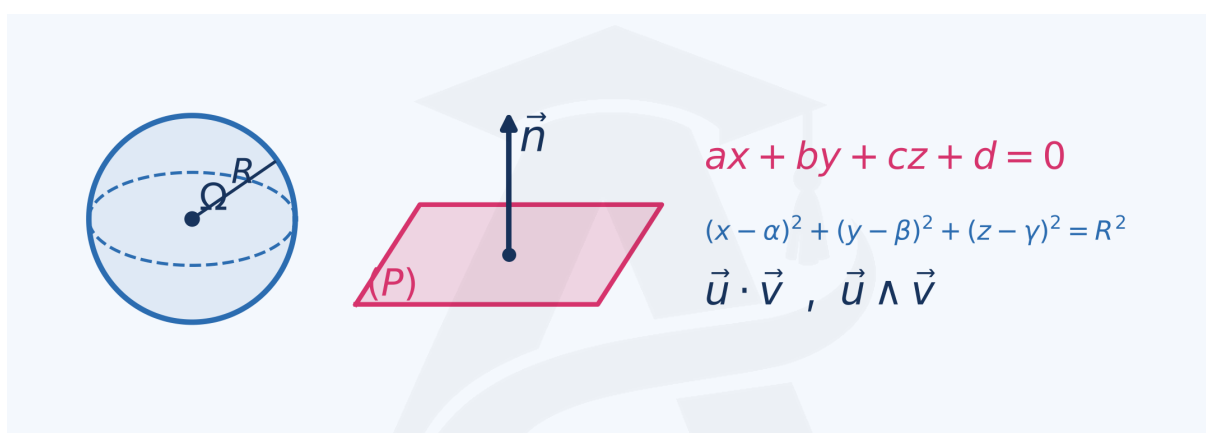


# 12

## GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE



**En quelques mots.** Ce chapitre étend à l'espace le produit scalaire, établit les équations des plans et des sphères, étudie leurs positions relatives, puis introduit l'orientation de l'espace et le produit vectoriel, avec ses applications aux aires, aux plans et aux distances.

|                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Objectifs</b>                | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Calculer un produit scalaire, une norme, une distance dans un repère orthonormé</li> <li>• Écrire l'équation d'un plan et d'une sphère</li> <li>• Étudier les positions relatives droite/sphère et plan/sphère</li> <li>• Orienter l'espace et calculer un produit vectoriel</li> <li>• Calculer une aire, une distance à un plan ou à une droite</li> </ul> |
| <b>Prérequis</b>                | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Vecteurs et repères de l'espace</li> <li>• Produit scalaire dans le plan</li> <li>• Droites et plans de l'espace</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Instruments pédagogiques</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Activité de découverte</li> <li>• Applications guidées</li> <li>• Exercices corrigés par thème</li> <li>• Synthèse et test</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Volume horaire</b>           | 20 heures (indicatif)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Évaluation</b>               | Test de fin de chapitre (1 h 30)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

## Au sommaire de ce chapitre

|            |                                                     |           |
|------------|-----------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>   | Produit scalaire dans l'espace                      | <b>3</b>  |
|            | Définition et propriétés                            | 1, p. 3   |
|            | Dans un repère orthonormé                           | 2, p. 4   |
| <b>II</b>  | Équation cartésienne d'un plan                      | <b>4</b>  |
|            | Plan défini par un point et un vecteur normal       | 1, p. 4   |
|            | Distance d'un point à un plan                       | 2, p. 5   |
| <b>III</b> | Sphères                                             | <b>6</b>  |
|            | Équation d'une sphère                               | 1, p. 6   |
|            | Sphère de diamètre donné                            | 2, p. 7   |
|            | Représentation paramétrique                         | 3, p. 7   |
|            | L'ensemble $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ | 4, p. 8   |
| <b>IV</b>  | Positions relatives                                 | <b>8</b>  |
|            | Droite et sphère                                    | 1, p. 8   |
|            | Plan et sphère                                      | 2, p. 9   |
|            | Plan tangent en un point                            | 3, p. 10  |
| <b>V</b>   | Orientation de l'espace                             | <b>10</b> |
| <b>VI</b>  | Produit vectoriel                                   | <b>11</b> |
|            | Définition                                          | 1, p. 11  |
|            | Aire d'un parallélogramme, d'un triangle            | 2, p. 12  |
|            | Propriétés algébriques et analytiques               | 3, p. 13  |
| <b>VII</b> | Applications du produit vectoriel                   | <b>13</b> |
|            | Équation d'un plan défini par trois points          | 1, p. 13  |
|            | Distance d'un point à une droite                    | 2, p. 14  |

ABDELLAOUI  
— ACADEMY —

## I Produit scalaire dans l'espace

### 1 Définition et propriétés

#### Activité 12.1 : Un triangle de l'espace

Dans un repère orthonormé, on donne  $A(1;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$  et  $C(0;0;1)$ .

1. Calculer  $AB$ ,  $AC$  et  $BC$ . Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?
2. Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  avec les coordonnées, puis avec la formule  $AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ .
3. En déduire la mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

#### Définition 12.1 : Produit scalaire

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On choisit trois points  $A, B, C$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ . Ces trois points sont dans un plan  $(P)$ , et le *produit scalaire*  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est le produit scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  calculé dans  $(P)$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \quad \text{ou} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'},$$

où  $C'$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$  ( $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} = \pm AB \times AC'$ , signe  $+$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC'}$  ont même sens).

#### Remarque

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent valables dans l'espace.

#### Propriété 12.1 : Symétrie, bilinéarité, orthogonalité

Soit  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trois vecteurs et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .
2.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$ .
3.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

## 2 Dans un repère orthonormé

### Définition 12.2 : Base et repère orthonormés

La base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est *orthonormée* si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$  et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ . Le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormé si la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  l'est. Dans toute la suite, l'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### Propriété 12.2 : Expression analytique

Soit  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$ .

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ ; en particulier  $\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' + zz' = 0$ .
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$  pour  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ .

### Application 12.1 : Triangle rectangle isocèle

Soit  $A(1; 1; \sqrt{2})$ ,  $B(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$ ,  $C(-1; -1; -\sqrt{2})$ .

- Montrer que  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$ .
- Calculer  $BA$  et  $BC$ . En déduire la nature de  $ABC$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

## II Équation cartésienne d'un plan

### 1 Plan défini par un point et un vecteur normal

#### Définition 12.3 : Vecteur normal

Un *vecteur normal* à un plan  $(P)$  est un vecteur non nul directeur d'une droite orthogonale à  $(P)$ .

Si  $(P)$  passe par  $A(x_A; y_A; z_A)$  et a pour vecteur normal  $\vec{n}(a; b; c)$  :

$$M(x; y; z) \in (P) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \iff ax + by + cz + d = 0,$$

avec  $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$ .

### Propriété 12.3 : Équation d'un plan

Soit  $\vec{n}(a; b; c) \neq \vec{0}$ ,  $A$  un point et  $k \in \mathbb{R}$ .

1. L'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = k$  est le plan de vecteur normal  $\vec{n}$  d'équation  $ax + by + cz + d = 0$ , avec  $d = -(ax_A + by_A + cz_A + k)$ .
2. Toute équation  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  est celle d'un plan de vecteur normal  $\vec{n}(a; b; c)$ .

### Remarque

Si  $a \neq 0$ , les vecteurs  $(-b; a; 0)$  et  $(-c; 0; a)$  sont deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan  $ax + by + cz + d = 0$  : leurs produits scalaires avec  $\vec{n}$  sont nuls.

### Application 12.2 : Équations de plans

1. Déterminer  $(E) = \{M \mid \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = -2\}$  avec  $A(1; -1; 0)$  et  $\vec{n}(\sqrt{2}; 3; -2)$ .
2. Soit  $(P_1) : -x + 2y - 3z + 11 = 0$  et  $(D) : x = 5 + t, y = -1 - t, z = -3 - t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).
  - a) Donner une équation du plan  $(P_2)$  passant par  $A(1; 1; 0)$  de vecteur normal  $\vec{n}(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .
  - b) Montrer que  $(P_1) \perp (P_2)$ .
  - c) Montrer que  $(D)$  est parallèle à  $(P_1)$  (et non contenue dans  $(P_1)$ ).

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## 2 Distance d'un point à un plan

### Propriété 12.4 : Distance point-plan

La distance du point  $A(x_A; y_A; z_A)$  au plan  $(P) : ax + by + cz + d = 0$  est

$$d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

### Application 12.3 : Distances à un plan

Soit  $(P) : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$ . Calculer  $d(A, (P))$  pour  $A(1; -2; 7)$  puis pour  $B(2; 1; 0)$ ; que conclure ?

---

---

---

---

---

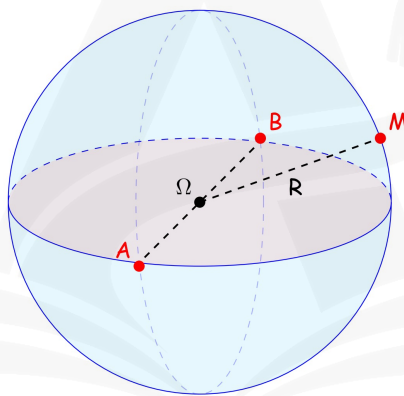
---

### III Sphères

#### 1 Équation d'une sphère

##### Définition 12.4 : Sphère

Soit  $\Omega$  un point et  $R > 0$ . La *sphère*  $(S)$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\Omega M = R$ . Si  $A, B$  sont deux points de  $(S)$  et  $\Omega$  est le milieu de  $[AB]$ , on dit que  $[AB]$  est un *diamètre*.



##### Propriété 12.5 : Équation cartésienne

La sphère de centre  $\Omega(\alpha; \beta; \gamma)$  et de rayon  $R$  a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2.$$

##### Application 12.4 : Équation d'une sphère

- Donner une équation de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .
- Soit  $(S)$  de centre  $\Omega(2; \sqrt{5}; -1)$  et de rayon  $\sqrt{3}$ . Montrer qu'une équation de  $(S)$  est  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2\sqrt{5}y + 2z + 7 = 0$ .

---

---

---

---

---

---

## 2 Sphère de diamètre donné

Si  $[AB]$  est un diamètre de  $(S)$  :  $M \in (S) \iff AMB$  rectangle en  $M$  (ou  $M \in \{A, B\}$ )  $\iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

### Propriété 12.6 : Sphère de diamètre $[AB]$

Pour  $A \neq B$ , l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est la sphère de diamètre  $[AB]$  ; son équation est

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0.$$

### Application 12.5 : Sphère de diamètre $[AB]$

Soit  $A(1; -1; 4)$  et  $B(0; 4; 2)$ . Déterminer le centre, le rayon et une équation de la sphère de diamètre  $[AB]$ .

---

---

---

---

---

---

## 3 Représentation paramétrique

### Propriété 12.7 : Représentation paramétrique

La sphère de centre  $\Omega(\alpha; \beta; \gamma)$  et de rayon  $R$  admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \alpha + R \cos \theta \cos \varphi \\ y = \beta + R \cos \theta \sin \varphi \\ z = \gamma + R \sin \theta \end{cases} \quad (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

### Application 12.6 : Représentation paramétrique

Donner une représentation paramétrique de la sphère de centre  $\Omega(0; 1; -5)$  et de rayon  $\sqrt{7}$ .

#### 4 L'ensemble $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

##### Propriété 12.8 : Nature de l'ensemble

Soit  $(E)$  l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$  et  $k = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$ .

1. Si  $k < 0$  :  $(E) = \emptyset$ .
2. Si  $k = 0$  :  $(E)$  est le point  $(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2})$ .
3. Si  $k > 0$  :  $(E)$  est la *sphère* de centre  $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2})$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{k}}{2}$ .

##### Application 12.7 : Nature d'ensembles

Déterminer la nature de :  $(E_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z + 1 = 0$   $(E_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z + 2 = 0$   
 $(E_3) : x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + 10 = 0$ .

## IV Positions relatives

### 1 Droite et sphère

##### Propriété 12.9 : Droite et sphère

Soit  $(D)$  une droite,  $(S)$  une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ ,  $H$  le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur  $(D)$ .

- $\Omega H > R$  :  $(D)$  est extérieure à  $(S)$  (aucun point commun).
- $\Omega H = R$  :  $(D)$  est tangente à  $(S)$  en  $H$  (un seul point commun).
- $\Omega H < R$  :  $(D)$  est sécante à  $(S)$  (deux points communs).

### Application 12.8 : Droite et sphère

Étudier l'intersection de  $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 = 0$  et de  $(D) : x = 1 + 2t, y = 1 + t, z = -3 + t$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

## 2 Plan et sphère

### Propriété 12.10 : Plan et sphère

Soit  $(P)$  un plan,  $(S)$  une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ ,  $H$  le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur  $(P)$  et  $d = \Omega H$ .

- $d > R$  :  $(P)$  est extérieur à  $(S)$ .
- $d = R$  :  $(P)$  est tangent à  $(S)$  en  $H$ .
- $d < R$  :  $(P) \cap (S)$  est le cercle de centre  $H$  et de rayon  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ .

### Application 12.9 : Plan sécant à une sphère

Soit  $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 19 = 0$  et  $(P) : 2x + 3y + 6z + 19 = 0$ .

1. Déterminer le centre et le rayon de  $(S)$ .
2. Montrer que  $(P)$  coupe  $(S)$  suivant un cercle, dont on donnera le rayon et le centre.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### 3 Plan tangent en un point

#### Propriété 12.11 : Plan tangent

Si  $H$  est un point de la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega$ , le plan tangent à  $(S)$  en  $H$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{H\Omega} = 0$ .

#### Application 12.10 : Plan tangent

Soit  $(S) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$ . Vérifier que  $H(1; 1; -3) \in (S)$  et donner une équation du plan tangent en  $H$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## V Orientation de l'espace

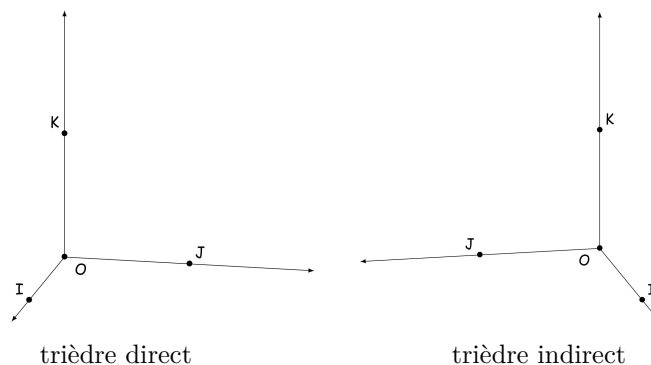
#### Définition 12.5 : Trièdre

Soit  $O, I, J, K$  quatre points non coplanaires. Les demi-droites  $[OI], [OJ], [OK]$  forment un *trièdre*  $([OI], [OJ], [OK])$ ; ses faces sont les plans  $(IOJ), (IOK), (JOK)$ .

#### Définition 12.6 : Bonhomme d'Ampère

Un observateur a les pieds en  $O$ , la tête en  $K$  et regarde le point  $I$ .

- Si  $[OJ]$  est à sa *gauche*, le trièdre  $([OI], [OJ], [OK])$  est *direct*.
- Si  $[OJ]$  est à sa *droite*, il est *indirect*.



### Définition 12.7 : Repère et base orientés

Le repère  $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$  (resp. la base  $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ ) est *direct* si le trièdre  $([OI], [OJ], [OK])$  est direct, *indirect* sinon.

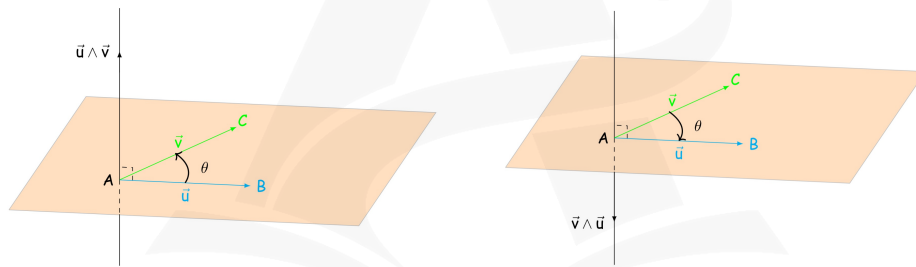
## VI Produit vectoriel

### 1 Définition

#### Définition 12.8 : Produit vectoriel

Soit  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Le *produit vectoriel*  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est le vecteur défini par :

1. si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  ;
2. sinon :
  - a)  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$  ;
  - b)  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe ;
  - c)  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ , où  $\theta = \widehat{BAC}$ .

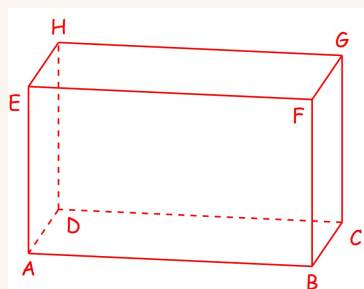


#### Propriété 12.12 : Colinéarité

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

#### Application 12.11 : Produit vectoriel et base orthonormée

Dans le parallélépipède rectangle  $ABCDEFGH$  (base  $ABCD$ ,  $E$  au-dessus de  $A$ ),  $AB = 3$ ,  $AD = 2$ ,  $AE = 4$ . On pose  $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ , et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée directe.



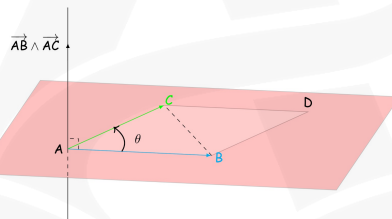
1. Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{EG} = \vec{0}$ .
2. Déterminer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$  en fonction de  $\vec{k}$ .

## 2 Aire d'un parallélogramme, d'un triangle

### Propriété 12.13 : Interprétation de la norme

Soit  $A, B, C$  trois points non alignés.

1.  $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$  est l'aire du parallélogramme construit sur  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .
2. L'aire du triangle  $ABC$  est  $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$ .



### Application 12.12 : Aire dans un cube

$ABCDEFGH$  est un cube de côté  $x$  (même figure,  $\vec{i} = \frac{1}{x} \vec{AB}$ ,  $\vec{j} = \frac{1}{x} \vec{AD}$ ,  $\vec{k} = \frac{1}{x} \vec{AE}$ ). Déterminer  $\vec{EH} \wedge \vec{EF}$  et  $\vec{CD} \wedge \vec{CA}$ , puis l'aire du parallélogramme construit sur  $\vec{EH}$ ,  $\vec{EF}$  et celle du triangle  $ACD$ .

### 3 Propriétés algébriques et analytiques

#### Propriété 12.14 : Propriétés algébriques

Pour  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

1. antisymétrie :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ ;
2. bilinéarité :  $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ ,  $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$  et  $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$ .

#### Propriété 12.15 : Expression analytique

Dans une base orthonormée directe, pour  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k},$$

c'est-à-dire  $\vec{u} \wedge \vec{v} (yz' - zy' ; zx' - xz' ; xy' - yx')$ .

#### Application 12.13 : Calcul avec les coordonnées

Soit  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(0; -3; 2)$ ,  $C(1; 0; -1)$ . Déterminer  $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CB}$  et  $-2\overrightarrow{BA} \wedge 3\overrightarrow{BC}$ , puis l'aire du triangle  $ABC$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

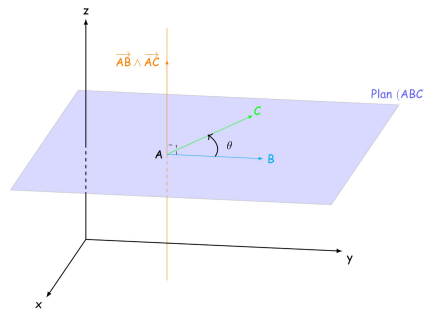
## VII Applications du produit vectoriel

### 1 Équation d'un plan défini par trois points

#### Propriété 12.16 : Plan $(ABC)$

Soit  $A, B, C$  non alignés.

1.  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$ .
2.  $(ABC) = \{M \mid \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0\}$ .



### Application 12.14 : Équation de $(ABC)$

Soit  $A(-4; -3; -2)$ ,  $B(-1; 0; 1)$ ,  $C(2; 3; 5)$ .

1. Calculer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ . En déduire que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ne sont pas alignés.
2. Donner une équation cartésienne de  $(ABC)$ .
3. Calculer la distance de  $M(3; -1; 0)$  à  $(ABC)$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

---

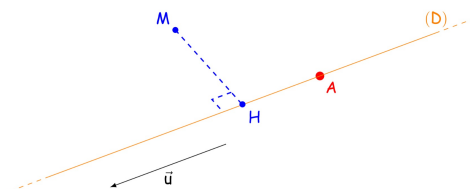
---

## 2 Distance d'un point à une droite

### Propriété 12.17 : Distance point-droite

Soit  $(D)$  la droite passant par  $A$  de vecteur directeur  $\vec{u}$ , et  $M$  un point. Alors

$$d(M, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$



### Application 12.15 : Distance à une droite

Soit  $M(1; 0; 3)$ .

1. Calculer  $d(M, (D))$  où  $(D)$  passe par  $A(0; -1; 3)$  et  $B(2; 4; 0)$ .

2. Calculer  $d(M, (\Delta))$  avec  $(\Delta) : x = 3 + t, y = -1 - t, z = -3 + 2t$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## Exercice 12.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  alors  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ .
2.  $\vec{n}(2; -1; 3)$  est normal au plan  $2x - y + 3z - 5 = 0$ .
3.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6 = 0$  est l'équation d'une sphère.
4.  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{u}$ .
5. Si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
6. Le plan tangent à une sphère en  $H$  est orthogonal à  $(\Omega H)$ .

## Exercice 12.2 : Un triangle rectangle ★★★

Soit  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(3; 1; 0)$ ,  $C(3; -2; 3)$ .

1. Calculer  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ . Quelle est la nature de  $ABC$ ? Calculer son aire.
2. Déterminer le point  $D$  tel que  $ABDC$  soit un parallélogramme. Quelle est sa nature?

## Exercice 12.3 : Équations de plans ★★★

1. Équation du plan passant par  $A(1; 2; -1)$  de vecteur normal  $\vec{n}(2; -1; 3)$ .
2. Montrer que  $(P) : x + 2y - z + 1 = 0$  et  $(Q) : x + y + 3z - 2 = 0$  sont perpendiculaires, puis donner une représentation paramétrique de  $(P) \cap (Q)$ .



**Exercice 12.4 : Plan tangent à une sphère ★★★**

Soit  $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 11 = 0$  et  $(P) : x + 2y + 2z + 17 = 0$ .

1. Déterminer le centre  $\Omega$  et le rayon  $R$  de  $(S)$ .
2. Montrer que  $(P)$  est tangent à  $(S)$  et déterminer le point de contact  $H$ .
3. Écrire une équation de la sphère de centre  $\Omega'(1; -1; 2)$  passant par  $A(3; 0; 0)$ .

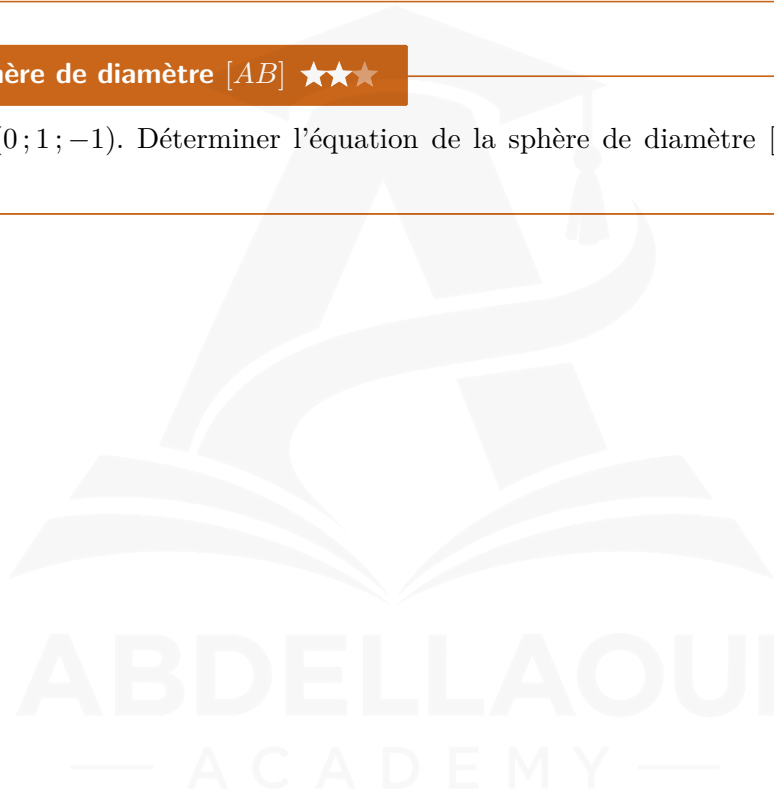
**Exercice 12.5 : Droite et sphère ★★★**

Soit  $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 9$  et  $(D) : x = 3 - t, y = t, z = t \ (t \in \mathbb{R})$ .

1. Déterminer  $(D) \cap (S)$ .
2. Calculer  $d(O, (D))$  avec le produit vectoriel et comparer avec le rayon.

**Exercice 12.6 : Sphère de diamètre  $[AB]$  ★★★**

Soit  $A(2; -1; 3)$  et  $B(0; 1; -1)$ . Déterminer l'équation de la sphère de diamètre  $[AB]$ , son centre et son rayon.



**Exercice 12.7 : Plan  $(ABC)$  ★★★**

Avec  $A(1;0;2)$ ,  $B(3;1;0)$ ,  $C(3;-2;3)$  :

1. Calculer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  et en déduire l'aire de  $ABC$ .
2. Donner une équation de  $(ABC)$  et la distance de  $O$  à ce plan.
3. Calculer la distance de  $O$  à la droite  $(AB)$ .

**Exercice 12.8 : Triangle équilatéral ★★★**

Soit  $A(1;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$ ,  $C(0;0;1)$ . Calculer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ , l'aire de  $ABC$ , une équation de  $(ABC)$  et la distance de  $O$  à  $(ABC)$ .



## Synthèse 12.1 : Triangle, plan, sphère et plan tangent

Repère orthonormé direct.  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(3; 1; 0)$ ,  $C(3; -2; 3)$  et  $(S)$  la sphère de centre  $O$  et de rayon 3.

1. Montrer que  $ABC$  est rectangle et isocèle en  $A$  et calculer son aire.
2. Déterminer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  puis une équation du plan  $(ABC)$ .
3. Montrer que  $(ABC)$  coupe  $(S)$  suivant un cercle dont on donnera le rayon et le centre.
4. Montrer que  $P(1; 2; 2) \in (S)$  et donner une équation du plan  $(T)$  tangent à  $(S)$  en  $P$ .
5. Montrer que  $(T) \parallel (ABC)$  et calculer la distance entre ces deux plans.





## Géométrie dans l'espace

2 BAC SE · 1 h 30 · Date : .....

/20

### Exercice 12.1 : Triangle et plan 6 pt

Repère orthonormé direct.  $A(0; 1; -1)$ ,  $B(1; 3; 1)$ ,  $C(2; 2; -3)$ .

1. Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ,  $AB$  et  $AC$ . Nature du triangle  $ABC$ ?
2. Calculer  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  et l'aire de  $ABC$ .
3. Donner une équation cartésienne de  $(ABC)$ .
4. Calculer la distance du point  $M(1; 1; 4)$  au plan  $(ABC)$ .

1,5 pt

1,5 pt

1,5 pt

1,5 pt

### Exercice 12.2 : Sphères 5 pt

Soit  $(E) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ ,  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(0; 1; -1)$  et  $(P) : 2x - y + 2z + 2 = 0$ .

1. Montrer que  $(E)$  est une sphère, de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  à préciser.
2. Donner une équation de la sphère de diamètre  $[AB]$ .
3. Montrer que  $(P)$  est tangent à  $(E)$  et déterminer le point de contact.

1,5 pt

1,5 pt

2 pt

ABDELLAOUI  
— ACADEMY —

Exercice 12.3 : Droite, plan et sphère 5 pt

Soit  $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ .

1. Déterminer le centre  $\Omega$  et le rayon de  $(S)$ . 1 pt
2. Montrer que la droite  $(D) : x = 4, y = -2 + t, z = t$  est tangente à  $(S)$ ; préciser le point de contact. 2 pt
3. Montrer que le plan  $(Q) : x + 2y + 2z + 6 = 0$  coupe  $(S)$  suivant un cercle dont on donnera le rayon. 2 pt

Exercice 12.4 : Produit vectoriel et distances 4 pt

Soit  $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1)$ .

1. Calculer  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  et l'aire de  $ABC$ . 1,5 pt
2. En déduire une équation de  $(ABC)$  puis  $d(O, (ABC))$ . 1,5 pt
3. Calculer  $d(O, (AB))$ . 1 pt

