aucun « saut » au point $M(x_0; f(x_0))$. Si la limite en x_0 n'existe pas, ou si elle est différente de $f(x_0)$, alors f n'est pas continue en x_0 .



Exemple 2.1 Étude analytique

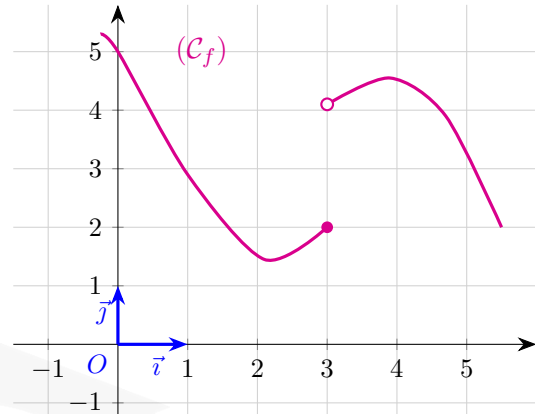
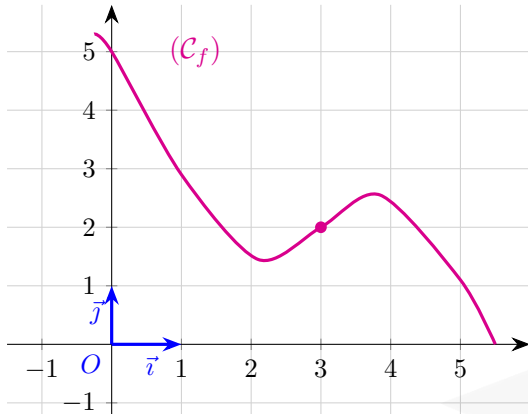
- Soit $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \neq 4 \\ 6 & \text{si } x = 4 \end{cases}$.

On a $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x+2) = 6 = f(4)$: f est continue en 4.

- Soit $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases}$.

On a $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0 \neq 3 = g(-1)$: g n'est pas continue en -1 .

Exemple 2.2 Lecture graphique



Sur la seconde courbe, les limites à gauche et à droite en 3 sont différentes : la limite en 3 n'existe pas.

Application 2.1 : Étudier la continuité en un point

1. Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2 - x + 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$. Étudier la continuité de f en -1 .
2. Soit $g(x) = \begin{cases} \frac{x + \tan 2x}{\sin 3x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ définie sur $]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}[$. Étudier la continuité de g en 0.

Correction

1. Pour $x \neq -1$: $-2x^2 - x + 1 = (x + 1)(1 - 2x)$, donc $f(x) = 1 - 2x$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$. Comme $f(-1) = 1 \neq 3$, f n'est pas continue en -1 .

2. Pour $x \neq 0$: $g(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} + \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{\cos 2x}$ et $\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3}$. Avec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ux}{ux} = 1$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1 = g(0).$$

g est continue en 0.

2 Continuité à droite, continuité à gauche

Activité 2.2 : Étudier les deux côtés

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ 2 + \sqrt{5 - x} & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$

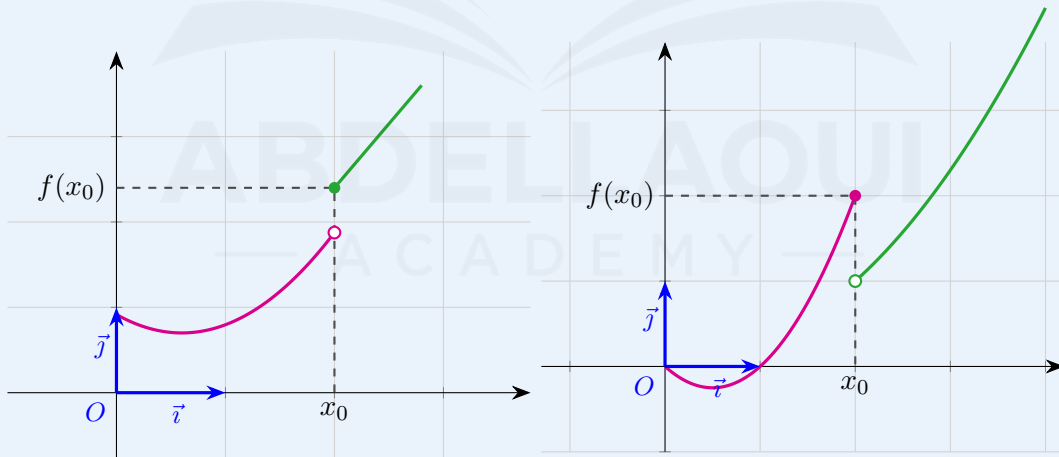
1. Comparer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $f(1)$.
2. Comparer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $f(1)$.
3. La fonction f est-elle continue en 1 ?

Correction

1. $f(1) = 2 + \sqrt{4} = 4$. Pour $x > 1$: $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = x+3$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 = f(1)$.
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 + \sqrt{5-x}) = 2 + \sqrt{4} = 4 = f(1)$.
3. Les limites à droite et à gauche en 1 sont égales à $f(1)$: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, donc f est continue en 1.

Définition 2.2 : Continuité à droite, à gauche

- Soit f définie sur un intervalle $[x_0; x_0 + r[$ ($r > 0$). On dit que f est *continue à droite* en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Soit f définie sur un intervalle $]x_0 - r; x_0]$ ($r > 0$). On dit que f est *continue à gauche* en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.



Propriété 2.1 : Caractérisation

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } x_0 &\iff f \text{ est continue à droite et à gauche en } x_0 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0). \end{aligned}$$

Exemple 2.3 Continu à gauche, mais pas à droite

Soit $f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{5-x} & \text{si } x \leq 4 \\ \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & \text{si } x > 4. \end{cases}$ On a $f(4) = 2 + 1 = 3$.

- À gauche : $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2 + \sqrt{1} = 3 = f(4)$; f est continue à gauche en 4.
 - À droite : pour $x > 4$, $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x}+2$, donc $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 4 \neq f(4)$; f n'est pas continue à droite en 4.
- Par conséquent, f n'est pas continue en 4.

Application 2.2 : Étudier une fonction définie par morceaux

Soit $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \\ x^3 - 1 & \text{si } x < 1. \end{cases}$ Étudier la continuité de f à droite, puis à gauche, puis en 1.

Correction

On a $f(1) = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0 = f(1)$: f est continue à droite en 1.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 1) = 0 = f(1)$: f est continue à gauche en 1.
- Elle est continue à droite et à gauche en 1; d'après la propriété 2, f est continue en 1.

II Continuité sur un intervalle

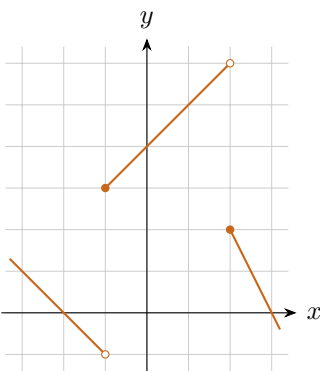
1 Continuité sur un intervalle

Activité 2.3 : Une courbe en trois morceaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < -1 \\ x+4 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ -2x+6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

- Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Étudier la continuité de f en -1 et en 2.
- f est-elle continue en tout point de l'intervalle $] -2; 2[$?

Correction



- En -1 : $f(-1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 \neq f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3 = f(-1)$; f est continue à droite mais pas à gauche : f **n'est pas continue en -1** .
- En 2 : $f(2) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6 \neq f(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 = f(2)$; f **n'est pas continue en 2**.
- Non : $-1 \in] -2; 2[$ et f n'est pas continue en -1 .

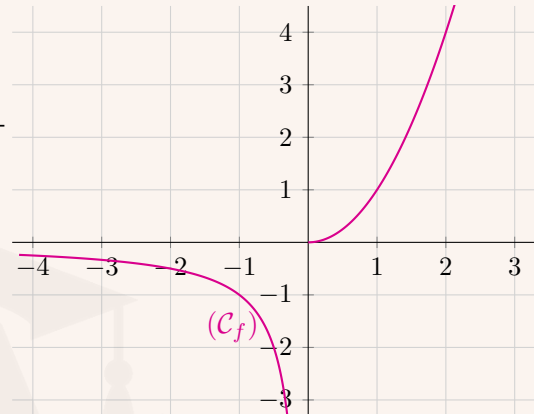
Définition 2.3 : Continuité sur un intervalle

- f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ si elle est continue en tout point de $]a; b[$.
- f est continue sur $[a; b]$ si elle est continue sur $]a; b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .
- On définit de façon analogue la continuité sur $[a; b[$, $]a; b]$, $[a; +\infty[$ et $]-\infty; a]$: on ajoute la continuité à droite en l'extrémité gauche, ou à gauche en l'extrémité droite, lorsqu'elle appartient à l'intervalle.

Application 2.3 : Continuité sur des intervalles

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ dont la courbe est donnée ci-contre.

- Étudier la continuité de f en 0.
- f est-elle continue sur $[-3; 0[$? sur $[0; 2]$?
- f est-elle continue sur $[-3; 1]$?



Correction

- $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$: f est continue à droite en 0. Mais $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$: f n'est pas continue à gauche en 0, donc **f n'est pas continue en 0.**
- Sur $[-3; 0[$, $f(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction rationnelle continue sur $]-\infty; 0[$: f est continue sur $[-3; 0[$.
Sur $[0; 2]$, $f(x) = x^2$ est continue sur $]0; 2[$ (polynôme), continue à droite en 0 (question 1) et à gauche en 2 : f est continue sur $[0; 2]$.
- Non : $0 \in]-3; 1[$ et f n'est pas continue en 0.

2 La fonction partie entière

On sait que $\frac{13}{5} = 2,6$: la partie entière de $\frac{13}{5}$ est 2, et l'on écrit $E\left(\frac{13}{5}\right) = 2$.

Définition 2.4 : Fonction partie entière

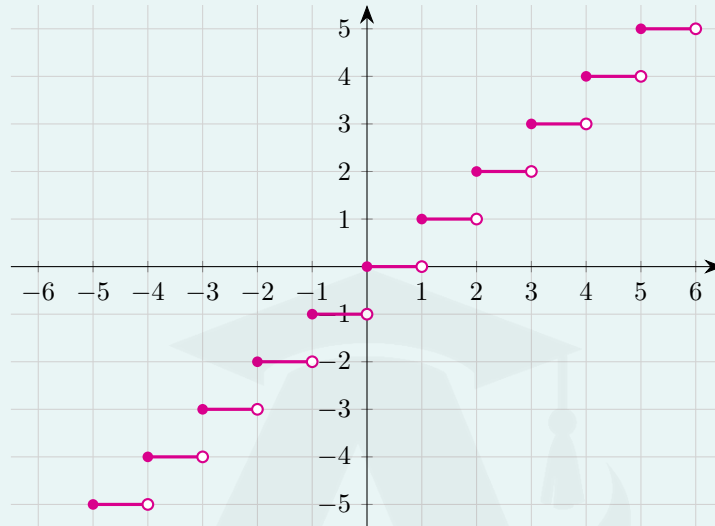
La fonction qui, à tout réel x , associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$ est appelée *fonction partie entière*. L'image de x est notée $E(x)$ (ou $[x]$).

Exemple 2.4

$$E(\sqrt{2}) = 1 \quad E\left(-\frac{7}{3}\right) = -3 \quad E\left(\frac{1}{5}\right) = 0 \quad E\left(-\frac{1}{3}\right) = -1.$$

Propriété 2.2 : Propriétés de la partie entière

1. $(\forall n \in \mathbb{Z}) : E(n) = n$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}) : E(x + n) = E(x) + n$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : E(x + y) \geq E(x) + E(y)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, E est continue à droite en n , mais n'est pas continue à gauche en n : E est donc discontinue en n .
4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, E est continue sur $[n; n + 1[$ (et même sur $]n; n + 1[$ tout entier).



Preuve.

- (2) $E(x) \leq x$ et $E(y) \leq y$, donc l'entier $E(x) + E(y)$ est inférieur ou égal à $x + y$; or $E(x + y)$ est le plus grand entier $\leq x + y$.
- (3) Sur $[n; n + 1[$, $E(x) = n$: $\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = n = E(n)$. Sur $[n - 1; n[$, $E(x) = n - 1$: $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = n - 1 \neq E(n)$.
- (4) E est constante (égale à n) sur $[n; n + 1[$. ■

3 Continuité des fonctions usuelles et opérations

Propriété 2.3 : Fonctions usuelles

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$; toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$; la fonction tan est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Propriété 2.4 : Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions $f + g$, $f \times g$ et αf sont continues sur I .
- Si f ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont continues sur I .

Exemple 2.5

- $x \mapsto 2 \sin x + x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$: somme de $x \mapsto 2 \sin x$ et du polynôme $x \mapsto x^2 + 1$, continues sur $\mathbb{R}$.

- $x \mapsto \frac{\cos x + x}{x}$ est continue sur $]0; 1]$: $x \mapsto \cos x + x$ est continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est continue et ne s'annule pas sur $]0; 1]$.

Application 2.4 : Continuité sur un intervalle

Étudier la continuité de f sur l'intervalle I :

1. $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = [2; +\infty[$
2. $f(x) = (x^3 - x)\sqrt{x}$, $I = [0; +\infty[$
3. $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x}}$, $I = [1; +\infty[$

Correction

1. $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et ne s'annule pas sur I , donc $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur I ; $x \mapsto x$ l'est aussi : par somme, f est continue sur I
2. $x \mapsto x^3 - x$ (polynôme) et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur $[0; +\infty[$: par produit, f est continue sur I
3. $x \mapsto x^2 - 3x$ est continue sur I , $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et ne s'annule pas sur I : par quotient, f est continue sur I

4 Continuité d'une fonction composée

Propriété 2.5 : Composée de deux fonctions continues

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J tels que $f(I) \subset J$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .

Propriété 2.6 : Cas de la racine carrée

Si f est continue et positive sur un intervalle I , alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

Exemple 2.6

- Soit $h(x) = \frac{x^5}{(x-1)^5} - \frac{3x^2}{(x-1)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrons que h est continue sur $I =]-\infty; 0]$.
On a $h = g \circ f$ avec $f(x) = \frac{x}{x-1}$ et $g(x) = x^5 - 3x^2$. La fonction rationnelle f est continue sur $I \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et le polynôme g est continu sur $\mathbb{R} \supset f(I)$: h est continue sur I .
- La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ est continue sur $]1; +\infty[$: $x \mapsto \frac{x-1}{x+2}$ est continue sur cet intervalle et y est strictement positive (numérateur et dénominateur positifs).

Application 2.5 : Continuité d'une composée

Étudier la continuité de f sur I : a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $I =]-\infty; -2[$; b) $f(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{x-1}}$, $I =]1; +\infty[$.

Correction

a) $x \mapsto x^2 - 4$ est continue sur I et, pour $x < -2$, $x^2 > 4$ donc $x^2 - 4 > 0$. Par composition avec $\sqrt{\cdot}$, f est continue sur I .
b) $u : x \mapsto \frac{3x+1}{x-1}$ est rationnelle, donc continue sur I ; pour $x > 1$, $3x+1 > 0$ et $x-1 > 0$ donc $u(x) > 0$. Ainsi $f = \sqrt{u}$ est continue sur I .

III Image d'un intervalle par une fonction continue

1 Image d'un segment, image d'un intervalle

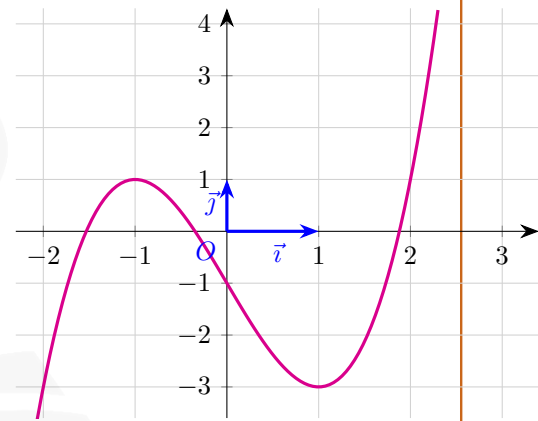
Activité 2.4 : Lire des images sur une courbe

La courbe ci-contre représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

- Compléter le tableau (où m et M sont les valeurs minimale et maximale de f sur I).
- Quelle est la nature de l'intervalle $f(I)$ lorsque I est un segment ?

I	Monotonie de f	m	M	$f(I)$
$[-2; -1]$		...	...	...
$[-1; 0]$		...	...	...
$[1; 2]$		...	...	...



Correction

I	Monotonie de f	m	M	$f(I)$
$[-2; -1]$	croissante	-3	1	$[-3; 1]$
$[-1; 0]$	décroissante	-1	1	$[-1; 1]$
$[1; 2]$	croissante	-3	1	$[-3; 1]$

- Lorsque I est un segment, $f(I)$ est aussi un segment : $f(I) = [m; M]$.

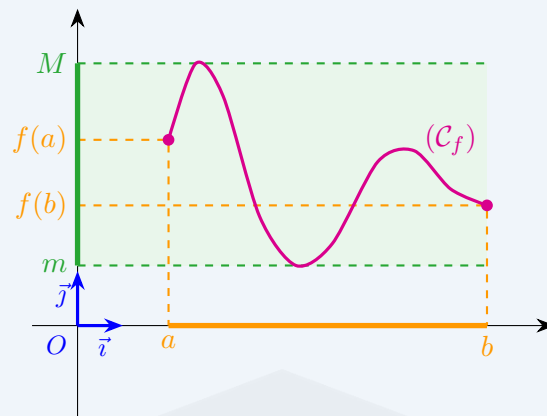
Propriété 2.7 : Image d'un segment, d'un intervalle

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

★ Théorème 2.1 : Image d'un segment

Si f est continue sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [m; M]$, où

$$m = \min_{x \in [a; b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [a; b]} f(x).$$



Remarque : Cas particuliers

Si f est continue et croissante sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$. Si f est continue et décroissante sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$.

Remarque : La continuité est suffisante, non nécessaire

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3 - x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

f est discontinue en 1 et pourtant

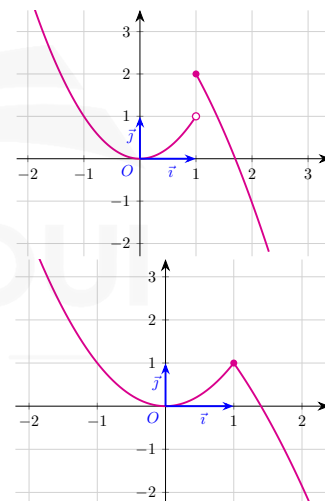
$$f([0; 2]) = [0; 1] \cup [-1; 2] = [-1; 2]$$

L'intervalle I et son image $f(I)$ n'ont pas nécessairement la même forme.

$$\text{Soit } g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}, \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

alors :

$$g(]0; 2]) =]0; 1] \cup [-2; 1] = [-2; 1]$$



2 Cas d'une fonction continue et strictement monotone

Propriété 2.8 : Image d'un intervalle par une fonction strictement monotone

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et strictement monotone sur I ; a et b sont deux réels de I .

I	$f(I)$ si f est strictement croissante	$f(I)$ si f est strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right[$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a; b[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right[$
$[a; +\infty[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right[$
$]a; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b) \right[$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

Remarque

Si f n'est pas strictement monotone sur I , on découpe I en intervalles sur lesquels f est strictement monotone, puis on utilise $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$.

Exemple 2.7

- Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$. On a $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$: f est strictement croissante sur I .
Comme $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, on obtient $f(I) =]-\infty; 2[$.
- Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $[-1; 3]$. f est décroissante sur $[-1; 1]$ et croissante sur $[1; 3]$; $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, $f(3) = 3$: $f([-1; 1]) = [-1; 3]$, $f([1; 3]) = [-1; 3]$; donc $f([-1; 3]) = [-1; 3]$.

Application 2.6 : Déterminer l'image d'un intervalle

Étudier la continuité de f sur I , puis déterminer $f(I)$:

- a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $I = [0; 1]$; b) $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$, $I =]-3; +\infty[$; c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $I =]-\infty; -2]$.

Correction

a) f est un polynôme, donc continue sur I . $f'(x) = 2x - 4 < 0$ sur $[0; 1]$: f est décroissante, donc $f(I) = [f(1); f(0)] = [-2; 1]$.

b) f est rationnelle, donc continue sur I . $f'(x) = \frac{4}{(x+3)^2} > 0$: f est strictement croissante. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$ (numérateur $\rightarrow -4$, dénominateur $\rightarrow 0^+$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; donc $f(I) =]-\infty; 1[$.

c) $x \mapsto x^2 - 4$ est continue et positive sur I : f est continue sur I . Sur I , $x \mapsto x^2 - 4$ est décroissante et $\sqrt{}$ est croissante : f est décroissante. $f(-2) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; donc $f(I) = [0; +\infty[$.

IV Théorème des valeurs intermédiaires

1 Le théorème et ses conséquences

Activité 2.5 : Compter des solutions

Soit f une fonction continue sur $[-6; 8]$ dont le tableau de variations est le suivant (variations strictes sur chaque intervalle) :

x	-6	-2	3	8
$f(x)$	-3	4	-1	7

Donner le nombre de solutions de chaque équation sur l'intervalle indiqué :

- a) $f(x) = 2$ sur $[-6; 8]$ b) $f(x) = 0$ sur $[-2; 3]$
c) $f(x) = 5$ sur $[-6; 8]$ d) $f(x) = -2$ sur $[-2; 3]$

Correction

a) 3 solutions : $2 \in [-3; 4]$, $2 \in [-1; 4]$ et $2 \in [-1; 7]$, et f est continue et strictement monotone sur chacun des trois intervalles $[-6; -2]$, $[-2; 3]$, $[3; 8]$.

b) 1 solution : sur $[-2; 3]$, f décroît strictement de 4 à -1 et $0 \in [-1; 4]$.

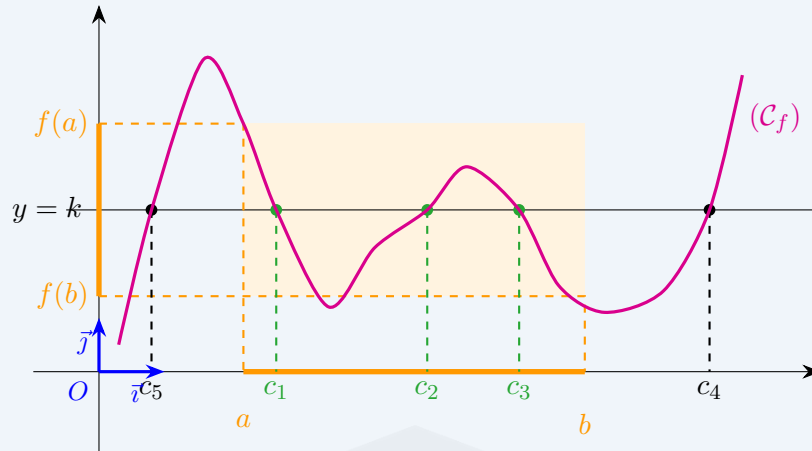
c) 1 solution : sur $[-6; 3]$, f prend ses valeurs dans $[-3; 4]$, qui ne contient pas 5; sur $[3; 8]$, f croît de -1 à 7 et $5 \in [-1; 7]$.

d) 0 solution : sur $[-2; 3]$, f prend ses valeurs dans $[-1; 4]$ et $-2 \notin [-1; 4]$.

Bilan : si f est continue et que k est compris entre les valeurs prises aux extrémités, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution.

★ Théorème 2.2 : Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et a, b deux éléments de I . Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Exemple 2.8 Une équation trigonométrique

Montrons que l'équation $\sin x = \frac{1}{5}$ admet au moins une solution dans $[0; \frac{\pi}{2}]$.

La fonction $f : x \mapsto \sin x$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $f(0) = 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Comme $0 \leq \frac{1}{5} \leq 1$, le T.V.I. assure que $f(x) = \frac{1}{5}$ admet au moins une solution dans $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Proposition 2.9 : Cas où $f(a) \times f(b) < 0$

Si f est continue sur $[a; b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a; b[$.

Exemple 2.9

Montrons que l'équation $x^3 - 2 = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 2]$.

Soit $f(x) = x^3 - 2$, continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0; 2]$. On a $f(0) = -2$ et $f(2) = 6$, donc $f(0) \times f(2) < 0$: d'après le T.V.I., l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0; 2[$.

Proposition 2.10 : Existence et unicité

Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une *unique* solution dans $]a; b[$.

Preuve. *Existence* : proposition 1. *Unicité* : si $c < c'$ étaient deux solutions dans $]a; b[$, la stricte monotonie donnerait $f(c) < f(c')$ ou $f(c) > f(c')$, ce qui contredit $f(c) = f(c') = 0$. ■

Exemple 2.10

Montrons que l'équation $x^4 + x^3 + 3x = 4$ admet une solution unique dans $[0; 1]$.

Soit $f(x) = x^4 + x^3 + 3x - 4$, continue sur $[0; 1]$. Comme $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 3 > 0$ sur $[0; 1]$, f est strictement croissante. De plus $f(0) = -4$ et $f(1) = 1$, donc $f(0) \times f(1) < 0$. D'après la proposition 1, $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; 1[$.

Application 2.7 : Existence et unicité d'une solution

Montrer que l'équation $x\sqrt{x} - x = 1$ admet une unique solution dans $[1; 4]$.

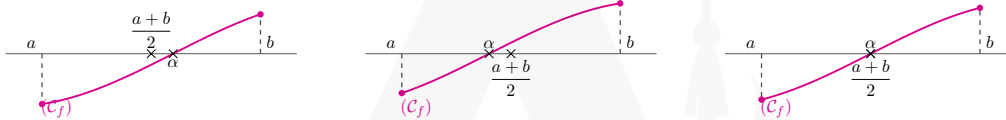
Correction

Soit $f(x) = x\sqrt{x} - x - 1$ sur $[1; 4]$: f est continue (produit et somme de fonctions continues). $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1 \geq \frac{3}{2} - 1 > 0$ sur $[1; 4]$: f est strictement croissante. $f(1) = -1$ et $f(4) = 8 - 4 - 1 = 3$, donc $f(1) \times f(4) < 0$. D'après la proposition 1, l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire $x\sqrt{x} - x = 1$, admet une unique solution dans $]1; 4[$.

2 Méthode de dichotomie

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$: l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]a; b[$. Pour encadrer α , on utilise la *méthode de dichotomie* :

- On calcule le centre $c = \frac{a+b}{2}$ de $[a; b]$, puis $f(c)$. Si $f(c) = 0$, alors $\alpha = c$; sinon $\alpha \in]a; c[$ ou $\alpha \in]c; b[$.
- On recommence sur l'intervalle qui contient α jusqu'à atteindre l'amplitude voulue (celle de $[a; b]$ est $b - a$).



Exemple 2.11 Encadrer $\sqrt[3]{2}$

Soit $f(x) = x^3 - 2$.

- Existence et unicité d'une solution dans $]1; 2[$.* f est un polynôme, continue sur $[1; 2]$; $f'(x) = 3x^2 > 0$ sur $[1; 2]$, donc f est strictement croissante. De plus $f(1) = -1$ et $f(2) = 6$: $f(1) \times f(2) < 0$. D'après le T.V.I., $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1; 2[$.
- Encadrement d'amplitude 0,25.* Le centre de $[1; 2]$ est $\frac{3}{2}$ et $f(\frac{3}{2}) = \frac{11}{8} > 0$: $f(1) \times f(\frac{3}{2}) < 0$, donc $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ (amplitude 0,5). Le centre de $[1; \frac{3}{2}]$ est $\frac{5}{4}$ et $f(\frac{5}{4}) = -\frac{3}{64} < 0$: $f(\frac{5}{4}) \times f(\frac{3}{2}) < 0$, donc $\frac{5}{4} < \alpha < \frac{3}{2}$ (amplitude 0,25).

V Fonction réciproque

1 Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Activité 2.6 : Retrouver y à partir de x

Soit f la fonction définie sur $I = [1; 3]$ par $f(x) = x^2 - 2x$.

- Montrer que f est continue et strictement croissante sur I .
- Déterminer l'intervalle $J = f(I)$.
- Soit $x \in J$ et $y \in I$. Montrer que : $f(y) = x \iff y = 1 + \sqrt{x+1}$.

Correction

- f est un polynôme, donc continue; $f'(x) = 2(x-1) > 0$ sur $]1; 3[$: f est strictement croissante sur I .
- $J = f(I) = [f(1); f(3)] = [-1; 3]$.
- $f(y) = x \iff y^2 - 2y - x = 0 \iff (y-1)^2 = x+1$. Comme $y \geq 1$, on a $y-1 \geq 0$, donc $(y-1)^2 = x+1 \iff y-1 = \sqrt{x+1}$ (avec $x+1 \geq 0$ car $x \in J$), soit $y = 1 + \sqrt{x+1}$.
Ainsi, tout $x \in J$ possède un unique antécédent $y \in I$: $y = 1 + \sqrt{x+1}$.

Propriété 2.11 : Fonction réciproque

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f admet une *fonction réciproque*, notée f^{-1} , définie de $f(I)$ vers I par

$$\forall x \in f(I), \forall y \in I : f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x.$$

Remarque : Conséquences

- $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \iff \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$
- $(\forall x \in I) : f^{-1} \circ f(x) = x.$
- $(\forall x \in f(I)) : f \circ f^{-1}(x) = x.$

Exemple 2.12 La fonction racine carrée

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $I = [0; +\infty[$.

- f est continue et strictement croissante sur I : elle admet une fonction réciproque définie sur $f(I) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0; +\infty[$.
- Pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$: $f^{-1}(x) = y \iff \sqrt{y} = x \iff y = x^2$. Donc $f^{-1}(x) = x^2$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.
- Pour $x \geq 0$: $f^{-1} \circ f(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ et $f \circ f^{-1}(x) = \sqrt{x^2} = x$.

Application 2.8 : Déterminer une fonction réciproque

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer $f^{-1}(x)$:

- a) $f(x) = x^2 + 1, I =]-\infty; 0]$; b) $f(x) = 2 + \sqrt{1-x}, I =]-\infty; 1]$.

Correction

- a) f est continue (polynôme) et $f'(x) = 2x < 0$ sur $] -\infty; 0]$: f est strictement décroissante sur I . Elle admet donc une réciproque définie sur $J = f(I) = [f(0); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [1; +\infty[$. Pour $x \in J$ et $y \leq 0$: $f(y) = x \iff y^2 = x - 1 \iff y = -\sqrt{x-1}$ (car $y \leq 0$). Donc $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$ sur $[1; +\infty[$.
- b) f est continue sur I (composée); $x \mapsto 1-x$ est décroissante et $\sqrt{\cdot}$ croissante, donc f est strictement décroissante sur I . Elle admet une réciproque définie sur $J = f(I) = [f(1); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [2; +\infty[$. Pour $x \in J$ et $y \leq 1$: $f(y) = x \iff \sqrt{1-y} = x-2 \iff 1-y = (x-2)^2$ (car $x-2 \geq 0$), soit $y = 1 - (x-2)^2$. Donc $f^{-1}(x) = 1 - (x-2)^2$ sur $[2; +\infty[$.

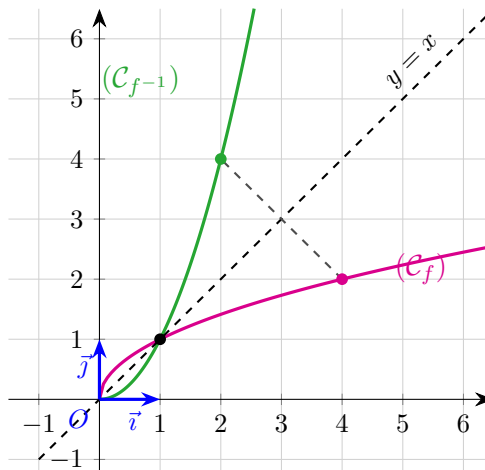
Propriété 2.12 : Propriétés de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

- f^{-1} est continue sur $f(I)$ et varie dans le même sens que f .
- Dans un repère orthonormé, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 2.13 Représentation graphique

Les courbes de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et de $f^{-1} : x \mapsto x^2$ (sur $[0; +\infty[$) dans un repère orthonormé :



VI Racine n -ième et puissances rationnelles

1 La fonction racine n -ième

Activité 2.7 : De x^n à la racine n -ième

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^n$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$.
2. Pour $x \geq 0$, que représente le nombre $f^{-1}(x)$?

Correction

1. f est continue (polynôme) et strictement croissante sur $[0; +\infty[$: si $0 \leq a < b$, alors $a^n < b^n$. De plus $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: $f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$. D'après la propriété 1, f admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$.
2. $f^{-1}(x)$ est l'unique réel $y \geq 0$ tel que $y^n = x$: c'est la racine n -ième de x , notée $\sqrt[n]{x}$.

Définition 2.5 : Racine n -ième

La fonction $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) admet sur $[0; +\infty[$ une fonction réciproque, notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Pour $x \geq 0$, le nombre $\sqrt[n]{x}$ est appelé la *racine n -ième* de x : c'est l'unique réel positif y tel que $y^n = x$.

Cas particuliers : $\sqrt[n]{x} = x$; $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ (racine carrée) ; $\sqrt[3]{x}$ se lit « racine cubique de x ».

Propriété 2.13 : Continuité et variations

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$. Dans un repère orthonormé, sa courbe est symétrique de celle de $x \mapsto x^n$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque : Conséquences

Pour tous $x, y \in [0; +\infty[$:

1. $\sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n$
2. $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \iff x = y$
3. $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \iff x < y$
4. $\sqrt[n]{x^n} = x$ et $(\sqrt[n]{x})^n = x$

Note

Dans ce chapitre, $\sqrt[n]{x}$ n'est définie que pour $x \geq 0$. Ainsi $\sqrt[3]{-8}$ n'est pas considérée ; l'équation $x^3 = -8$ se résout directement : $x = -2$.

Exemple 2.14 Équations et inéquations

- Résolvons (E_1) : $\sqrt[3]{x} = 4$. L'équation est définie sur $[0; +\infty[$ et $\sqrt[3]{x} = 4 \iff x = 4^3 = 64$: $S = \{64\}$.
- Résolvons (E_2) : $\sqrt[5]{x} \leq 2$. Elle est définie sur $[0; +\infty[$ et $\sqrt[5]{x} \leq 2 \iff x \leq 2^5 = 32$: $S = [0; +\infty[\cap]-\infty; 32] = [0; 32]$.

Propriété 2.14 : Règles de calcul

Soient $a, b \in [0; +\infty[$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$:

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ($b \neq 0$)
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
- $\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$

Exemple 2.15

- Simplifions $A = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{\sqrt{3}} \times \sqrt[6]{9}}{\sqrt[4]{81}}$:

$$A = \frac{\sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[6]{3^{3+1+2}}}{3} = \frac{\sqrt[6]{3^6}}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$
- Comparons $\sqrt[5]{3}$ et $\sqrt[3]{2}$: $\sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{27}$ et $\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32}$. Comme $27 < 32$, on a $\sqrt[5]{3} < \sqrt[3]{2}$.

Application 2.9 : Racines n -ièmes

1. Simplifier $A = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128\,000\,000}{27^2}}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(E) : \sqrt[5]{3x-4} = 2$ puis $(F) : \sqrt[6]{2x-3} < 2$.

Correction

1. $128\,000\,000 = 2^7 \times (2 \times 5)^6 = 2^{13} \times 5^6$ et $27^2 = 3^6$. Donc $A = \sqrt[6]{\frac{2^{5+13} \times 5^6}{3^6}} = \sqrt[6]{\frac{2^{18} \times 5^6}{3^6}} = \frac{2^3 \times 5}{3} = \frac{40}{3}$.
2. (E) est définie pour $3x - 4 \geq 0$, soit $x \geq \frac{4}{3}$; $\sqrt[5]{3x-4} = 2 \iff 3x - 4 = 2^5 = 32 \iff x = 12$: $S = \{12\}$.
 (F) est définie pour $2x - 3 \geq 0$, soit $x \geq \frac{3}{2}$; $\sqrt[6]{2x-3} < 2 \iff 2x - 3 < 2^6 = 64 \iff x < \frac{67}{2}$: $S = [\frac{3}{2}; \frac{67}{2}[$.

2 Puissances rationnelles d'un réel strictement positif

Définition 2.6 : Puissance rationnelle

Soient $a > 0$ et $r = \frac{p}{q}$ un rationnel ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$). On appelle *puissance rationnelle* de a d'exposant r le réel

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

En particulier $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Propriété 2.15 : Règles de calcul

Soient $a, b > 0$ et $r, r' \in \mathbb{Q}$:

- $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$
- $a^r \times b^r = (ab)^r$
- $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$
- $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$
- $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$
- $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Exemple 2.16

- $8^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{8^2} = \sqrt[7]{64}$ et $6^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{6^{-3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{216}}$.
- $A = \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = 5^{\frac{5}{6}}$.
- $A = \frac{\sqrt[9]{27^2} \times \sqrt[4]{81} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}} = 3$.

Application 2.10 : Puissances rationnelles

1. Simplifier $A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}}$.
2. Comparer $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{4}$ et $\sqrt[10]{15}$.
3. Déterminer x tel que $(2x - 1)^{\frac{2}{3}} = 16$.

Correction

1. $A = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{6}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{6}{5} - \frac{1}{5}} = 3^2 = 9$.
2. On réduit au même indice 20 : $\sqrt[4]{3} = \sqrt[20]{3^5} = \sqrt[20]{243}$, $\sqrt[5]{4} = \sqrt[20]{4^4} = \sqrt[20]{256}$, $\sqrt[10]{15} = \sqrt[20]{15^2} = \sqrt[20]{225}$.
Comme $225 < 243 < 256$: $\sqrt[10]{15} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}$.
3. L'expression est définie pour $2x - 1 > 0$. Soit $t = 2x - 1 > 0$: $t^{\frac{2}{3}} = 16 \iff (t^{\frac{1}{3}})^2 = 16 \iff t^{\frac{1}{3}} = 4 \iff t = 4^3 = 64$. Donc $2x - 1 = 64$, soit $x = \frac{65}{2}$.

Exercice 2.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. $x \mapsto |x|$ est continue en 0.
2. La fonction partie entière E est continue en 1.
3. Si f est continue en a , alors $|f|$ est continue en a .
4. Si $|f|$ est continue en a , alors f est continue en a .

Correction

1. **Vrai** : $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$.
2. **Faux** : $E(1) = 1$ mais $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$.
3. **Vrai** : $|f|$ est la composée de f (continue en a) et de la fonction valeur absolue (continue en $f(a)$).
4. **Faux** : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ vérifie $|f| = 1$, continue en 0, mais f ne l'est pas ($\lim_{x \rightarrow 0^-} f = -1 \neq f(0) = 1$).

Exercice 2.2 : Continuité en un point ★★★

Étudier la continuité de f au point x_0 indiqué.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad x_0 = 2.$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0.$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & \text{si } x \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0.$

Correction

1. Pour $x \neq 2$, $f(x) = x + 2$ donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 = f(2)$: f est continue en 2.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 = f(0)$: f n'est pas continue en 0 (elle le deviendrait en posant $f(0) = 1$).
3. Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$: f est continue en 0.

Exercice 2.3 : Déterminer un paramètre ★★★

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x > 2 \\ ax + 1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$ Déterminer a pour que f soit continue en 2. Que dire alors de f sur $\mathbb{R}$?

2. Soit $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ ax^2 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$ Déterminer a pour que g soit continue en 1.

Correction

1. Pour $x > 2$: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, donc $f(x) = x+1$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$. Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 2a+1$. f est continue en 2 $\iff 2a+1 = 3 \iff a = 1$. Alors $f(x) = x+1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier : f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x > 1$: $g(x) = \frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{1}{4}$. Et $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) = a$. Donc g est continue en 1 $\iff a = \frac{1}{4}$.

Exercice 2.4 : Partie entière ★★

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Soit $f(x) = x - E(x)$. Étudier la continuité de f à droite et à gauche en n , puis sur $[n; n+1[$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $g(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction

1. Sur $[n; n+1[$, $E(x) = n$ donc $f(x) = x - n$: f est continue sur $[n; n+1[$, en particulier à droite en n ($f(n) = 0 = \lim_{x \rightarrow n^+} f$). À gauche en n : pour $x \in [n-1; n[$, $f(x) = x - (n-1)$, donc $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = 1 \neq f(n) = 0$: f n'est pas continue à gauche en n . Donc f n'est pas continue en n et n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (elle l'est sur chaque $]n; n+1[$).
2. Sur $[n; n+1[$, $g(x) = n + \sqrt{x - n}$: g est continue sur cet intervalle (composée et somme de fonctions continues), donc à droite en n . En n à gauche : pour $x \in [n-1; n[$, $g(x) = n-1 + \sqrt{x - n + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow n^-} g(x) = n-1+1 = n = g(n)$: g est continue à gauche en n . Elle est donc continue en tout entier, et aussi en tout réel non entier : g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.5 : Image d'un intervalle ★★

Déterminer l'image $J = f(I)$ dans chaque cas.

- a) $f(x) = x^3$, $I =]-2; 1]$.
b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = [1; +\infty[$.
c) $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [0; 9]$.
d) $f(x) = x^2$, $I = [-1; 2]$.

Correction

- a) f est continue et strictement croissante sur I : $f(I) =]f(-2); f(1)] =]-8; 1]$.
b) f est continue et strictement décroissante sur I : $f(I) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f; f(1)] =]0; 1]$.
c) f est continue et strictement croissante sur I : $f(I) = [f(0); f(9)] = [0; 3]$.
d) f n'est pas monotone sur I : on la découpe. Sur $[-1; 0]$ (décroissante) l'image est $[0; 1]$; sur $[0; 2]$ (croissante) l'image est $[0; 4]$. Donc $f(I) = [0; 1] \cup [0; 4] = [0; 4]$.

Exercice 2.6 : Une équation et sa solution ★★★

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.
2. Par dichotomie, encadrer α par deux nombres d'amplitude 0,125.

Correction

1. f est continue sur $[0; 1]$ (polynôme) et strictement croissante (somme de deux fonctions strictement croissantes). $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, donc $0 \in f([0; 1]) = [-1; 1]$ et 0 a un unique antécédent $\alpha \in]0; 1[$.
2. $f(0,5) = 0,125 + 0,5 - 1 = -0,375 < 0$ donc $\alpha \in]0,5; 1[$. $f(0,75) = 0,421875 + 0,75 - 1 = 0,171875 > 0$ donc $\alpha \in]0,5; 0,75[$. $f(0,625) = 0,244140625 + 0,625 - 1 < 0$ donc $\alpha \in]0,625; 0,75[$ (amplitude 0,125).

Exercice 2.7 : Une équation avec racine ★★★

Montrer que l'équation $x + \sqrt{x} = 3$ admet une unique solution α dans $]1; 2[$, puis la calculer.

Correction

Soit $f(x) = x + \sqrt{x}$, continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. $f(1) = 2 < 3 < f(2) = 2 + \sqrt{2}$ (car $\sqrt{2} > 1$), donc 3 a un unique antécédent $\alpha \in]1; 2[$.

Calcul : avec $t = \sqrt{x} \geq 0$, $t^2 + t - 3 = 0$, de racine positive $t = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$. Donc $\alpha = t^2 = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \approx 1,697$.

Exercice 2.8 : Point fixe et signe constant ★★★

1. Soit f continue sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[0; 1]$. Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soit g continue sur $[0; 1]$, ne s'annulant jamais, avec $g(0) = -1$. Montrer que $g(1) < 0$.

Correction

1. Soit $h(x) = f(x) - x$, continue sur $[0; 1]$. $h(0) = f(0) \geq 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$, donc $h(0)h(1) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; 1]$ tel que $h(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.
2. Par l'absurde : si $g(1) \geq 0$, alors $g(1) > 0$ (car g ne s'annule pas), d'où $g(0)g(1) < 0$ et, par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annulerait sur $]0; 1[$: contradiction. Donc $g(1) < 0$.

Exercice 2.9 : Fonction réciproque ★★★

1. Soit $f(x) = x^2 + 4x$ sur $I =]-\infty; -2]$. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis expliciter f^{-1} .
2. Soit $g(x) = \frac{x}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$. Même question.

Correction

1. f est continue sur I . Pour $a < b \leq -2$: $f(b) - f(a) = (b-a)(a+b+4) < 0$ car $a+b < -4$: f est strictement décroissante. $f(-2) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$, donc $J = f(I) = [-4; +\infty[$ et f est une bijection de I sur J .

Pour $y \in J : y = x^2 + 4x \iff (x+2)^2 = y+4$, et $x+2 \leq 0$ donne $x = -2 - \sqrt{y+4}$. Donc $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+4}$ pour $x \in [-4; +\infty[$.

2. $g(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ est continue sur I . Pour $-1 < a < b : g(b) - g(a) = \frac{b-a}{(a+1)(b+1)} > 0 : g$ est strictement croissante. $\lim_{x \rightarrow -1^+} g = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = 1$, donc $J = g(I) =]-\infty; 1[$.

Pour $y < 1 : y = \frac{x}{x+1} \iff y(x+1) = x \iff x(1-y) = y \iff x = \frac{y}{1-y}$. Donc $g^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$ pour $x \in]-\infty; 1[$.

Exercice 2.10 : Équations et inéquations avec racines ★★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt[3]{2x+1} = 3$

c) $x^5 = -32$

e) $\sqrt[3]{x-1} < 2$

b) $\sqrt[4]{x-1} = 2$

d) $\sqrt[3]{x^2} = 4$

f) $\sqrt[4]{3x-4} \leq 2$

Correction

a) $2x+1 = 27, S = \{13\}$.

c) $x = \sqrt[5]{-32} = -2, S = \{-2\}$.

e) $x-1 < 8, S =]-\infty; 9[$.

b) $x-1 = 16$ (avec $x \geq 1$), $S = \{17\}$.

d) $x^2 = 64, S = \{-8; 8\}$.

f) Il faut $3x-4 \geq 0$; alors $3x-4 \leq 16$. $S = [\frac{4}{3}; \frac{20}{3}]$.

Exercice 2.11 : Calculs avec des racines ★★★

Simplifier :

$$A = \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}, \quad B = \sqrt[4]{81} \times \sqrt[6]{27}, \quad C = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2}}{\sqrt[12]{2}}.$$

Correction

$$A = 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}. \quad B = 3 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}. \quad C = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

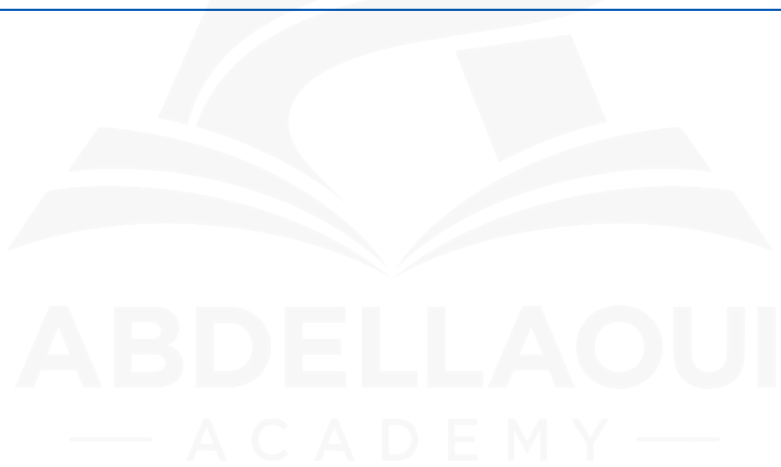
Synthèse 2.1 : Étude d'une fonction

Soit $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x} - 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f et justifier que f est continue sur D .
2. Montrer que f est strictement croissante sur D .
3. Déterminer $f(D)$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et que $\alpha \in]0; \frac{1}{4}[$.
5. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle à préciser. Calculer $f^{-1}(-1)$ et $f^{-1}(2)$.

Correction

1. $D = [0; +\infty[$; f est somme de $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 2\sqrt{x} - 1$, continues sur D .
2. $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont strictement croissantes sur D , donc leur somme (avec le terme constant) aussi.
3. f est continue et strictement croissante sur D , $f(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ (car $f(x) \geq x^3 - 1$). Donc $f(D) = [-1; +\infty[$.
4. $0 \in f(D)$ et f est strictement croissante, donc 0 a un unique antécédent α . $f(0) = -1 < 0$ et $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{64} + 2 \times \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{64} > 0 : \alpha \in]0; \frac{1}{4}[$.
5. f est continue et strictement croissante sur D : c'est une bijection de D sur $J = [-1; +\infty[$, d'où f^{-1} définie sur J . $f(0) = -1$ donc $f^{-1}(-1) = 0$; $f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$ donc $f^{-1}(2) = 1$.





Continuité d'une fonction numérique

2 BAC SE · 1 h 30 · Date :

Nom et prénom :

Classe : N° :

/20

Exercice 2.1 : Vrai ou faux 4 pt

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant brièvement

4 pt

1. Si $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $]a; b[$.
2. La fonction partie entière E est continue à droite en tout réel.
3. Si f est continue sur $]0; 1[$, alors $f(]0; 1[)$ est un intervalle ouvert.
4. $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Correction

1. **Faux** : il faut que f soit continue sur $[a; b]$.
2. **Vrai** : sur $[n; n+1[$, E est constante égale à n .
3. **Faux** : $x \mapsto x^2$ est continue sur $] -1; 1[$ et l'image est $[0; 1[$.
4. **Vrai** : $(-2)^3 = -8$.

Exercice 2.2 : Continuité 6 pt

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+5} - 2 & \text{si } x > -1 \\ x^2 + a & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
2. Déterminer a pour que f soit continue en -1 .
3. Pour cette valeur de a , justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Pour $a = 0$, f est-elle continue en -1 ?

2 pt

1,5 pt

1,5 pt

1 pt

Correction

1. Pour $x > -1$: $f(x) = \frac{(x+5) - 4}{(x+1)(\sqrt{x+5} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+5} + 2}$, donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{4}$.
2. $f(-1) = 1 + a$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 + a$. Continuité en $-1 \iff 1 + a = \frac{1}{4} \iff a = -\frac{3}{4}$.
3. Sur $] -1; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5} + 2}$ est continue (quotient de fonctions continues, dénominateur non nul).
Sur $] -\infty; -1]$, f est polynomiale donc continue. Elle est continue en -1 d'après 2.
4. $f(-1) = 1 \neq \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$: f n'est pas continue en -1 .

Exercice 2.3 : Théorème des valeurs intermédiaires**6 pt**

Soit $h(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $h(-2)$, $h(-1)$, $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$. 1 pt
2. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution dans chacun des intervalles $] -2; -1[$, $] 0; 1[$ et $] 1; 2[$. 2 pt
3. Justifier que ce sont les seules solutions. 1 pt
4. Soit β la solution de $] 1; 2[$. Encadrer β par deux nombres d'amplitude 0,25. 2 pt

Correction

1. $h(-2) = -1$, $h(-1) = 3$, $h(0) = 1$, $h(1) = -1$, $h(2) = 3$.
2. h est continue (polynôme); $h(-2)h(-1) < 0$, $h(0)h(1) < 0$, $h(1)h(2) < 0$. Le TVI donne une solution dans chaque intervalle.
3. Ces trois intervalles sont disjoints et un polynôme de degré 3 a au plus trois racines.
4. $h(1,5) = 3,375 - 4,5 + 1 = -0,125 < 0$ et $h(1,75) = 5,359375 - 5,25 + 1 = 1,109375 > 0$. Donc $\beta \in]1,5; 1,75[$.

Exercice 2.4 : Fonction réciproque**4 pt**

Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$ sur $I = [1; +\infty[$.

1. Montrer que f est continue et strictement croissante sur I . 1 pt
2. Déterminer $J = f(I)$. 1 pt
3. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur J et l'expliciter. 2 pt

Correction

1. f est polynomiale, donc continue. Pour $1 \leq a < b$: $f(b) - f(a) = (b - a)(a + b - 2) > 0$: strictement croissante.
2. $f(1) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, donc $J = [2; +\infty[$.
3. f est continue et strictement croissante : bijection de I sur J . Pour $y \geq 2$: $y = (x - 1)^2 + 2 \iff x = 1 + \sqrt{y - 2}$ (car $x \geq 1$). Donc $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$ sur $[2; +\infty[$.