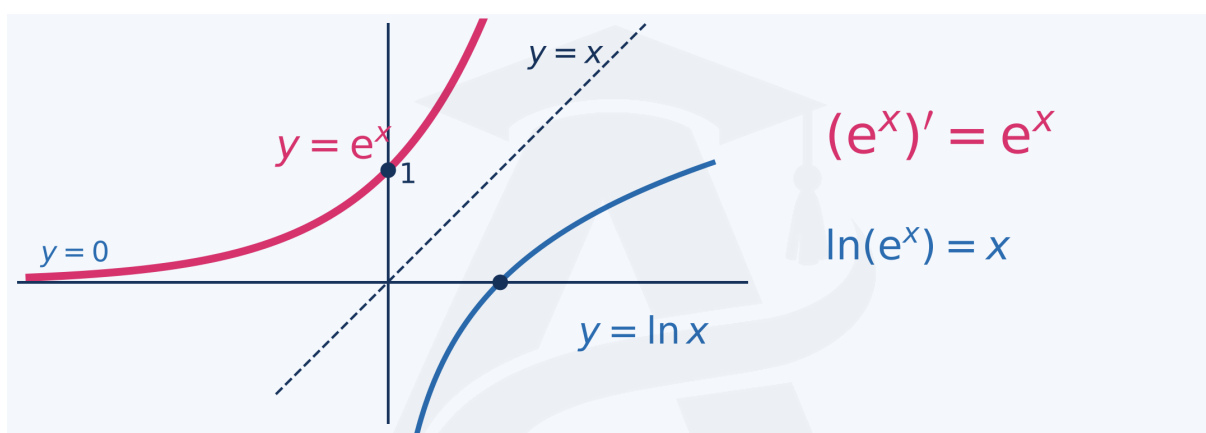


9

LA FONCTION EXPONENTIELLE



En quelques mots. Ce chapitre définit la fonction exponentielle comme réciproque de $\ln$, en établit les propriétés algébriques, les limites et le tableau de variations, sa dérivée et les primitives de $u'e^u$, puis étudie l'exponentielle de base a .

Objectifs	• Résoudre équations et inéquations avec e^x • Simplifier des expressions avec exponentielles • Connaître les limites de référence et lever des formes indéterminées • Dériver e^u et primitiver $u'e^u$ • Étudier une fonction contenant e^x ; manipuler a^x
Prérequis	• Fonction logarithme népérien • Dérivation, limites, étude de fonctions
Instruments pédagogiques	• Activités de découverte • Applications guidées • Exercices corrigés par thème • Synthèse et test
Volume horaire	16 heures (indicatif)
Évaluation	Test de fin de chapitre (1 h 30)

Au sommaire de ce chapitre

I	Définition et propriétés algébriques	3
	La fonction exponentielle népérienne	1, p. 3
	Propriétés algébriques	2, p. 4
II	Limites, dérivée et courbe	5
	Limites de référence	1, p. 5
	Dérivée et variations	2, p. 6
	Primitives	3, p. 8
III	Exponentielle de base a	8
	Définition et propriétés	1, p. 8
	Dérivée et étude	2, p. 9



I Définition et propriétés algébriques

1 La fonction exponentielle népérienne

Activités

Activité 9.1 : Réciproque du logarithme

Soit $f(x) = \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que pour tous réels a, b : $f^{-1}(a + b) = f^{-1}(a) \times f^{-1}(b)$.
3. Que valent $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$?

Définition 9.1 : Exponentielle népérienne

La fonction *exponentielle népérienne*, notée $\exp$, est la fonction réciproque de $\ln$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0; +\infty[: \exp(x) = y \iff x = \ln y.$$

On note $\exp(x) = e^x$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$ et ses valeurs sont strictement positives.

Propriété 9.1 : Premières propriétés

1. $e^0 = 1$ et $e^1 = e$;
2. $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$;
3. $e^x > 0$ pour tout réel x ;
4. $e^x = e^y \iff x = y$ et $e^x < e^y \iff x < y$;
5. $e^x = a \iff x = \ln a$ pour $a > 0$; $e^x \leq a \iff x \leq \ln a$ pour $a > 0$.

Remarque : Attention au domaine

$e^{\ln x} = x$ n'a de sens que pour $x > 0$, alors que $\ln(e^x) = x$ est vrai pour tout réel. L'équation $e^x = a$ n'a pas de solution si $a \leq 0$.

Exemple 9.1 Équation et inéquation

$$e^{x+3} = e^4 \iff x+3=4 \iff x=1. \quad e^{6x-2} \geq e^{x+13} \iff 6x-2 \geq x+13 \iff x \geq 3, \text{ donc } S = [3; +\infty[.$$

Application 9.1 : Équations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$1. e^{3x+4} = e^{-3} \quad 2. 4e^x = -3 \quad 3. e^{-4x+2} = 5$$

$$4. e^{x+4} \leq e^{-x+2} \quad 5. e^{x^2-3} = e^{-2x} \quad 6. e^{2x+3} \geq 3$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Propriétés algébriques

Propriété 9.2 : Règles de calcul

Pour tous réels x, y et tout rationnel r :

$$1. e^{x+y} = e^x e^y \quad 2. e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad 3. e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad 4. (e^x)^r = e^{rx}.$$

Preuve. $\ln(e^x e^y) = \ln e^x + \ln e^y = x + y$, donc $e^x e^y = e^{x+y}$ par définition de la réciproque. Les points 2 à 4 s'en déduisent comme pour $\ln$ (le point 4 vient de $\ln((e^x)^r) = r \ln e^x = rx$). ■

Exemple 9.2 Simplifier

$$\frac{e^2 \times e^{-5}}{e^{-1}} = e^{2-5+1} = e^{-2} ; \quad \frac{(e^{-1}e^{-2})^3}{e^7} = \frac{e^{-9}}{e^7} = e^{-16}.$$

Application 9.2 : Simplifier et démontrer

$$1. \text{ Simplifier } A = e^{2+\ln 8}, \quad B = \frac{e^2}{e^{1+\ln 2}}, \quad C = \frac{e^{4x}}{(e^x)^2 e}, \quad D = (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}).$$

$$2. \text{ Montrer que } \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}} \text{ et que } e^x - \frac{e^x}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II Limites, dérivée et courbe

1 Limites de référence

Activités

Activité 9.2 : Comportement de e^x

1. Justifier que e^x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, déterminer les limites de e^x en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. En posant $t = e^x$, ramener $\frac{e^x}{x}$ à $\frac{t}{\ln t}$ et conclure grâce à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété 9.3 : Limites usuelles

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Remarque : Croissances comparées

En $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x ; en $-\infty$, $x^n e^x \rightarrow 0$ (l'exponentielle l'emporte encore). Pour lever une forme indéterminée, on factorise le terme dominant : $e^x - x^2 = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right)$.

Exemple 9.3 Calculs de limites

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2\frac{e^x}{x} - 3 \right) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - 3x) = +\infty$ car $e^x \rightarrow 0$ et $-3x \rightarrow +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ (croissances comparées).
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x - 2x e^x + e^x) = 0$.

Application 9.3 : Limites

- Calculer :
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - e^x + 7)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2x^2 + 3x)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 3}{2e^x + 2}$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 3}{2e^x + 2}$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x + 2)e^x$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}$.

2 Dérivée et variations

★ Théorème 9.1 : Dérivée de l'exponentielle

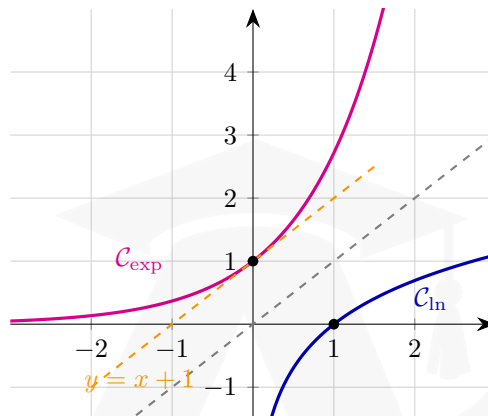
- $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$.
- Si u est dérivable sur un intervalle I , alors e^u est dérivable sur I et $(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$.

Preuve. $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ de dérivée non nulle, donc sa réciproque $\exp$ est dérivable et $\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \frac{1}{1/\exp x} = \exp x$. Le point 2 est la dérivée d'une composée. ■

Propriété 9.4 : Variations et position de la courbe

La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; sa courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ est symétrique de $\mathcal{C}_{\ln}$ par rapport à la droite $y = x$; l'axe (Ox) est asymptote en $-\infty$; la tangente en 0 est $y = x + 1$ et $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0	$+\infty$



Exemple 9.4 Dériver

$$f(x) = (e^x - 3)(e^x + 2) : f'(x) = e^x(e^x + 2) + e^x(e^x - 3) = 2e^{2x} - e^x. \quad g(x) = e^{2x+1} : g'(x) = 2e^{2x+1}.$$

Application 9.4 : Dérivées

Dériver : 1. $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ 2. $k(x) = xe^{-x}$ 3. $m(x) = e^{x^2-2x}$.

3 Primitives

Propriété 9.5 : Primitives de $u'e^u$

Si u est dérivable sur I , les primitives sur I de $u'e^u$ sont les fonctions $e^u + k$ ($k \in \mathbb{R}$). En particulier, pour $a \neq 0$: $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + k$.

Exemple 9.5 Primitives

$x \mapsto e^{-5x}$ a pour primitives $-\frac{1}{5}e^{-5x} + k$; $x \mapsto xe^{x^2} = \frac{1}{2}(x^2)'e^{x^2}$ a pour primitives $\frac{1}{2}e^{x^2} + k$.

Application 9.5 : Primitives

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de : 1. $e^{2x} + e^{-x}$ 2. $\frac{e^x}{1+e^x}$ 3. xe^{-x^2} .

III Exponentielle de base a

1 Définition et propriétés

Activités

Activité 9.3 : Donner un sens à 2^x

1. Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\ln(a^n)$ puis a^n à l'aide de e et de $\ln a$.
2. Calculer $e^{2\ln 3}$ et $e^{-3\ln 2}$.
3. En déduire comment définir a^x pour tout réel x .

Définition 9.2 : Exponentielle de base a

Soit $a > 0$. La fonction *exponentielle de base a* est la fonction $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$, définie sur $\mathbb{R}$. Pour $a = e$, on retrouve $\exp$.

Remarque

$a^x > 0$ pour tout réel x et $\ln(a^x) = x \ln a$. La condition $a > 0$ ne porte que sur la base : elle vient de $\ln a$. Si $a = 1$, $a^x = 1$ pour tout x (fonction constante).

Propriété 9.6 : Règles de calcul

Pour $a > 0$, $b > 0$ et x, y réels :

1. $a^0 = 1$, $a^1 = a$ $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$;
2. $a^x b^x = (ab)^x$ $(a^x)^y = a^{xy}$.

Exemple 9.6 Une équation

$$2^x = 3 \times 2^{-2x} \iff 2^{3x} = 3 \iff 3x \ln 2 = \ln 3 \iff x = \frac{\ln 3}{3 \ln 2}.$$

Application 9.6 : Équations et inéquations en base a

Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1. $4^x - 3 \times 2^x + 2 = 0$ 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{8}$ 3. $5^{2x+1} = 3^x$.

2 Dérivée et étude

Propriété 9.7 : Dérivée et primitives

$x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(a^x)' = \ln(a) a^x$. Pour $a \neq 1$, les primitives de a^x sont $\frac{a^x}{\ln a} + k$.

Propriété 9.8 : Étude de $x \mapsto a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

Cas $a > 1$ ($\ln a > 0$) : strictement croissante,

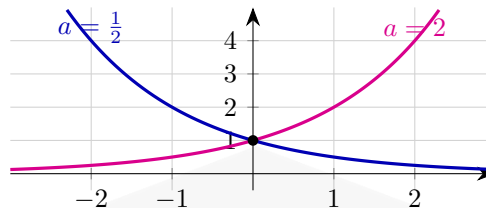
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
a^x	0	$+\infty$

Cas $0 < a < 1$ ($\ln a < 0$) : strictement décroissante,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
a^x	$+\infty$	0


Application 9.7 : Deux modèles

- On place 1000 DH à 4 % par an, à intérêts composés. Au bout de combien d'années le capital $1000 \times 1,04^n$ dépasse-t-il 2000 DH ?
- Une substance radioactive vérifie $N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730}$ (t en années). Au bout de combien de temps reste-t-il 10 % de la quantité initiale ?

Exercice 9.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. Pour tous réels x, y : $e^{x+y} = e^x + e^y$.
2. L'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution.
3. Pour tout réel x : $e^{\ln x} = x$.
4. Pour tout réel x : $\ln(e^x) = x$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty$.
6. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.2 : Équations et inéquations ★★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
2. $e^{2x} - e^x - 6 \leq 0$
3. $e^x + \frac{2}{e^x} = 3$
4. $\ln(e^x + 1) = 2$



Exercice 9.3 : Limites ★★★

Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{e^x + 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$.

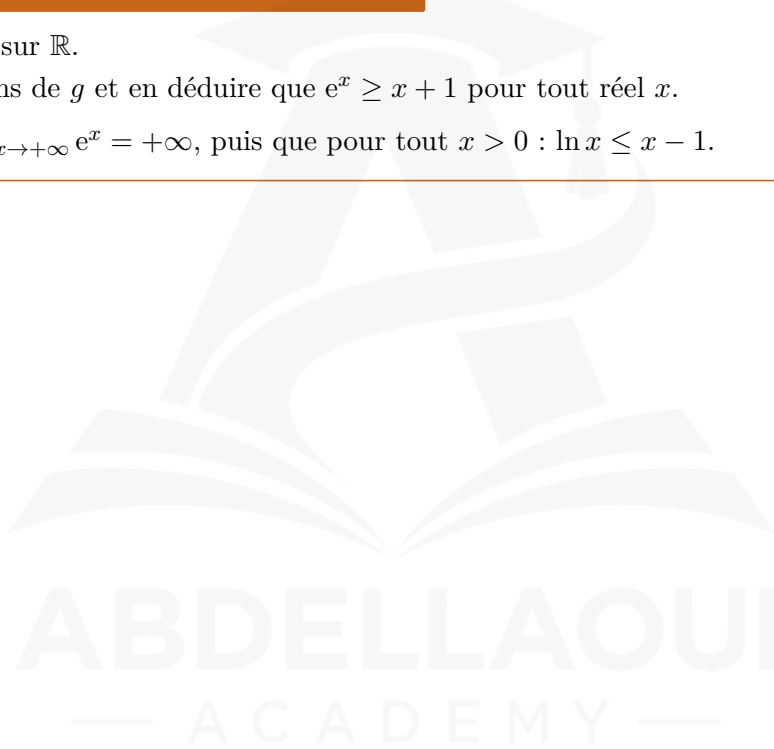
Exercice 9.4 : Dérivées et primitives ★★★

1. Dériver $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $g(x) = (x^2 + x)e^{-x}$.
2. Déterminer la primitive F de $h(x) = e^{2x} - e^x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.
3. Déterminer une primitive de $\frac{1}{1 + e^{-x}}$ (on remarquera que $\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}$).

Exercice 9.5 : Une inégalité fondamentale ★★★

Soit $g(x) = e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de g et en déduire que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, puis que pour tout $x > 0$: $\ln x \leq x - 1$.



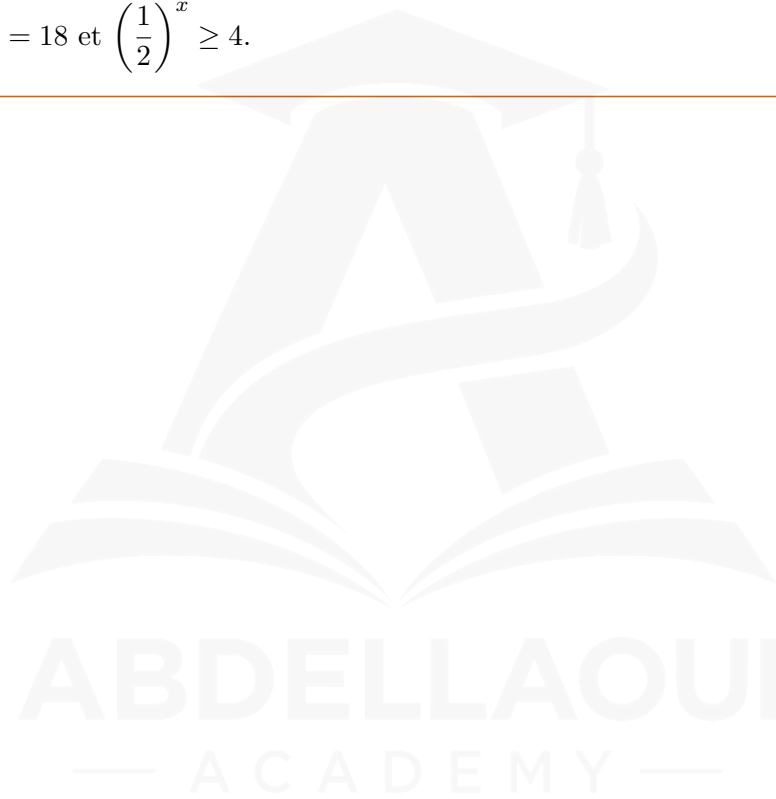
Exercice 9.6 : Étude d'une fonction ★★★

Soit $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = -x^2e^{-x}$. En déduire les variations de f .
3. Montrer que $f(x) > 0$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations complet.

Exercice 9.7 : Base a ★★★

1. Calculer sans calculatrice : $e^{2\ln 3}$, $e^{4\ln \frac{1}{2}}$, $e^{-3\ln 2}$, $4^{\frac{3}{2}}$.
2. Dériver $f(x) = 3^x + \left(\frac{1}{5}\right)^x$ et $g(x) = 2^{x^2}$.
3. Résoudre $3^{x+1} - 3^x = 18$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 4$.



Synthèse 9.1 : Étude complète de $f(x) = x e^{-x}$

Soit $f(x) = x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
2. Montrer que $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations.
3. Montrer que $f''(x) = (x - 2)e^{-x}$ et déterminer le point d'inflexion.
4. Écrire l'équation de la tangente (T) en 0 et montrer que $f(x) \leq x$ pour tout réel x .
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ et (T) .
6. Discuter, selon m , le nombre de solutions de $f(x) = m$.





La fonction exponentielle

2 BAC SE · 1 h 30 · Date :

/20

Exercice 9.1 : Équations, inéquations, algèbre 4 pt

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{3-2x} > e^{x+6}$.
3. Montrer que $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

1,5 pt

1 pt

1,5 pt

Exercice 9.2 : Limites et dérivée 5 pt

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - e^x)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$.
4. Dériver $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

1,5 pt

1 pt

1 pt

1,5 pt

Exercice 9.3 : Étude d'une fonction 6 pt

Soit $f(x) = (2 - x)e^x$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = (1 - x)e^x$ et dresser le tableau de variations.
3. Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Montrer que $f''(x) = -xe^x$ et que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion à préciser.

1,5 pt

2 pt

1 pt

1,5 pt

Exercice 9.4 : Exponentielle de base a 5 pt

Une culture contient $N(t) = 500 \times 2^{t/3}$ bactéries à l'instant t (en heures).

1. Calculer $N(0)$ et $N(9)$.
2. Déterminer l'instant où la population atteint 16 000.
3. Calculer $N'(t)$.
4. À partir de quelle heure entière la population dépasse-t-elle 100 000 ?

1 pt

1,5 pt

1 pt

1,5 pt

