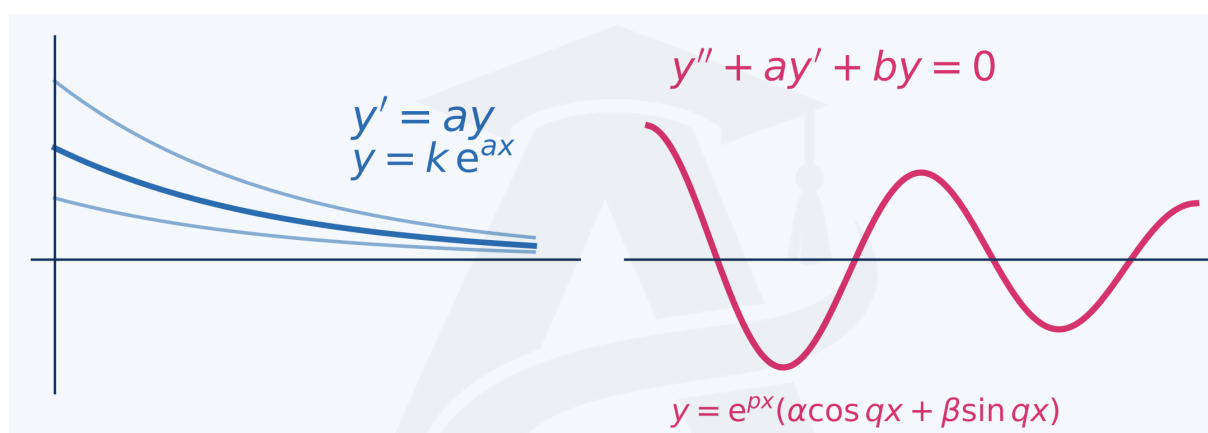


10

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



En quelques mots. Ce chapitre résout les équations différentielles $y' = ay$, $y' = ay + b$ et $y'' + ay' + by = 0$, détermine la solution vérifiant des conditions initiales et utilise ces équations pour modéliser refroidissement, désintégration, charge d'un condensateur et oscillations.

Objectifs	• Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle • Résoudre $y' = ay$ et $y' = ay + b$ • Résoudre $y'' + ay' + by = 0$ selon le signe de Δ • Déterminer la solution vérifiant des conditions initiales • Modéliser une situation par une équation différentielle
Prérequis	• Fonction exponentielle, dérivation • Équations du second degré dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, trigonométrie
Instruments pédagogiques	• Activités de découverte • Applications guidées • Exercices corrigés par thème • Synthèse et test
Volume horaire	14 heures (indicatif)
Évaluation	Test de fin de chapitre (1 h 30)

Au sommaire de ce chapitre

I Équations différentielles du premier ordre	3
L'équation $y' = ay$	1, p. 3
L'équation $y' = ay + b$	2, p. 4
II Équations différentielles du second ordre	6
L'équation $y'' + ay' + by = 0$	1, p. 6



I Équations différentielles du premier ordre

1 L'équation $y' = ay$

Activités

Activité 10.1 : Une première équation différentielle

Soit $f(x) = 2e^{-4x}$ sur $\mathbb{R}$, et on note $y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$.

1. Calculer y' et y'' . Montrer que $y'' + 3y' - 4y = 0$.
2. Montrer que $y' = -4y$. La fonction $g(x) = 3e^{-4x}$ vérifie-t-elle aussi cette relation ?
3. Soit h une fonction dérivable vérifiant $h' = -4h$. En posant $u(x) = h(x)e^{4x}$, calculer u' . Que peut-on dire de h ?

Définition 10.1 : Équation différentielle

Une *équation différentielle* est une équation dont l'inconnue est une fonction y et qui relie y à ses dérivées y' , y'' , ... Une *solution* sur un intervalle I est une fonction dérivable (autant de fois que nécessaire) qui la vérifie sur I . Résoudre l'équation, c'est déterminer toutes ses solutions.

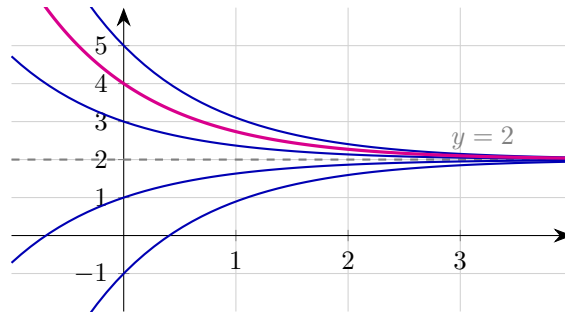
★ Théorème 10.1 : Solutions de $y' = ay$

Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Preuve. ke^{ax} convient : $(ke^{ax})' = ake^{ax}$. Réciproquement, si $f' = af$, la fonction $u = fe^{-ax}$ vérifie $u' = f'e^{-ax} - afe^{-ax} = 0$, donc u est constante et $f(x) = ke^{ax}$. ■

Propriété 10.1 : Condition initiale

Pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution f de $y' = ay$ telle que $f(x_0) = y_0$: c'est $f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$.



Courbes des solutions de $y' = -y + 2$: $y = ke^{-x} + 2$; elles tendent toutes vers l'asymptote $y = 2$ ($k = 2$ en rose).

Exemple 10.2 Avec condition initiale

$$y' = 3y + 2 : y = ke^{3x} - \frac{2}{3}. \text{ Condition } f(-1) = \frac{1}{3} : ke^{-3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \iff k = e^3, \text{ donc } f(x) = e^{3x+3} - \frac{2}{3}.$$

Application 10.2 : Résoudre $y' = ay + b$

1. Résoudre $y' + 4y - 7 = 0$; $y' - 6y = 3$; $3y' + 5y = 8$.
2. Déterminer la solution f de $y' - 6y = 3$ telle que $f\left(\frac{1}{6}\right) = 0$.
3. Résoudre $y' + 3y = 6$ avec $f(0) = 0$; puis $2y' - y = 3$ avec $f(2) = 1$.

Application 10.3 : Loi de refroidissement

Un café à 90°C est posé dans une pièce à 20°C . Sa température $T(t)$ (en $^{\circ}\text{C}$, t en minutes) vérifie $T' = -0,05(T - 20)$.

1. Résoudre l'équation avec $T(0) = 90$.
2. Calculer $T(10)$ puis déterminer à quel instant le café atteint 40°C .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II Équations différentielles du second ordre

1 L'équation $y'' + ay' + by = 0$

Activités

Activité 10.2 : Chercher des solutions de la forme e^{rx}

Soit $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$.

1. Pour r réel, calculer $y'' - 3y' + 2y$ pour $y = e^{rx}$. À quelle condition sur r cette fonction est-elle solution ?
2. En déduire deux solutions y_1 et y_2 .
3. Montrer que $\alpha y_1 + \beta y_2$ est encore solution pour tous réels α, β .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 10.2 : Équation caractéristique

Soient a, b deux réels. L'équation $(E) : y'' + ay' + by = 0$ a pour *équation caractéristique* $r^2 + ar + b = 0$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

★ Théorème 10.3 : Solutions de $y'' + ay' + by = 0$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont, avec α, β réels :

1. si $\Delta > 0$ (racines réelles $r_1 \neq r_2$) : $y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$;
2. si $\Delta = 0$ (racine double r_0) : $y = (\alpha + \beta x) e^{r_0 x}$;
3. si $\Delta < 0$ (racines complexes $p \pm iq$, $q > 0$) : $y = e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$.

Propriété 10.3 : Conditions initiales

Pour tout x_0 et tous réels y_0, y_1 , il existe une unique solution f de (E) telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Remarque : Méthode

1) écrire l'équation caractéristique ; 2) calculer Δ ; 3) écrire la forme générale ; 4) pour des conditions initiales, calculer f' puis résoudre le système en (α, β) .

Exemple 10.3 Un exemple par cas

$y'' - 3y' + 2y = 0$: $r = 1, 2$, $y = \alpha e^x + \beta e^{2x}$. $y'' + 4y' + 4y = 0$: $r_0 = -2$, $y = (\alpha + \beta x) e^{-2x}$. $y'' - 4y' + 13y = 0$: $\Delta = -36$, $r = 2 \pm 3i$, $y = e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)$.

Application 10.4 : Résoudre

1. Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$ puis déterminer f telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.
2. Résoudre $y'' + 4y = 0$ puis déterminer f telle que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
3. Résoudre $y'' - 2y' + y = 0$ avec $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$.

Remarque : Oscillations

Pour $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$), les solutions $\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{\omega}$; on peut écrire $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ avec $A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ (amplitude).



Exercice 10.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. $f(x) = e^{2x} + 1$ est solution de $y' = 2y$.
2. Pour $a \neq 0$, la fonction constante $-\frac{b}{a}$ est solution de $y' = ay + b$.
3. $x \mapsto \cos x$ est solution de $y'' + y = 0$.
4. Toute solution de $y'' - 4y' + 13y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 10.2 : Équations avec condition initiale ★★★

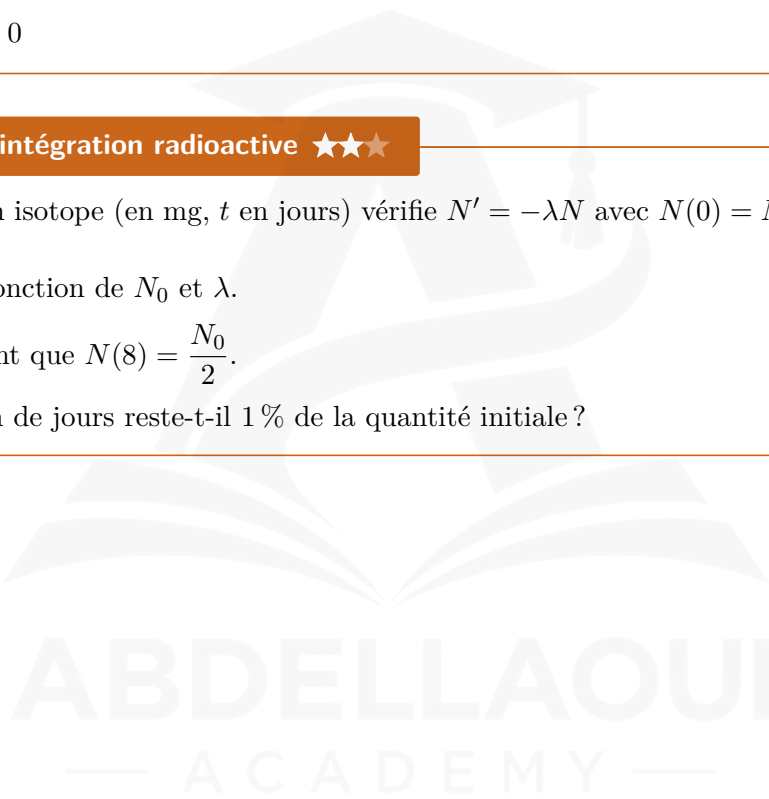
Résoudre puis déterminer la solution f demandée :

1. $4y' - 3y = 0$, $f(0) = 2$
2. $y' + 3y = 6$, $f(0) = 0$

Exercice 10.3 : Désintégration radioactive ★★★

Une quantité $N(t)$ d'un isotope (en mg, t en jours) vérifie $N' = -\lambda N$ avec $N(0) = N_0$; sa demi-vie est de 8 jours.

1. Exprimer $N(t)$ en fonction de N_0 et λ .
2. Déterminer λ sachant que $N(8) = \frac{N_0}{2}$.
3. Au bout de combien de jours reste-t-il 1 % de la quantité initiale ?



Exercice 10.4 : Résoudre ★★★Résoudre dans $\mathbb{R}$:

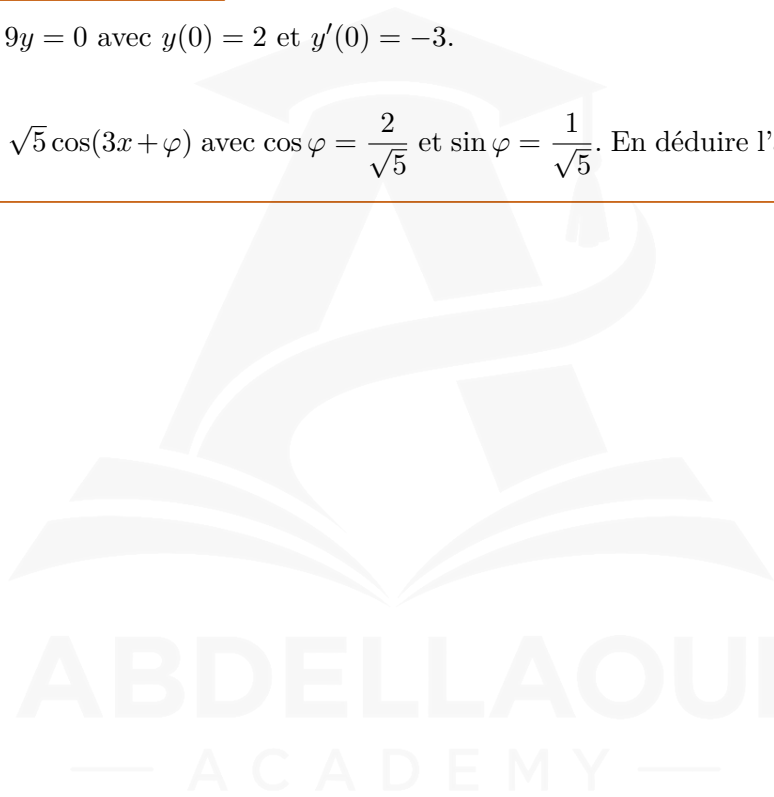
1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' - 4y' + 13y = 0$
4. $y'' - y = 0$
5. $y'' + 2y' + 5y = 0$

Exercice 10.5 : Vérifier une solution ★★★

1. Montrer que $f(x) = xe^{2x}$ est solution de $y'' - 4y' + 4y = 0$.
2. Montrer que $g(x) = e^{-x} \sin 3x$ est solution de $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Exercice 10.6 : Oscillations ★★★Une masse vérifie $y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = -3$.

1. Déterminer y .
2. Montrer que $y(x) = \sqrt{5} \cos(3x + \varphi)$ avec $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$. En déduire l'amplitude et la période.



Synthèse 10.1 : Charge d'un condensateur

Un condensateur, initialement déchargé, est branché sur une source de tension $E = 12 \text{ V}$ à travers une résistance. La tension $u(t)$ à ses bornes (t en secondes) vérifie $\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}u = 6$ avec $u(0) = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle et déterminer $u(t)$.
2. Étudier les variations de u et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(t)$. Interpréter.
3. Au bout de quel temps u atteint-elle 90 % de E ?
4. Calculer $u'(0)$ et tracer la courbe de u avec sa tangente en 0 et son asymptote.





Les équations différentielles

2 BAC SE · 1 h 30 · Date :

/20

Exercice 10.1 : Premier ordre 5 pt

1. Résoudre $y' + 3y = 0$ et déterminer la solution f telle que $f(0) = 2$.
2. Résoudre $2y' - y = 4$ et déterminer la solution g telle que $g(0) = 1$.

2 pt

3 pt

Exercice 10.2 : Second ordre 5 pt

1. Résoudre $y'' + y' - 6y = 0$ et déterminer la solution telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 5$.
2. Résoudre $y'' + 6y' + 9y = 0$.
3. Résoudre $y'' + 2y' + 10y = 0$.

2,5 pt

1 pt

1,5 pt

Exercice 10.3 : Refroidissement 5 pt

Une pièce est à 15°C . Un objet à 95°C y est déposé; sa température $T(t)$ vérifie $T' = -0,2(T - 15)$ (t en minutes).

1. Écrire l'équation sous la forme $T' = aT + b$ et la résoudre avec $T(0) = 95$.
2. Calculer $T(5)$ (arrondi au dixième).
3. À quel instant l'objet atteint-il 35°C ?
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(t)$ et interpréter.

2 pt

1 pt

1,5 pt

0,5 pt

Exercice 10.4 : Une équation du second ordre 5 pt

On considère $(E) : y'' - 2y' + 2y = 0$.

1. Résoudre (E) .
2. Déterminer la solution g telle que $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

2 pt

2 pt

1 pt