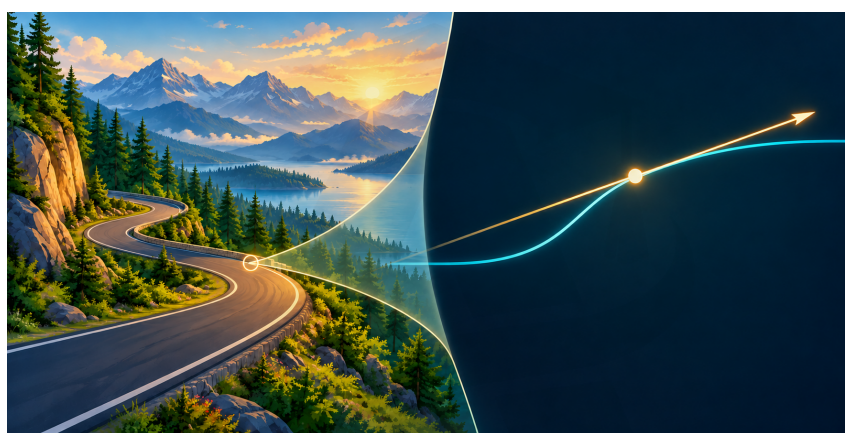


3

DÉRIVATION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

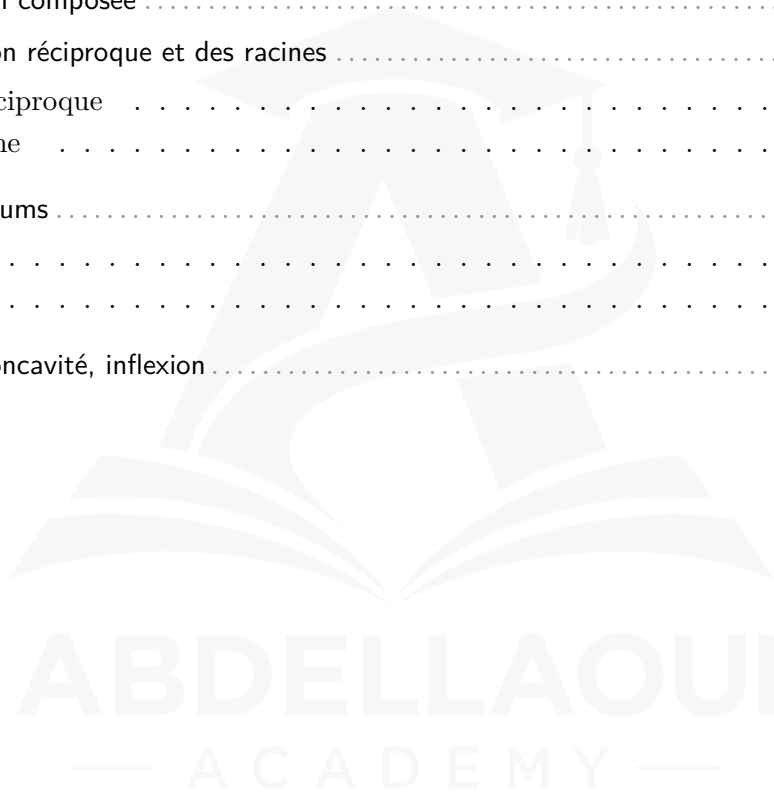


En quelques mots. Ce chapitre étudie la dérivabilité d'une fonction numérique : nombre dérivé, tangente, approximation affine, calcul de dérivées (opérations, composée, réciproque, racines), puis variations, extremums et concavité.

Objectifs	• Étudier la dérivabilité en un point, à droite et à gauche ; interpréter graphiquement • Utiliser l'approximation affine d'une fonction • Calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée • Dériver une fonction réciproque et les racines n-ièmes • Étudier variations, extremums, concavité et points d'inflexion
Prérequis	• Limites de fonctions, continuité • Dérivation et variations d'une fonction (1 BAC)
Instruments pédagogiques	• Activités de découverte • Applications guidées • Exercices corrigés par thème • Synthèse et test
Volume horaire	18 heures (indicatif)
Évaluation	Test de fin de chapitre (1 h 30)

Au sommaire de ce chapitre

I	Dérivabilité en un point	3
	Nombre dérivé et tangente	1, p. 3
	Dérivabilité à droite et à gauche	2, p. 4
	Demi-tangente verticale	3, p. 5
	Dérivabilité et continuité	4, p. 6
II	Approximation affine	7
III	Fonction dérivée	8
	Dérivabilité sur un intervalle	1, p. 8
	Dérivées des fonctions usuelles	2, p. 8
IV	Opérations sur les fonctions dérivables	9
V	Dérivée d'une fonction composée	10
VI	Dérivée d'une fonction réciproque et des racines	11
	Dérivée d'une fonction réciproque	1, p. 11
	Dérivée de la racine n -ième	2, p. 12
VII	Variations et extremums	13
	Sens de variation	1, p. 13
	Extremums	2, p. 13
VIII	Dérivée seconde, concavité, inflexion	14



I Dérivabilité en un point

1 Nombre dérivé et tangente

Activités

Activité 3.1 : Du taux d'accroissement au nombre dérivé

Soit $f(x) = x^2$ et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1. Pour $h \neq 0$, soit M_h le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $1 + h$.

1. Calculer le coefficient directeur $\tau(h)$ de la droite (AM_h) .
2. Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$.
3. Que devient la droite (AM_h) lorsque M_h se rapproche de A ?

Correction

1. $\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$.
2. $\lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$.
3. Les droites (AM_h) se rapprochent de la droite passant par A de coefficient directeur 2 : c'est la *tangente* à $\mathcal{C}_f$ en A .

Définition 3.1 : Dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 . On dit que f est *dérivable en x_0* s'il existe un réel ℓ tel que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \quad \left(\text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \right).$$

Le réel ℓ est appelé le *nombre dérivé* de f en x_0 ; on le note $f'(x_0)$.

Définition 3.2 : Tangente

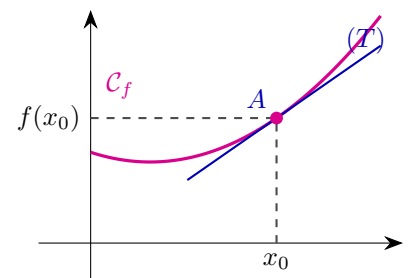
Si f est dérivable en x_0 , la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(x_0; f(x_0))$ une *tangente*, droite passant par A de coefficient directeur $f'(x_0)$:

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Si $f'(x_0) = 0$, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Remarque : Construire la tangente

Pour tracer (T) : on place A , puis le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et le point C tel que $\overrightarrow{BC} = f'(x_0)\vec{j}$; la droite (AC) est la tangente.



Application 3.1 : Nombre dérivé et tangente

Soit $f(x) = 1 - x^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer le nombre dérivé de f en $a = 1$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Correction

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (-(x + 1)) = -2$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = -2$.
2. $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f(1) = 0$: $(T) : y = -2x + 2$.

2 Dérivabilité à droite et à gauche

Activités

Activité 3.2 : La valeur absolue en 0

Soit $f(x) = |x|$. Pour $x \neq 0$, on pose $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

1. Calculer $\tau(x)$ pour $x > 0$, puis pour $x < 0$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tau(x)$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Correction

1. Si $x > 0$: $\tau(x) = \frac{x}{x} = 1$; si $x < 0$: $\tau(x) = \frac{-x}{x} = -1$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tau(x) = -1$: les limites à droite et à gauche sont différentes, donc τ n'a pas de limite en 0 : f n'est pas dérivable en 0, bien qu'elle y soit continue.

Définition 3.3 : Dérivabilité à droite, à gauche

Soit f définie sur un intervalle contenant x_0 .

- f est dérivable à droite en x_0 s'il existe $\ell_d \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d$. On note $f'_d(x_0) = \ell_d$ (nombre dérivé à droite).
- f est dérivable à gauche en x_0 s'il existe $\ell_g \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g$. On note $f'_g(x_0) = \ell_g$ (nombre dérivé à gauche).

Propriété 3.1 : Caractérisation

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Alors

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_d(x_0) = f'_g(x_0).$$

Application 3.2 : Fonction définie par morceaux

Soit $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en 0.
2. f est-elle dérivable en 0 ? Quelle est l'équation de la tangente en 0 ?

Correction

1. On a $f(0) = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$: f est dérivable à droite en 0, $f'_d(0) = 0$.
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$: f est dérivable à gauche en 0, $f'_g(0) = 0$.
2. $f'_d(0) = f'_g(0) = 0$, donc d'après la propriété 2, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. La tangente en 0 est l'axe des abscisses : $y = 0$.

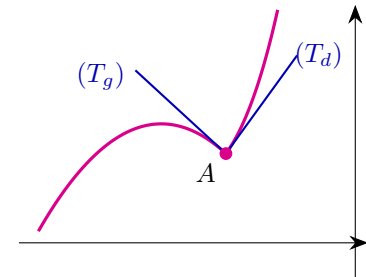
Exemple 3.1 Point anguleux

Soit $f(x) = \begin{cases} (x+3)^3 + 2 & \text{si } x \geq -2 \\ -(x+3)^2 + 4 & \text{si } x < -2. \end{cases}$

On a $f(-2) = 3$ et :

- $f'_d(-2) = 3$: demi-tangente à droite $y = 3(x+2) + 3$, $x \geq -2$;
- $f'_g(-2) = -2$: demi-tangente à gauche $y = -2(x+2) + 3$, $x \leq -2$.

Comme $f'_d(-2) \neq f'_g(-2)$, f n'est pas dérivable en -2 : $A(-2; 3)$ est un *point anguleux* de $\mathcal{C}_f$.



Application 3.3 : Dérivable ou non ?

Étudier la dérivabilité en 0 de $f(x) = x|x|$ et de $g(x) = |x| - x^2$.

Correction

$f : \frac{f(x) - f(0)}{x} = |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$: f est dérivable en 0, $f'(0) = 0$.

$g : \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{|x|}{x} - x$ vaut $1 - x \rightarrow 1$ pour $x > 0$ et $-1 - x \rightarrow -1$ pour $x < 0$: $g'_d(0) = 1 \neq g'_g(0) = -1$, donc g n'est pas dérivable en 0 (0 est un point anguleux).

3 Demi-tangente verticale

Propriété 3.2 : Demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées

Soit f continue en x_0 .

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ (resp. $-\infty$), $\mathcal{C}_f$ admet à droite de x_0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut (resp. le bas).
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ (resp. $+\infty$), $\mathcal{C}_f$ admet à gauche de x_0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut (resp. le bas).

Dans chacun de ces cas, f n'est pas dérivable (à droite ou à gauche) en x_0 .

Exemple 3.2 La racine carrée en 0

$f(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0 et, pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 0 ; $\mathcal{C}_f$ admet à droite de 0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut (l'axe des ordonnées).

Application 3.4 : Interprétation géométrique

Soit $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ sur $[-2; 2]$.

1. Montrer que f n'est pas dérivable à gauche en 2 ; interpréter géométriquement.
2. Montrer que f n'est pas dérivable à droite en -2 ; interpréter géométriquement.

Correction

1. $f(2) = 0$. Pour $x \in]-2; 2[$: $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{-(2-x)} = -\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} -\infty$ (car $2+x \rightarrow 4$ et $2-x \rightarrow 0^+$). f n'est pas dérivable à gauche en 2 ; $\mathcal{C}_f$ admet à gauche de 2 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.
2. $f(-2) = 0$. Pour $x \in]-2; 2[$: $\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{2+x} = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \xrightarrow{x \rightarrow -2^+} +\infty$. f n'est pas dérivable à droite en -2 ; $\mathcal{C}_f$ admet à droite de -2 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. ($\mathcal{C}_f$ est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 2.)

4 Dérivabilité et continuité

Propriété 3.3 : Dérivable implique continue

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Preuve. Pour $x \neq x_0$: $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0)$. Quand $x \rightarrow x_0$, le premier facteur tend vers $f'(x_0)$ et le second vers 0 ; donc $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

Remarque : La réciproque est fausse

$x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues en 0 sans y être dérivables. Par contraposée : une fonction *non continue* en x_0 n'y est jamais dérivable.

II Approximation affine

Activités

Activité 3.3 : Remplacer une courbe par sa tangente

Soit $f(x) = x^2$ et $a = 1$; on rappelle $f'(1) = 2$.

1. Pour $h \in \{0,1 ; 0,01 ; 0,001\}$, calculer $f(1+h)$ et $1+2h$.
2. Calculer l'écart $f(1+h) - (1+2h)$. Que constate-t-on ?

Correction

1. $h = 0,1 : 1,21$ et $1,2$; $h = 0,01 : 1,0201$ et $1,02$; $h = 0,001 : 1,002001$ et $1,002$.
2. L'écart vaut exactement $(1+h)^2 - 1 - 2h = h^2$: il est très petit devant h quand h est proche de 0. Au voisinage de 1, x^2 est bien approchée par la fonction affine $1+2h = f(1) + f'(1)h$.

Définition 3.4 : Approximation affine

Soit f dérivable en a .

- La fonction $u : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est la *fonction affine tangente* à f en a .
- Pour x proche de a : $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$; ou, avec $x = a+h$ et h proche de 0 :

$$f(a+h) \approx f(a) + h f'(a).$$

Remarque : Approximations usuelles en $a = 1$

Pour h proche de 0 : $(1+h)^2 \approx 1+2h$; $(1+h)^3 \approx 1+3h$; $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$; $\frac{1}{1+h} \approx 1-h$.

Exemple 3.3 Approcher $\sqrt{9,002}$

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$, $h = 0,002$. Pour $x \neq 9$: $\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{1}{\sqrt{x}+3} \rightarrow \frac{1}{6} : f'(9) = \frac{1}{6}$. Donc

$$\sqrt{9,002} = f(9+0,002) \approx f(9) + 0,002 f'(9) = 3 + \frac{0,002}{6} \approx 3,000\,333\,3.$$

La calculatrice donne $3,000\,333\,31\dots$: l'erreur est de l'ordre de 2×10^{-8} .

Application 3.5 : Approximation affine

Soit $f(x) = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.
2. Déterminer la fonction affine tangente g à f en 1.
3. En déduire une valeur approchée de $(2,00001)^2$.

Correction

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^2 - 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4 : f \text{ est dérivable en } 1, f'(1) = 4.$
2. $g(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 4 + 4(x-1) = 4x.$
3. $(2,00001)^2 = f(1,00001) \approx g(1,00001) = 4,00004$ (valeur exacte : 4,0000400001).

III Fonction dérivée

1 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 3.5 : Dérivabilité sur un intervalle

Soient $a < b$ deux réels.

- f est *dérivable sur* $]a; b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a; b[$.
- f est *dérivable sur* $[a; b]$ si elle est dérivable sur $]a; b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .
- On définit de façon analogue la dérivabilité sur $[a; b[$ (dérivable à droite en a) et sur $]a; b]$ (dérivable à gauche en b).

Définition 3.6 : Fonction dérivée, dérivées successives

Soit f dérivable sur un intervalle I . La *fonction dérivée* de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ définie sur I . Si f' est dérivable sur I , sa dérivée est la *dérivée seconde* $f'' = (f')'$. En général, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ est la *dérivée n-ième* de f .

2 Dérivées des fonctions usuelles

Propriété 3.4 : Tableau des dérivées usuelles

$f(x)$	Ensemble de définition de f	$f'(x)$	Ensemble de définition de f'
k (constante)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Application 3.6 : Dérivées successives

Calculer f' , f'' et f''' pour $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x$, puis g' , g'' et g''' pour $g(x) = \cos x$.

Correction

$$f'(x) = 4x^3 - 4x + 3, \quad f''(x) = 12x^2 - 4, \quad f'''(x) = 24x.$$

$$g'(x) = -\sin x, \quad g''(x) = -\cos x, \quad g'''(x) = \sin x.$$

IV Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 3.5 : Opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Les fonctions $u + v$, ku et uv sont dérivables sur I et :

$$1. (u + v)' = u' + v'; \quad (ku)' = ku'; \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

Si v ne s'annule pas sur I , les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et :

$$2. \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}^*$ (avec u ne s'annulant pas sur I si $n < 0$), u^n est dérivable sur I et

$$3. (u^n)' = n u' u^{n-1}.$$

Remarque : Conséquences

Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$; toute fonction rationnelle est dérivable en tout point où elle est définie, c'est-à-dire sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Application 3.7 : Calculer une dérivée

Étudier la dérivabilité de f sur l'intervalle I donné, puis calculer f' :

$$1. f(x) = \frac{5}{2}x^3 - 7x^2 - 9x + \sqrt{8}, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$2. f(x) = x^3 \cos x, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$3. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}, \quad I =]0; +\infty[.$$

$$4. f(x) = (-2x^4 + x - 3)^7, \quad I = \mathbb{R}.$$

Correction

$$1. \text{ Fonction polynomiale, donc dérivable sur } \mathbb{R} : f'(x) = \frac{5}{2} \times 3x^2 - 14x - 9 = \frac{15}{2}x^2 - 14x - 9.$$

$$2. \text{ Produit de } u(x) = x^3 \text{ et } v(x) = \cos x, \text{ dérivables sur } \mathbb{R} : f'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

$$3. \text{ Quotient de } u = \sqrt{x} \text{ et } v = x + 1, \text{ dérivables sur }]0; +\infty[, \text{ avec } v > 0 :$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - 2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

$$4. u(x) = -2x^4 + x - 3 \text{ est polynomiale; } f = u^7 : f'(x) = 7u'(x)u(x)^6 = 7(-8x^3 + 1)(-2x^4 + x - 3)^6.$$

V Dérivée d'une fonction composée

★ Théorème 3.1 : Dérivée d'une composée

Soit u définie sur un intervalle I et v définie sur un intervalle J tels que $u(I) \subset J$.

1. Si u est dérivable en $a \in I$ et v dérivable en $u(a)$, alors $v \circ u$ est dérivable en a et

$$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'(u(a)).$$

2. Si u est dérivable sur I et v dérivable sur $u(I)$, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)).$$

Application 3.8 : Décomposer une composée

Soit $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer u et v telles que $f = v \circ u$.

2. En déduire $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction

1. Avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \cos x$, dérivables sur $\mathbb{R}$: $(v \circ u)(x) = \cos(x^2 + 1) = f(x)$.

2. $f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 2x \times (-\sin(x^2 + 1)) = -2x \sin(x^2 + 1)$.

Propriété 3.6 : Cas usuels

Soient a, b deux réels et u dérivable sur un intervalle I .

- $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$ et $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$ sur $\mathbb{R}$;
- $(\tan(ax + b))' = a(1 + \tan^2(ax + b))$ sur tout intervalle où $ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$;
- si $u > 0$ sur I : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Application 3.9 : Dérivée de $\sqrt{u}$ et de u^n

1. Montrer que $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f' .

2. Montrer que $g(x) = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$ est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ et calculer g' .

3. Calculer la dérivée de $h(x) = \left(\frac{x}{x^4 + 1}\right)^5$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

1. $u(x) = x^2 + 2 \geq 2 > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

2. Sur $] -1; +\infty[$, $x + 1 > 0$ donc $u(x) = \frac{2}{x+1} > 0$; $u'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$. $g'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{-\frac{2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2}{x+1}}} = \frac{-1}{(x+1)^2\sqrt{2}/\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{\sqrt{2}(x+1)\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}(x+1)^3}$.
3. $u(x) = \frac{x}{x^4+1}$ est rationnelle, $u'(x) = \frac{(x^4+1) - 4x^4}{(x^4+1)^2} = \frac{1-3x^4}{(x^4+1)^2}$. Donc $h'(x) = 5u'u^4 = \frac{5x^4(1-3x^4)}{(x^4+1)^6}$.

VI Dérivée d'une fonction réciproque et des racines

1 Dérivée d'une fonction réciproque

★ Théorème 3.2 : Dérivée de la fonction réciproque

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I , $J = f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.

1. Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

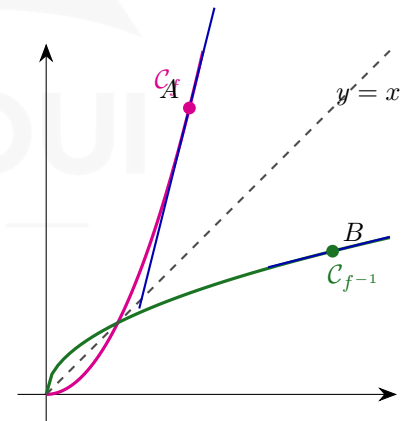
2. Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Remarque : Interprétation graphique

Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$; les tangentes aux points symétriques $A(a; f(a))$ et $B(f(a); a)$ le sont aussi, d'où des coefficients directeurs inverses l'un de l'autre.

Si $f'(a) = 0$, la tangente en A est horizontale et celle de $C_{f^{-1}}$ en B est *verticale* : f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$.



Application 3.10 : Dériver une réciproque

Soit $f(x) = x^2 + 1$ sur $I = [1; +\infty[$.

- Montrer que f admet une fonction réciproque définie de J sur I , avec J à déterminer.
- Calculer $f(3)$ et $f'(3)$.
- Montrer que f^{-1} est dérivable en 10 et calculer $(f^{-1})'(10)$.

Correction

1. f est dérivable sur I et $f'(x) = 2x > 0$: f est continue et strictement croissante, donc bijective de I sur $J = f(I) = [2; +\infty[$ (car $f(1) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$).
2. $f(3) = 10$ et $f'(3) = 6$.
3. f est dérivable en 3 avec $f'(3) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en $f(3) = 10$ et $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{6}$.

2 Dérivée de la racine n -ième

Propriété 3.7 : Dérivée de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. La fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{n (\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Preuve. $g : x \mapsto x^n$ est continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = nx^{n-1} \neq 0$. Sa réciproque est $f = \sqrt[n]{x}$, dérivable sur $g(]0; +\infty[) =]0; +\infty[$, et d'après le théorème 1, $f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{n (\sqrt[n]{x})^{n-1}}$. ■ ■

Propriété 3.8 : Racines et puissances de u

Soit u strictement positive et dérivable sur un intervalle I , $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{Q}^*$. Alors $\sqrt[n]{u}$ et u^r sont dérivables sur I et

$$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n (\sqrt[n]{u})^{n-1}} = \frac{1}{n} u' u^{\frac{1}{n}-1}, \quad (u^r)' = r u' u^{r-1}.$$

Application 3.11 : Dériver des racines

Déterminer la dérivée de f sur l'intervalle I :

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $I =]0; +\infty[$.
2. $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \sqrt[5]{2 + \cos x}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = (x^3 + \sqrt{5})^{\frac{2}{3}}$, $I = [0; +\infty[$.

Correction

1. $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
2. $x^2 + 1 > 0$: $f'(x) = \frac{2x}{4\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}}$.
3. $2 + \cos x \geq 1 > 0$: $f'(x) = \frac{-\sin x}{5\sqrt[5]{(2 + \cos x)^4}}$.

$$4. x^3 + \sqrt{5} > 0 \text{ sur } I : f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 (x^3 + \sqrt{5})^{-\frac{1}{3}} = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{5}}}.$$

VII Variations et extremums

1 Sens de variation

Propriété 3.9 : Dérivée et monotonie

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- $f' \geq 0$ sur $I \iff f$ croissante sur I ; $f' \leq 0$ sur $I \iff f$ décroissante sur I ; $f' = 0$ sur $I \iff f$ constante sur I .
- Si $f' > 0$ sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I . De même avec $f' < 0$ et strictement décroissante.

Application 3.12 : Étude des variations

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f' .
- Dresser le tableau de variations de f .

Correction

- f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
- f' est positive à l'extérieur des racines -1 et 1 et négative entre elles : f est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$, décroissante sur $[-1; 1]$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			2		$-\infty$	$+\infty$

2 Extremums

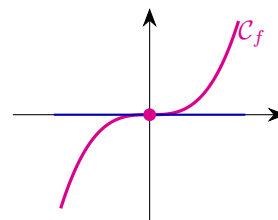
Propriété 3.10 : Dérivée et extremums

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et $\alpha \in I$.

- Si f admet un extremum en α , alors $f'(\alpha) = 0$.
- Si f' s'annule en α en changeant de signe, alors $f(\alpha)$ est un extremum de f : un minimum si f' passe de $-$ à $+$, un maximum si elle passe de $+$ à $-$.

Remarque : Attention : la réciproque de 1. est fausse

$f'(\alpha) = 0$ ne signifie pas que $f(\alpha)$ est un extremum.
Exemple : $f(x) = 2x^3$ a pour dérivée $f'(x) = 6x^2$, donc $f'(0) = 0$; mais f' ne change pas de signe en 0 et $f(0) = 0$ n'est pas un extremum (la tangente en 0 traverse la courbe).


Application 3.13 : Extremums sur un intervalle

Soit $f(x) = 3x - x^3$ sur $\mathbb{R}$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Montrer que f admet un extremum sur $[-\frac{3}{2}; 0]$ et sur $[0; 2]$, et préciser sa nature.

Correction

1. $f'(x) = 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(1 + x)$: négative sur $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$, positive sur $]-1; 1[$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		2		$-\infty$

2. $-1 \in]-\frac{3}{2}; 0[$ et f' s'annule en -1 en passant de $-$ à $+$: $f(-1) = -2$ est la valeur minimale de f sur $[-\frac{3}{2}; 0]$ (locale sur $\mathbb{R}$). $1 \in]0; 2[$ et f' passe de $+$ à $-$ en 1 : $f(1) = 2$ est la valeur maximale de f sur $[0; 2]$.

VIII Dérivée seconde, concavité, inflexion
Définition 3.7 : Concavité

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'' > 0$ sur I : $\mathcal{C}_f$ est située *au-dessus* de ses tangentes sur I ; on dit que f est *convexe* (concavité tournée vers les ordonnées positives, $\cup$).
- Si $f'' < 0$ sur I : $\mathcal{C}_f$ est située *au-dessous* de ses tangentes sur I ; on dit que f est *concave* ($\cap$).

Propriété 3.11 : Point d'inflexion

Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, le point $A(x_0; f(x_0))$ est un *point d'inflexion* de $\mathcal{C}_f$: en ce point, la concavité change et la tangente *traverse* la courbe.

Exemple 3.4 Lire un signe de f''

Le tableau donne le signe de f'' : f est convexe ($f'' > 0$) sur $]-\infty; -2[$ et sur $]3; +\infty[$, concave ($f'' < 0$) sur $]-2; 3[$. f'' change de signe en -2 et en 3 : ce sont des abscisses de points d'inflexion. En 1 , f'' s'annule sans changer de signe : ce n'en est pas une.

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

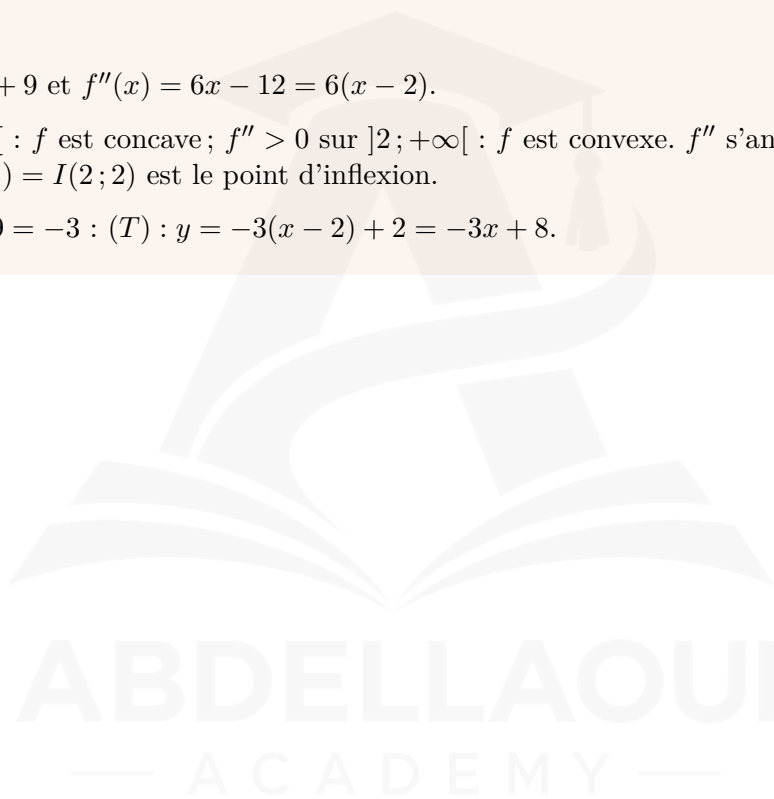
Application 3.14 : Concavité et inflexion

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer f' et f'' .
2. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et déterminer son point d'inflexion.
3. Écrire l'équation de la tangente en ce point.

Correction

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$.
2. $f'' < 0$ sur $]-\infty; 2[$: f est concave ; $f'' > 0$ sur $]2; +\infty[$: f est convexe. f'' s'annule en 2 en changeant de signe : $I(2; f(2)) = I(2; 2)$ est le point d'inflexion.
3. $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$: $(T) : y = -3(x - 2) + 2 = -3x + 8$.



Exercice 3.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. $x \mapsto |x|$ est dérivable en 0.
2. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
3. Si f est continue en a , alors f est dérivable en a .
4. $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en 0.
5. $x \mapsto x|x|$ est dérivable en 0.

Correction

1. **Faux** : $f'_d(0) = 1 \neq f'_g(0) = -1$.
2. **Vrai** : propriété 4.
3. **Faux** : $|x|$ est continue mais non dérivable en 0.
4. **Faux** : $\frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$.
5. **Vrai** : $\frac{x|x|}{x} = |x| \rightarrow 0$, donc $f'(0) = 0$.

Exercice 3.2 : Nombre dérivé par la définition ★★★

Dans chaque cas, montrer que f est dérivable en a en utilisant la définition, puis écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

1. $f(x) = x^2 - 3x$, $a = 2$.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$.
3. $f(x) = \sqrt{x+3}$, $a = 1$.

Correction

1. $f(2) = -2$; $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x - 1 \rightarrow 1$. Donc $f'(2) = 1$ et $(T) : y = (x - 2) - 2 = x - 4$.
2. $f(2) = \frac{1}{2}$; $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \frac{2 - x}{2x(x - 2)} = -\frac{1}{2x} \rightarrow -\frac{1}{4}$. Donc $f'(2) = -\frac{1}{4}$ et $(T) : y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} = -\frac{x}{4} + 1$.
3. $f(1) = 2$; $\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \frac{(x+3) - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} \rightarrow \frac{1}{4}$. Donc $f'(1) = \frac{1}{4}$ et $(T) : y = \frac{1}{4}(x - 1) + 2 = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$.

Exercice 3.3 : Raccordement dérivable ★★★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$ Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1, puis écrire l'équation de la tangente en 1.

Correction

Si f est dérivable en 1, elle y est continue : $f(1) = 1 + a + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$, donc $a + b = 0$.

À droite : $\frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x}{x(x - 1)} = -\frac{1}{x} \rightarrow -1$, donc $f'_d(1) = -1$. À gauche, avec $b = -a$: $\frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1) + a(x - 1)}{x - 1} = x + 1 + a \rightarrow 2 + a$, donc $f'_g(1) = 2 + a$.

Dérivable en 1 $\iff f'_g(1) = f'_d(1) \iff 2 + a = -1 \iff a = -3$, d'où $b = 3$. Alors $f'(1) = -1$ et (T) : $y = -(x - 1) + 1 = -x + 2$.

Exercice 3.4 : Point anguleux ★★★

Soit $f(x) = |x^2 - 1|$. Montrer que f n'est pas dérivable en 1, préciser les deux demi-tangentes en $A(1; 0)$ et nommer le point A .

Correction

$f(1) = 0$. Pour $x > 1$: $f(x) = x^2 - 1$ et $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = x + 1 \rightarrow 2$: $f'_d(1) = 2$. Pour $x < 1$ proche de 1 :

$f(x) = 1 - x^2$ et $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1 - x^2}{x - 1} = -(x + 1) \rightarrow -2$: $f'_g(1) = -2$.

$f'_d(1) \neq f'_g(1)$, donc f n'est pas dérivable en 1. Demi-tangentes : $y = 2(x - 1)$ pour $x \geq 1$ et $y = -2(x - 1)$ pour $x \leq 1$. A est un *point anguleux*.

Exercice 3.5 : Un demi-cercle ★★★

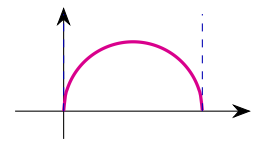
Soit $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 2. Interpréter géométriquement.

Correction

1. $2x - x^2 = x(2 - x) \geq 0 \iff x \in [0; 2]$.

2. $f(0) = 0$ et $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x(2 - x)}}{x} = \sqrt{\frac{2 - x}{x}} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$: f n'est pas dérivable à droite en 0, demi-tangente verticale vers le haut. $f(2) = 0$ et $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x(2 - x)}}{-(2 - x)} = -\sqrt{\frac{x}{2 - x}} \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 2^-$: pas dérivable à gauche en 2, demi-tangente verticale vers le haut. $\mathcal{C}_f$ est le demi-cercle supérieur de centre $(1; 0)$ et de rayon 1.



Exercice 3.6 : Sommes, produits, quotients ★★

Calculer la dérivée de f sur l'intervalle indiqué :

- a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 1, \mathbb{R}$
 b) $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3), \mathbb{R}$
 c) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2},]2; +\infty[$
 d) $f(x) = \frac{\sin x}{x},]0; +\infty[$

Correction

- a) $f'(x) = 12x^3 - 4x + 5.$
 b) $f'(x) = 2(x^2 + 3) + (2x - 1)(2x) = 6x^2 - 2x + 6.$
 c) $f'(x) = \frac{2x(x - 2) - (x^2 + 1)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2}.$
 d) $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$

Exercice 3.7 : Fonctions composées ★★

Calculer la dérivée de chaque fonction sur un intervalle où elle est dérivable :

- a) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$
 b) $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
 c) $h(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{4})$
 d) $k(x) = \tan(2x)$
 e) $l(x) = \sin^2 x$
 f) $m(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$

Correction

- a) $f'(x) = 5(2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^4.$
 b) $x^2 + x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ (discriminant $-3 < 0$) : $g'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}.$
 c) $h'(x) = -3 \sin(3x - \frac{\pi}{4}).$
 d) $k'(x) = 2(1 + \tan^2(2x))$ sur tout intervalle où $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$
 e) $l'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$
 f) $m = (x^2 + 1)^{-3} : m'(x) = -3 \times 2x (x^2 + 1)^{-4} = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^4}.$

Exercice 3.8 : Racines et puissances rationnelles ★★

Calculer la dérivée de f sur l'intervalle I :

- a) $f(x) = \sqrt[4]{2x + 1}, I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$
 b) $f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}, I = \mathbb{R}$
 c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, I =]0; +\infty[$
 d) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 + 1)^7}, I = \mathbb{R}$

Correction

- a) $f'(x) = \frac{2}{4\sqrt[4]{(2x + 1)^3}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x + 1)^3}}.$
 b) $f'(x) = \frac{3}{2} \times 2x (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 3x\sqrt{x^2 + 1}.$
 c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} : f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$

d) $f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{7}{5}} : f'(x) = \frac{7}{5} \times 2x (x^2 + 1)^{\frac{2}{5}} = \frac{14}{5} x \sqrt[5]{(x^2 + 1)^2}.$

Exercice 3.9 : Ensemble de dérivabilité ★★★

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Montrer que f est dérivable sur $] -\infty ; 1[\cup] 3 ; +\infty [$ et calculer f' .
3. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et à droite en 3. Interpréter.

Correction

1. $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) \geq 0 \iff x \in] -\infty ; 1[\cup] 3 ; +\infty [$.
2. Sur $] -\infty ; 1[\cup] 3 ; +\infty [$, $u(x) = x^2 - 4x + 3 > 0 : f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.$
3. $f(1) = 0$; pour $x < 1 : \frac{f(x)}{x - 1} = \frac{\sqrt{(1 - x)(3 - x)}}{-(1 - x)} = -\sqrt{\frac{3 - x}{1 - x}} \rightarrow -\infty : \text{pas dérivable à gauche en 1,}$
demi-tangente verticale vers le haut. $f(3) = 0$; pour $x > 3 : \frac{f(x)}{x - 3} = \sqrt{\frac{x - 1}{x - 3}} \rightarrow +\infty : \text{pas dérivable à}$
droite en 3, demi-tangente verticale vers le haut.



Exercice 3.10 : Étude d'une fonction polynomiale ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1. Calculer f' et dresser le tableau de variations de f .
2. Vérifier que $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ et en déduire le signe de f .
3. Montrer que $A(1; 2)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ et écrire l'équation de la tangente en A .

Correction

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$: f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et $[2; +\infty[$, décroissante sur $[0; 2]$; $f(0) = 4$, $f(2) = 0$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

2. $(x+1)(x-2)^2 = (x+1)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 3x^2 + 4$. Comme $(x-2)^2 \geq 0$, $f(x)$ a le signe de $x+1$: négative pour $x < -1$, nulle en -1 et 2 , positive ailleurs.
3. $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$ s'annule en 1 en passant de $-$ à $+$: $A(1; f(1)) = A(1; 2)$ est un point d'inflexion. $f'(1) = -3$: $(T) : y = -3(x-1) + 2 = -3x + 5$.

Exercice 3.11 : Une fonction bornée ★★★

Soit $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer f' et dresser le tableau de variations (limites en $\pm\infty$ comprises).
2. En déduire que $-1 \leq f(x) \leq 1$ pour tout réel x . Écrire l'équation de la tangente en 0.

Correction

1. $f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$. Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	-1	1	0	

2. Le minimum de f est $f(-1) = -1$ et son maximum $f(1) = 1$: $-1 \leq f(x) \leq 1$. Comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$: $(T) : y = 2x$.

Exercice 3.12 : Optimisation ★★★

Un rectangle a pour périmètre 40 cm. Quelles dimensions donnent l'aire maximale ?

Correction

Si x est la longueur d'un côté ($x \in [0; 20]$), l'autre côté vaut $20 - x$ et l'aire est $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$. $A'(x) = 20 - 2x$ s'annule en 10 en passant de $+$ à $-$: A est maximale pour $x = 10$, avec $A(10) = 100 \text{ cm}^2$. Le rectangle d'aire maximale est le carré de côté 10 cm.

Exercice 3.13 : Tangentes passant par un point ★★★

Déterminer les tangentes à la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ passant par le point $P(1; -3)$.

Correction

La tangente en a a pour équation $y = 2a(x - a) + a^2$. Elle passe par P si $-3 = 2a(1 - a) + a^2 = 2a - a^2$, soit $a^2 - 2a - 3 = 0$, d'où $a = 3$ ou $a = -1$. Les tangentes sont $y = 6x - 9$ (en $a = 3$) et $y = -2x - 1$ (en $a = -1$) ; on vérifie que P les vérifie : $6 - 9 = -3$ et $-2 - 1 = -3$.

Exercice 3.14 : Dérivée d'une réciproque ★★★

1. Soit $f(x) = x^3 + 2x$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $(f^{-1})'(3)$ et $(f^{-1})'(0)$, puis la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse 3.
2. Soit $g(x) = x^2 - 2x$ sur $I = [1; +\infty[$. Montrer que g est bijective de I sur $J = [-1; +\infty[$ et que g^{-1} n'est pas dérivable en -1 .

Correction

1. $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$: f est continue, strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$: bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. $f(1) = 3$, $f'(1) = 5$: $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{5}$. $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$: $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$. Comme $f^{-1}(3) = 1$:
 $y = \frac{1}{5}(x - 3) + 1 = \frac{x}{5} + \frac{2}{5}$.
2. $g'(x) = 2x - 2 > 0$ sur $]1; +\infty[$: g est continue, strictement croissante sur I , $g(1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$: bijection de I sur J . Or $g'(1) = 0$: le théorème ne s'applique pas en $g(1) = -1$. Explicitement $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 1}$, non dérivable en -1 (demi-tangente verticale).

Exercice 3.15 : Valeurs approchées ★★★

À l'aide de l'approximation affine, donner une valeur approchée de $\sqrt{16,02}$, de $(0,99)^5$ et de $\frac{1}{1,002}$.

Correction

$\sqrt{x}$ en 16 : $f'(16) = \frac{1}{8}$, d'où $\sqrt{16,02} \approx 4 + 0,02 \times \frac{1}{8} = 4,0025$. x^5 en 1 : $f'(1) = 5$, d'où $(0,99)^5 = (1 - 0,01)^5 \approx 1 - 5 \times 0,01 = 0,95$. $\frac{1}{x}$ en 1 : $f'(1) = -1$, d'où $\frac{1}{1,002} \approx 1 - 0,002 = 0,998$.

Synthèse 3.1 : Étude complète d'une fonction

Soit $f(x) = x\sqrt{x+1}$.

- Déterminer l'ensemble de définition D de f . Justifier que f est continue sur D .
- Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter graphiquement.
- Montrer que f est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$.
- Dresser le tableau de variations de f sur D .
- Écrire l'équation de la tangente en 3 et en déduire une valeur approchée de $f(3,01)$.
- Soit g la restriction de f à $I = [-\frac{2}{3}; +\infty[$. Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser, puis calculer $(g^{-1})'(6)$ et $(g^{-1})'(0)$.

Correction

- $D = [-1; +\infty[$; f est le produit de $x \mapsto x$ et de $x \mapsto \sqrt{x+1}$, continues sur D .
- $f(-1) = 0$; pour $x > -1$: $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{x\sqrt{x+1}}{x+1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -1^+$ (numérateur $\rightarrow -1$, dénominateur $\rightarrow 0^+$). f n'est pas dérivable à droite en -1 ; $\mathcal{C}_f$ y admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.
- Produit de $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x+1}$, dérivables sur $] -1; +\infty[$ ($x+1 > 0$) : $f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1) + x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$.
- $f'(x)$ a le signe de $3x+2$: négative sur $] -1; -\frac{2}{3}[$, positive sur $] -\frac{2}{3}; +\infty[$. $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0,385$, $f(-1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

x	-1	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$+\infty$	

- $f(3) = 3\sqrt{4} = 6$ et $f'(3) = \frac{11}{4}$: $(T) : y = \frac{11}{4}(x-3) + 6 = \frac{11}{4}x - \frac{9}{4}$. Donc $f(3,01) \approx 6 + 0,01 \times \frac{11}{4} = 6,0275$ (valeur exacte : $6,02752\dots$).
- g est continue et strictement croissante sur I (car $f' > 0$ sur $] -\frac{2}{3}; +\infty[$), $g(-\frac{2}{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$: bijection de I sur $J = [-\frac{2\sqrt{3}}{9}; +\infty[$. $g(3) = 6$ et $f'(3) = \frac{11}{4} \neq 0$: $(g^{-1})'(6) = \frac{4}{11}$. $g(0) = 0$ ($0 \in I$) et $f'(0) = 1$: $(g^{-1})'(0) = 1$.



Dérivation d'une fonction numérique

2 BAC SE · 1 h 30 · Date :

Nom et prénom :

Classe : N° :

/20

Exercice 3.1 : Vrai ou faux 4 pt

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant brièvement.

4 pt

1. $f(x) = |x - 2|$ est dérivable en 2.
2. Si $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum en a .
3. Si u est dérivable et strictement positive sur I , alors $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ sur I .
4. Si f est dérivable sur I et $f' > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I .

Correction

1. **Faux** : $f'_d(2) = 1$ et $f'_g(2) = -1$.
2. **Faux** : $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ sans extremum en 0.
3. **Vrai** : propriété du cours (composée de u et $\sqrt{\cdot}$).
4. **Vrai** : propriété du lien entre signe de f' et monotonie.

Exercice 3.2 : Dérivabilité en un point 6 pt

Soit f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Montrer que, pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$. 1 pt
2. Montrer que f est continue en 0. 1 pt
3. Montrer, en utilisant la définition, que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{8}$. 2,5 pt
4. Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. 1,5 pt

Correction

1. Pour $x \neq 0$: $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = f(0)$.
3. Soit $s = \sqrt{x+1}$. Pour $x \neq 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{1-s}{2(s+1)x}$ et $1-s = \frac{-x}{1+s}$, donc ce quotient vaut $-\frac{1}{2(s+1)^2} \rightarrow -\frac{1}{8}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{8}$.

4. $(T) : y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

Exercice 3.3 : Étude d'une fonction 6 pt

Soit $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et que $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. 2 pt
2. Dresser le tableau de variations de f (limites aux bornes comprises). 2 pt
3. Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3. 2 pt

Correction

1. f est rationnelle, donc dérivable sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$; $f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
2. f' est positive sur $]-\infty; 0[$ et $]2; +\infty[$, négative sur $]0; 1[$ et $]1; 2[$. Limites : $-\infty$ en $-\infty$, $-\infty$ en 1^- , $+\infty$ en 1^+ , $+\infty$ en $+\infty$; $f(0) = 0$, $f(2) = 4$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$					

3. $f(3) = \frac{9}{2}$ et $f'(3) = \frac{3 \times 1}{4} = \frac{3}{4}$: $(T) : y = \frac{3}{4}(x-3) + \frac{9}{2} = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

Exercice 3.4 : Dérivée d'une réciproque 4 pt

Soit $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. 1 pt
2. Calculer $f(1)$, puis $(f^{-1})'(2)$. 1,5 pt
3. Calculer la dérivée de $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$. 1,5 pt

Correction

1. f est dérivable, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: continue et strictement croissante, avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4 \neq 0$ donc $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$.
3. $x^2 + 1 > 0$: $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.