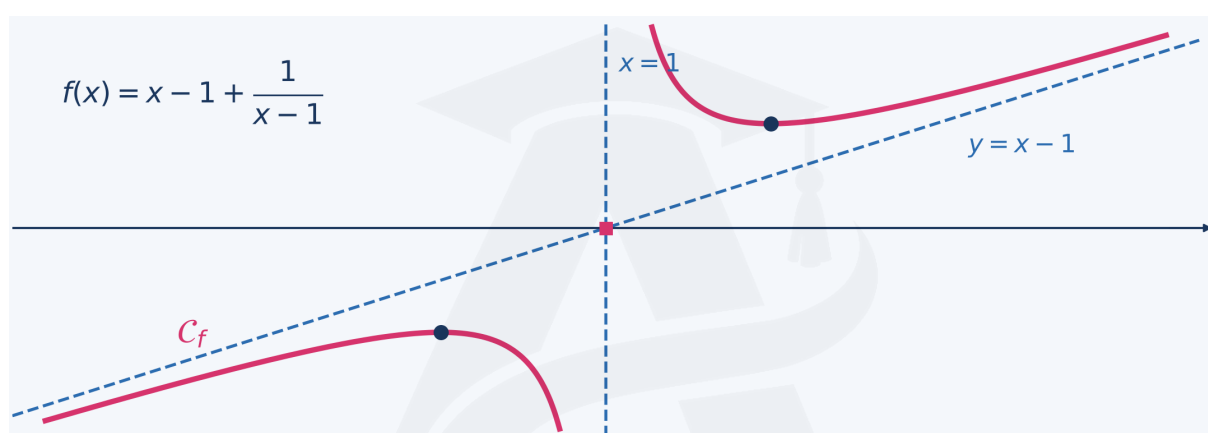


4

ÉTUDE DE FONCTIONS

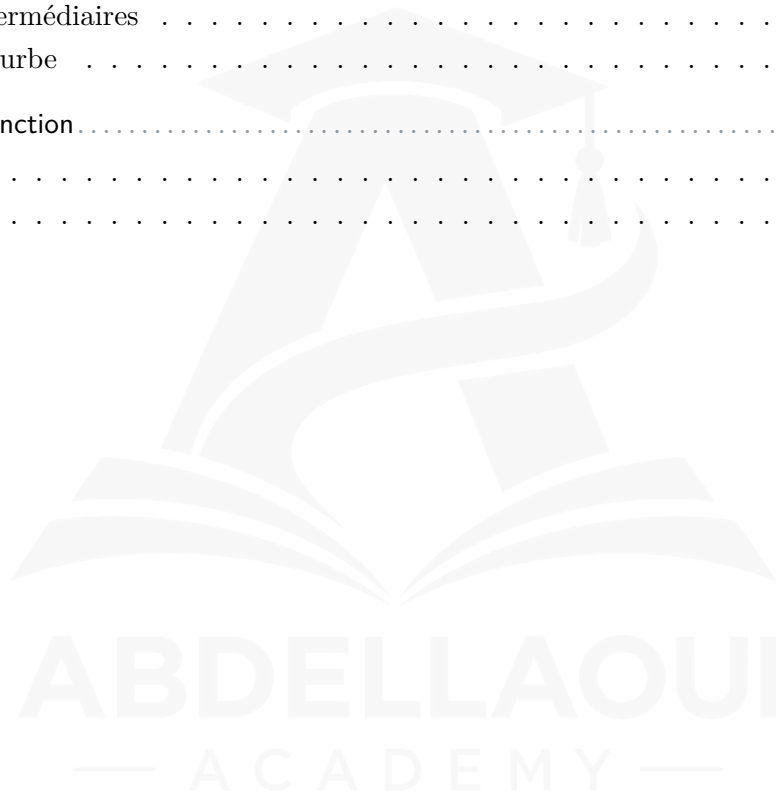


En quelques mots. Ce chapitre rassemble les outils pour étudier une fonction numérique et tracer sa courbe : domaine, symétries, branches infinies, position relative, intersections, équation $f(x) = k$ et fonction réciproque, puis plan d'étude complet.

Objectifs	• Déterminer le domaine et exploiter parité, axe et centre de symétrie • Reconnaître asymptotes et branches paraboliques • Étudier la position relative d'une courbe et d'une droite • Résoudre une équation $f(x) = k$ avec le théorème des valeurs intermédiaires • Mener l'étude complète d'une fonction et construire sa courbe
Prérequis	• Limites et continuité • Dérivation, variations, concavité
Instruments pédagogiques	• Activités de découverte • Applications guidées • Exercices corrigés par thème • Synthèse et test
Volume horaire	14 heures (indicatif)
Évaluation	Test de fin de chapitre (1 h 30)

Au sommaire de ce chapitre

I	Domaine de définition et symétries	3
	Ensemble de définition	1, p. 3
	Parité, axe et centre de symétrie	2, p. 3
II	Branches infinies	4
	Asymptotes	1, p. 4
	Branches paraboliques	2, p. 5
III	Position relative et intersections	6
	Position relative de $\mathcal{C}_f$ et d'une droite	1, p. 6
	Intersections avec les axes	2, p. 7
IV	Équation $f(x) = k$ et fonction réciproque	7
	Théorème des valeurs intermédiaires	1, p. 7
	Fonction réciproque et courbe	2, p. 8
V	Plan d'étude d'une fonction	8
	Méthode	1, p. 8
	Un exemple complet	2, p. 9



I Domaine de définition et symétries

1 Ensemble de définition

Remarque : Les cas à connaître

Pour déterminer l'ensemble de définition D_f , on exclut les valeurs interdites :

- $\frac{u(x)}{v(x)}$: il faut $v(x) \neq 0$;
- $\sqrt{u(x)}$: il faut $u(x) \geq 0$;
- $\frac{1}{\sqrt{u(x)}}$: il faut $u(x) > 0$; $\frac{\sqrt{u(x)}}{v(x)}$: il faut $u(x) \geq 0$ et $v(x) \neq 0$;
- un polynôme est défini sur $\mathbb{R}$; $|u(x)|$ a le même domaine que u .

Application 4.1 : Déterminer un domaine

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ et de $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

Correction

f : il faut $x + 2 \geq 0$ et $x \neq 1$, donc $D_f = [-2; +\infty[\setminus \{1\} = [-2; 1[\cup]1; +\infty[$.
 g : $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \geq 0 \iff x \leq 1$ ou $x \geq 3$, donc $D_g =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$.

2 Parité, axe et centre de symétrie

Activités

Activité 4.1 : Deux symétries

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, définies sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f(4-x)$ et comparer à $f(x)$. Que traduit cette égalité pour $\mathcal{C}_f$?
2. Calculer $g(2-x) + g(x)$. Que traduit cette égalité pour $\mathcal{C}_g$?

Correction

1. $f(4-x) = (4-x)^2 - 4(4-x) + 1 = x^2 - 4x + 1 = f(x)$: les points $M(x; f(x))$ et $M'(4-x; f(x))$ sont symétriques par rapport à la droite $x = 2$; cette droite est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. $g(2-x) = -(x-2)^3 + 3(x-2)^2 - 3$, donc $g(x) + g(2-x) = -2 = 2 \times (-1)$: $M(x; g(x))$ et $M'(2-x; g(2-x))$ sont symétriques par rapport à $\Omega(1; -1)$, centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

Propriété 4.1 : Axe et centre de symétrie

Soit f de domaine D_f et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- La droite $x = a$ est un *axe de symétrie* de $\mathcal{C}_f$ si, pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- Le point $\Omega(a; b)$ est un *centre de symétrie* de $\mathcal{C}_f$ si, pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Remarque : Parité

Les cas $a = 0$ et $\Omega = O$ redonnent la parité : f est *paire* ($f(-x) = f(x)$, $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à (Oy)) ou *impaire* ($f(-x) = -f(x)$, $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à O). Dans ces cas, on étudie f sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ seulement, puis on complète la courbe par symétrie.

Application 4.2 : Montrer une symétrie

Montrer que le point $\Omega(1; 2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ pour $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

Correction

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$: si $x \neq 1$ alors $2-x \neq 1$. De plus $f(2-x) = \frac{2(2-x)+1}{(2-x)-1} = \frac{5-2x}{1-x} = \frac{2x-5}{x-1}$, donc $f(x) + f(2-x) = \frac{(2x+1) + (2x-5)}{x-1} = \frac{4(x-1)}{x-1} = 4 = 2 \times 2$. Donc $\Omega(1; 2)$ est centre de symétrie.

II Branches infinies

1 Asymptotes

Activités

Activité 4.2 : Se rapprocher d'une droite

Soit $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Que dire de la droite $x = 1$?
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (x-1))$. Que dire de la droite $y = x - 1$?

Correction

1. $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 1^+$ et $\rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 1^-$; donc $f \rightarrow +\infty$ à droite et $-\infty$ à gauche : la courbe se rapproche indéfiniment de la droite verticale $x = 1$.
2. $f(x) - (x-1) = \frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: l'écart vertical entre $\mathcal{C}_f$ et la droite $y = x - 1$ tend vers 0.

Définition 4.1 : Asymptotes

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe de f .

- Si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$, la droite $x = a$ est une *asymptote verticale* à $\mathcal{C}_f$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, la droite $y = b$ est une *asymptote horizontale* à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ avec $a \neq 0$, la droite $y = ax+b$ est une *asymptote oblique* à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$.

Remarque : Un cas fréquent

Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$ (par exemple $\varphi(x) = \frac{c}{x - x_0}$), alors $y = ax + b$ est asymptote oblique. Pour une fonction rationnelle, on obtient cette écriture par division euclidienne.

Application 4.3 : Asymptotes d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1. Vérifier que $f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x - 2}$.
2. En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.

Correction

1. $(2x + 1)(x - 2) + 3 = 2x^2 - 3x - 2 + 3 = 2x^2 - 3x + 1$, d'où le résultat.
2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (2x + 1)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x - 2} = 0$: $y = 2x + 1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$. Le numérateur vaut 3 > 0 en 2 : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f = -\infty$: $x = 2$ est asymptote verticale.

2 Branches paraboliques

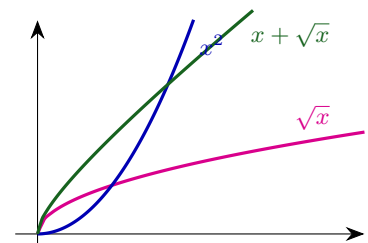
★ Théorème 4.1 : Branches infinies en $\pm\infty$

Soit f définie au voisinage de $+\infty$ (même énoncé en $-\infty$) avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$. On étudie $\frac{f(x)}{x}$:

- si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) - ax \rightarrow b \in \mathbb{R}$: asymptote oblique $y = ax + b$;
- si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$: *branche parabolique de direction la droite $y = ax$* ;
- si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$: *branche parabolique de direction l'axe (Oy)* ;
- si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$: *branche parabolique de direction l'axe (Ox)*.

Exemple 4.1 Trois branches paraboliques

- $f(x) = \sqrt{x}$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$: branche parabolique de direction (Ox).
- $f(x) = x^2$: $\frac{f(x)}{x} = x \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).
- $f(x) = x + \sqrt{x}$: $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 1$ et $f(x) - x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction la droite $y = x$.



Application 4.4 : Étudier une branche infinie

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$. Étudier la branche infinie en $+\infty$.

Correction

Pour $x > 0$: $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1$. Puis $f(x) - x = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \rightarrow 0$. Donc la droite $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. (Par parité, $y = -x$ l'est en $-\infty$.)

III Position relative et intersections

1 Position relative de $\mathcal{C}_f$ et d'une droite

Activités

Activité 4.3 : Au-dessus ou en dessous ?

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ et (D) la droite d'équation $y = x$.

- Factoriser $f(x) - x$.
- Dresser le tableau de signe de $f(x) - x$ et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D) .

Correction

- $f(x) - x = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$.
- Signe : négatif sur $]-\infty; -2[$, positif sur $]-2; 0[$, négatif sur $]0; 2[$, positif sur $]2; +\infty[$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]-2; 0[$ et sur $]2; +\infty[$, en dessous sur $]-\infty; -2[$ et $]0; 2[$; elles se coupent aux points d'abscisses $-2, 0, 2$.

Propriété 4.2 : Position relative

Soit (D) la droite $y = g(x)$. Pour comparer $\mathcal{C}_f$ et (D) , on étudie le *signe de* $f(x) - g(x)$:

- $f(x) - g(x) > 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) ;
- $f(x) - g(x) < 0$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (D) ;
- $f(x) - g(x) = 0$: $\mathcal{C}_f$ et (D) ont un point commun d'abscisse x .

Remarque : Position par rapport à une asymptote

Pour une asymptote oblique $y = ax + b$ en $\pm\infty$, le signe de $f(x) - (ax + b)$ au voisinage de $\pm\infty$ indique de quel côté la courbe s'en approche. Dans l'exemple $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$, $f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1}$: positif pour $x > 1$ (courbe au-dessus), négatif pour $x < 1$ (courbe en dessous).

Application 4.5 : Position par rapport à l'asymptote

Soit $f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x-2}$. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote $(D) : y = 2x + 1$.

Correction

$f(x) - (2x + 1) = \frac{3}{x-2}$. Si $x > 2$, ce nombre est positif : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) ; si $x < 2$, il est négatif : $\mathcal{C}_f$ est en dessous. Jamais nul : $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas (D) .

2 Intersections avec les axes

Propriété 4.3 : Points d'intersection avec les axes

- Avec l'axe (Oy) : si $0 \in D_f$, le point $(0; f(0))$.
- Avec l'axe (Ox) : les points $(x; 0)$ où $x \in D_f$ est solution de $f(x) = 0$.

Exemple 4.2 Intersections avec les axes

Pour $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}$: $f(0) = -\frac{1}{2}$, d'où le point $(0; -\frac{1}{2})$ sur (Oy) . $f(x) = 0 \iff 2x^2 - 3x + 1 = 0 \iff (2x - 1)(x - 1) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$ (tous deux dans D_f) : points $(\frac{1}{2}; 0)$ et $(1; 0)$ sur (Ox) .

IV Équation $f(x) = k$ et fonction réciproque

1 Théorème des valeurs intermédiaires

★ Théorème 4.2 : TVI et corollaire

Soit f continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

- (TVI) Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution entre a et b .
- (Corollaire) Si de plus f est *strictement monotone* sur I , cette solution est *unique*.
- En particulier, si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ avec $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a; b[$.

Application 4.6 : Une équation à une solution

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$.

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $\alpha \in]0; 1[$.
- Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

Correction

- f est dérivable et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$: l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α . Comme $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, $\alpha \in]0; 1[$.
- $f(0,6) = -0,184 < 0$ et $f(0,7) = 0,043 > 0$: $\alpha \in]0,6; 0,7[$. $f(0,68) \approx -0,0056 < 0$ et $f(0,69) \approx 0,0185 > 0$: $0,68 < \alpha < 0,69$.

2 Fonction réciproque et courbe

Définition 4.2 : Bijection et réciproque

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , elle réalise une *bijection* de I sur l'intervalle $J = f(I)$: tout $y \in J$ a un unique antécédent $x \in I$. La fonction $f^{-1} : J \rightarrow I, y \mapsto x$ est la *fonction réciproque* de f :

$$x \in I \text{ et } y = f(x) \iff y \in J \text{ et } x = f^{-1}(y).$$

Propriété 4.4 : Courbe de la réciproque

Dans un repère *orthonormé*, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. De plus f^{-1} a le même sens de variation que f .

Application 4.7 : Expression de la réciproque

Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $I = [1; +\infty[$.

1. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
2. Déterminer $f^{-1}(y)$ pour $y \in J$.

Correction

1. $f'(x) = 2x - 2 > 0$ sur $]1; +\infty[$: f est continue et strictement croissante sur I ; $f(1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, donc $J = [-1; +\infty[$.
2. $y = x^2 - 2x \iff (x - 1)^2 = y + 1$. Comme $x \geq 1$: $x = 1 + \sqrt{y + 1}$. Donc $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y + 1}$.

V Plan d'étude d'une fonction

1 Méthode

Remarque : Plan d'étude

1. **Domaine** D_f ; continuité et dérivabilité de f sur D_f .
2. **Symétries** : parité, axe, centre de symétrie ; réduction du domaine d'étude.
3. **Limites** aux bornes de D_f ; asymptotes et branches infinies.
4. **Dérivée** f' , signe de f' , **tableau de variations**, extremums.
5. **Concavité** : signe de f'' , points d'inflexion (voir le chapitre « Dérivation »).
6. **Intersections** avec les axes ; **position relative** de $\mathcal{C}_f$ et de ses asymptotes ; tangentes remarquables.
7. **Courbe** : on place asymptotes, points remarquables et tangentes, puis on trace.

Remarque : Rappel : concavité et inflexion

$f'' > 0$ sur I : $\mathcal{C}_f$ est convexe (au-dessus de ses tangentes) ; $f'' < 0$: concave (en dessous). Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0 , le point d'abscisse x_0 est un point d'inflexion. Si $f''(x_0) = 0$ sans changement de signe, il n'y a pas d'inflexion.

2 Un exemple complet

Exemple 4.3 Étude de $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$

1. **Domaine.** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ est rationnelle, donc continue et dérivable sur D_f .

2. **Symétrie.** $f(2-x) = (1-x) + \frac{1}{1-x} = -f(x)$: $\Omega(1;0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3. **Limites.** $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = -\infty$: asymptote verticale $x = 1$. Et $f(x) - (x-1) = \frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: asymptote oblique $y = x-1$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$.

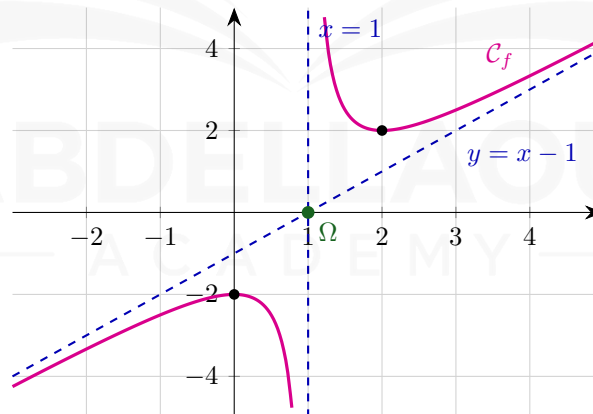
4. **Variations.** $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Donc $f' > 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $]2; +\infty[$, $f' < 0$ sur $]0; 1[$ et $]1; 2[$; $f(0) = -2$ (maximum local) et $f(2) = 2$ (minimum local).

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$					
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+		
$f(x)$				-2			$+\infty$			$+\infty$
	$-\infty$								2	

5. **Concavité.** $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$: négative sur $]-\infty; 1[$ (concave), positive sur $]1; +\infty[$ (convexe). f'' ne s'annule pas : pas de point d'inflexion.

6. **Intersections et position.** $f(0) = -2$; $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$: $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas (Ox) . Position par rapport à $y = x-1$: signe de $\frac{1}{x-1}$ (au-dessus pour $x > 1$, en dessous pour $x < 1$).

7. **Courbe.**



Exercice 4.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, la droite $x = a$ est une asymptote verticale.
2. Si f est paire, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .
3. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.
4. La courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ admet O pour centre de symétrie.
5. Une courbe ne peut jamais couper son asymptote horizontale.

Correction

1. **Vrai** (définition).
2. **Vrai** : $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(x))$ sont symétriques par rapport à (Oy) .
3. **Faux** : $f(x) = x^2$ a une branche parabolique de direction (Oy) .
4. **Vrai** : f est impaire.
5. **Faux** : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ a pour asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ et la coupe en $x = \pi, 2\pi, \dots$

Exercice 4.2 : Domaine ★★★

Déterminer l'ensemble de définition de :

1. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$
2. $g(x) = \sqrt{x^2-x-2}$
3. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

Correction

1. $x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2 : D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
2. $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \geq 0 \iff x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 : D_g =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$.
3. $3 - x > 0 \iff x < 3 : D_h =]-\infty; 3[$.

Exercice 4.3 : Axe ou centre de symétrie ★★★

Montrer que :

1. la droite $x = 3$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ pour $f(x) = x^2 - 6x + 4$;
2. le point $\Omega(1; -1)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ pour $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$;
3. $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à (Oy) pour $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Correction

1. $f(6 - x) = (6 - x)^2 - 6(6 - x) + 4 = x^2 - 6x + 4 = f(x)$.
2. $g(x) = (x - 1)^3 - 1$; $g(2 - x) = (1 - x)^3 - 1 = -(x - 1)^3 - 1$, donc $g(x) + g(2 - x) = -2 = 2 \times (-1)$.
3. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ est symétrique par rapport à 0 et $h(-x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = h(x)$: h est paire.

Exercice 4.4 : Asymptotes ★★★

Soit $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1. Déterminer a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$.
2. En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.
3. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote oblique.

Correction

1. Division : $x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 2) + 4$, donc $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x + 1}$ ($a = 1, b = -2, c = 4$).
2. $f(x) - (x - 2) = \frac{4}{x + 1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: asymptote oblique $y = x - 2$. Le numérateur vaut $4 > 0$ en -1 :
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f = -\infty$: asymptote verticale $x = -1$.
3. Signe de $\frac{4}{x + 1}$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'asymptote pour $x > -1$, en dessous pour $x < -1$.

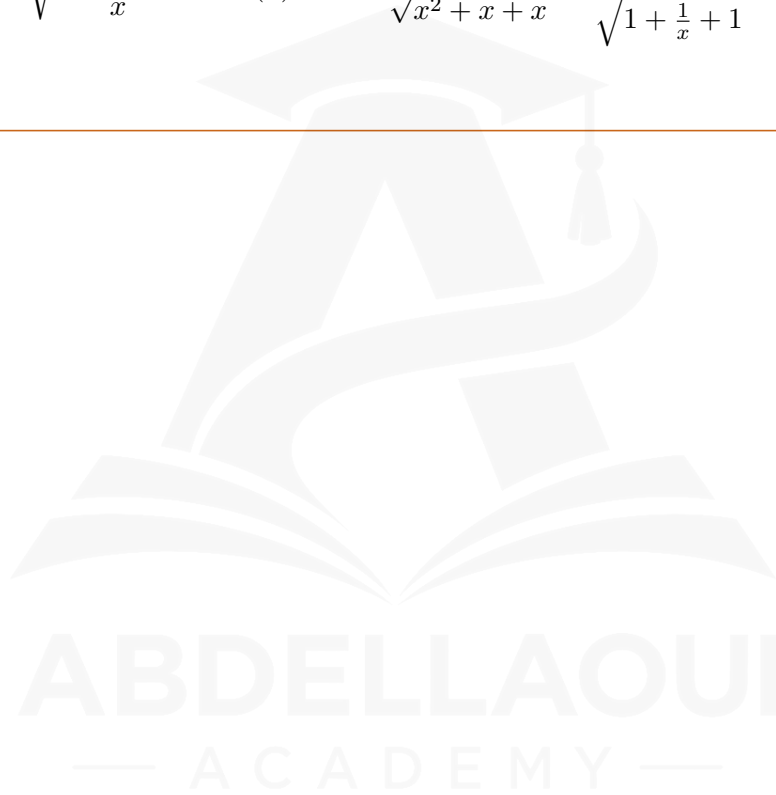
Exercice 4.5 : Branches infinies ★★★

Étudier la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$:

1. $f(x) = x^2 - x$
2. $g(x) = 2x + \sqrt{x}$
3. $h(x) = \sqrt{x^2 + x}$

Correction

1. $\frac{f(x)}{x} = x - 1 \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Oy) .
2. $\frac{g(x)}{x} = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2$ et $g(x) - 2x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction la droite $y = 2x$.
3. Pour $x > 0$: $\frac{h(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1$ et $h(x) - x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$: asymptote oblique
 $y = x + \frac{1}{2}$.



Exercice 4.6 : Position relative ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ et $g(x) = x$. Montrer que $f(x) - g(x) = x(x-2)(x+2)$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $y = x$.

Correction

$f(x) - g(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$. Signe : négatif sur $]-\infty; -2[$, positif sur $]-2; 0[$, négatif sur $]0; 2[$, positif sur $]2; +\infty[$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite sur $]-2; 0[$ et $]2; +\infty[$, en dessous sur $]-\infty; -2[$ et $]0; 2[$, et les deux courbes se coupent en $x = -2, 0, 2$.

Exercice 4.7 : Trois solutions ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions $\alpha < \beta < \gamma$ et localiser chacune entre deux entiers consécutifs.
3. Donner un encadrement de β d'amplitude 0,1.

Correction

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$: f croît sur $]-\infty; -1[$, décroît sur $[-1; 1]$, croît sur $[1; +\infty[$. $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$.
2. Sur $]-\infty; -1[$: $f(-2) = -1 < 0 < 3 = f(-1)$: une solution $\alpha \in]-2; -1[$. Sur $[-1; 1]$: $f(-1) = 3 > 0 > -1 = f(1)$: une solution $\beta \in]0; 1[$ car $f(0) = 1 > 0 > f(1)$. Sur $[1; +\infty[$: $f(1) = -1 < 0 < 3 = f(2)$: $\gamma \in]1; 2[$. Sur chaque intervalle f est continue et strictement monotone : une seule solution par intervalle, donc trois au total.
3. $f(0,3) = 0,127 > 0$ et $f(0,4) = -0,136 < 0$: $0,3 < \beta < 0,4$.

Exercice 4.8 : Fonction réciproque ★★★

Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $I = [1; +\infty[$.

1. Montrer que f est bijective de I sur $J = [-1; +\infty[$ et déterminer f^{-1} .
2. Calculer $f(3)$, puis $(f^{-1})'(3)$ de deux façons.
3. Dans un repère orthonormé, comment obtenir $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ à partir de $\mathcal{C}_f$?

Correction

1. $f'(x) = 2x - 2 > 0$ sur $]1; +\infty[$, $f(1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$. Et $y = x^2 - 2x \iff (x-1)^2 = y+1 \iff x = 1 + \sqrt{y+1}$ (car $x \geq 1$) : $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y+1}$.
2. $f(3) = 3$ et $f'(3) = 4$: $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{4}$. Directement : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}$, donc $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$.
3. $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est la symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $y = x$.

Synthèse 4.1 : Étude complète d'une fonction

Soit $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

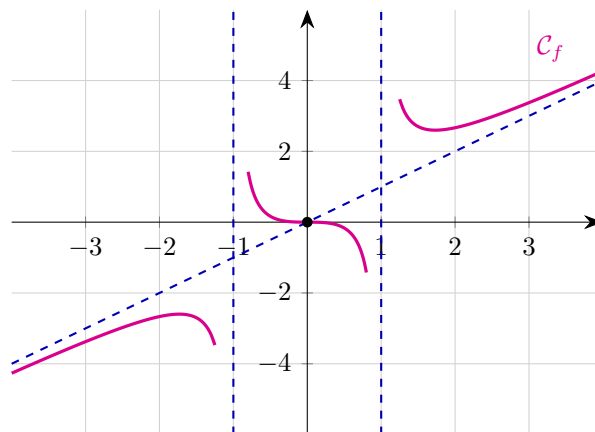
- Déterminer D_f et étudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
- Calculer les limites aux bornes de D_f . Montrer que $f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$ et en déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_f$; étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote oblique.
- Montrer que $f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f .
- Montrer que $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$; $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?
- Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine.
- Tracer $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Correction

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, symétrique par rapport à 0 ; $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$: f est impaire, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à O ; on étudie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$. En 1^+ : numérateur $\rightarrow 1$, $x^2 - 1 \rightarrow 0^+$ donc $f \rightarrow +\infty$; en 1^- : $f \rightarrow -\infty$; par imparité, en -1^- : $f \rightarrow -\infty$ et en -1^+ : $f \rightarrow +\infty$. Donc $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes verticales. Comme $x + \frac{x}{x^2-1} = \frac{x^3 - x + x}{x^2-1} = f(x)$ et $\frac{x}{x^2-1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: $y = x$ est asymptote oblique. Signe de $\frac{x}{x^2-1}$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $y = x$ sur $]-\infty; -1[$ et sur $]0; 1[$, au-dessus sur $]-1; 0[$ et sur $]1; +\infty[$.
- $f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$, du signe de $x^2 - 3$ (sauf en 0 où f' s'annule sans changer de signe). $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,60$ et $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

- $f'(x) = 1 - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ d'où $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$, du signe de $x(x^2-1)$: négatif sur $]-\infty; -1[$ (concave), positif sur $]-1; 0[$ (convexe), négatif sur $]0; 1[$ (concave), positif sur $]1; +\infty[$ (convexe). f'' s'annule en 0 en changeant de signe : $O(0; 0)$ est le point d'inflexion.
- $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$: $(T) : y = 0$, qui traverse la courbe en O .
- Voir la figure.





Étude de fonctions

2 BAC SE · 1 h 30 · Date :

Nom et prénom :

Classe : N° :

/20

Exercice 4.1 : Vrai ou faux 4 pt

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant brièvement.

4 pt

1. Si f est impaire, $\mathcal{C}_f$ admet O pour centre de symétrie.
2. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1)) = 0$, la droite $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.
3. Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox) (avec f non bornée).
4. Si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet *une seule* solution dans $]a; b[$.

Correction

1. **Vrai** : $f(-x) + f(x) = 0 = 2 \times 0$.
2. **Vrai** : définition de l'asymptote oblique.
3. **Vrai** : énoncé du théorème sur les branches infinies.
4. **Faux** : le TVI donne au moins une solution ; l'unicité demande la stricte monotonie.

Exercice 4.2 : Étude d'une fonction rationnelle 6 pt

Soit $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Montrer que $f(x) = 2x + 3 + \frac{2}{x - 1}$ et calculer les limites de f aux bornes de D_f . 1,5 pt
2. Déterminer les asymptotes de $\mathcal{C}_f$ et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote oblique. 2 pt
3. Montrer que $f'(x) = \frac{2x(x - 2)}{(x - 1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f . 1,5 pt
4. Montrer que $\Omega(1; 5)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. 1 pt

Correction

1. $(2x + 3)(x - 1) + 2 = 2x^2 + x - 3 + 2 = 2x^2 + x - 1$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1+} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1-} f = -\infty$ (numérateur $\rightarrow 2 > 0$).
2. $x = 1$ est asymptote verticale. $f(x) - (2x + 3) = \frac{2}{x - 1} \rightarrow 0$: $y = 2x + 3$ est asymptote oblique ; $\mathcal{C}_f$ est au-dessus pour $x > 1$, en dessous pour $x < 1$.
3. $f'(x) = 2 - \frac{2}{(x - 1)^2} = \frac{2((x - 1)^2 - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 2)}{(x - 1)^2}$. $f' > 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $]2; +\infty[$, $f' < 0$ sur $]0; 1[$ et $]1; 2[$. $f(0) = 1$ et $f(2) = 9$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$	
				$+\infty$	$\searrow$	9
					$\nearrow$	$+\infty$

4. $f(2-x) = 2(2-x) + 3 + \frac{2}{1-x} = 7-2x - \frac{2}{x-1}$, donc $f(x) + f(2-x) = 10 = 2 \times 5$.

Exercice 4.3 : Branches infinies 5 pt

Soit $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de g . 1 pt
- Montrer que la droite $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$. 2 pt
- Montrer que la droite $y = -x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$. 2 pt

Correction

- $x^2 + 2x = x(x+2) \geq 0 \iff x \leq -2$ ou $x \geq 0 : D_g =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$.
- Pour $x > 0 : g(x) - (x+1) = \frac{(x^2+2x) - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x} + x+1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x} + x+1} \rightarrow 0$. Donc $y = x+1$ est asymptote oblique en $+\infty$.
- Pour $x < -2 : g(x) + x+1 = \frac{(x^2+2x) - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x} - (x+1)} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x} - x - 1}$; comme $-x-1 > 0$ et $\rightarrow +\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$ et le quotient vers 0. Donc $y = -x-1$ est asymptote en $-\infty$.

Exercice 4.4 : Équation et réciproque 5 pt

- Soit $f(x) = x^5 + x - 1$. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis que $0,7 < \alpha < 0,8$. 3 pt
- Soit $h(x) = x^2 - 4x$ sur $I = [2; +\infty[$. Montrer que h est bijective de I sur $J = [-4; +\infty[$, déterminer $h^{-1}(y)$ et calculer $(h^{-1})'(0)$. 2 pt

Correction

- $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 : f$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $\mp\infty$: unique solution α . $f(0,7) \approx -0,132 < 0$ et $f(0,8) \approx 0,128 > 0$, donc $0,7 < \alpha < 0,8$.
- $h'(x) = 2x - 4 > 0$ sur $]2; +\infty[$, $h(2) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = +\infty$: bijection de I sur J . $y = x^2 - 4x \iff (x-2)^2 = y+4 \iff x = 2 + \sqrt{y+4}$ ($x \geq 2$) : $h^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y+4}$. $h(4) = 0$ et $h'(4) = 4$: $(h^{-1})'(0) = \frac{1}{4}$.