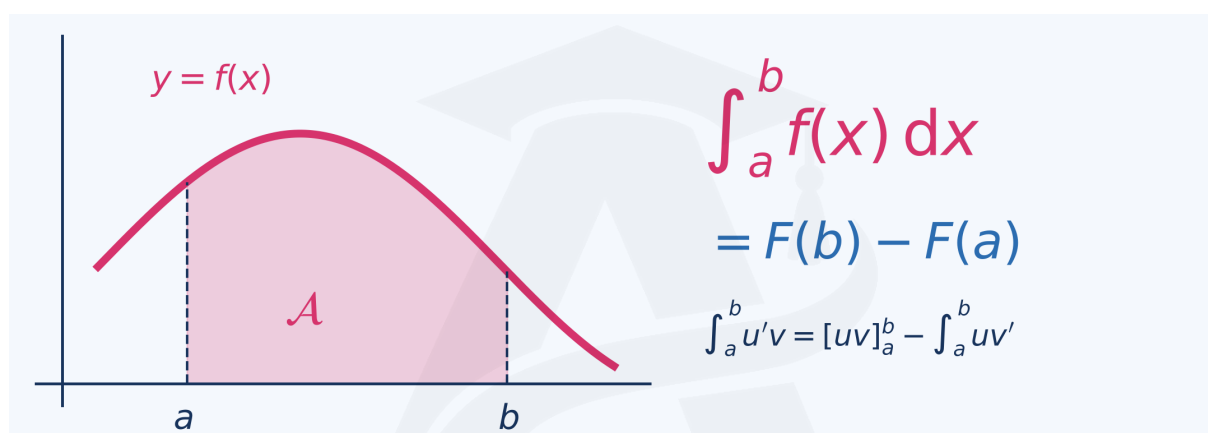


11

LE CALCUL INTÉGRAL

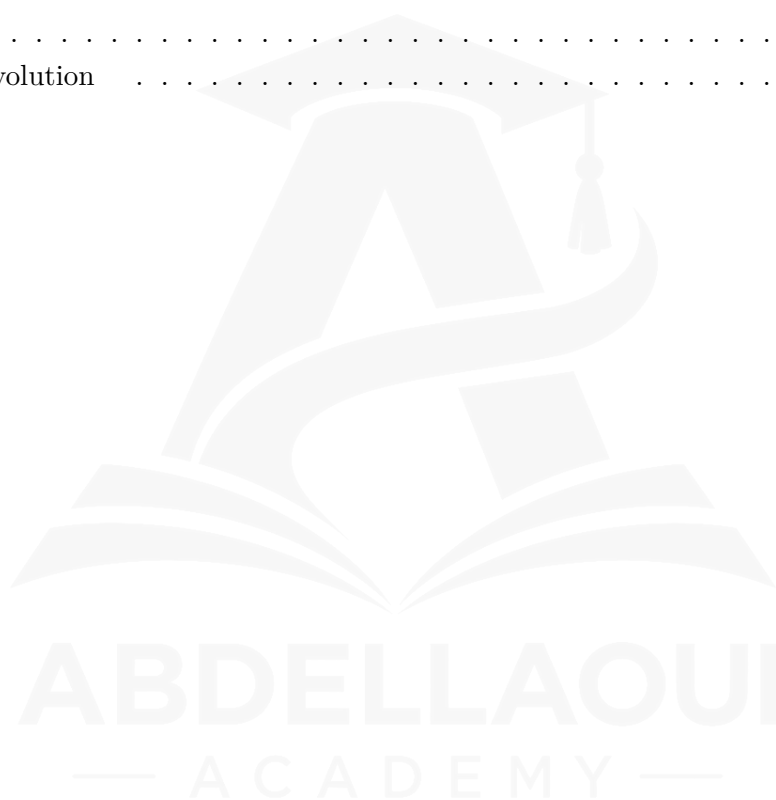


En quelques mots. Ce chapitre définit l'intégrale d'une fonction continue à l'aide d'une primitive, en donne les propriétés, les méthodes de calcul (primitives usuelles, intégration par parties), l'interprétation géométrique, la valeur moyenne, puis les calculs d'aires et de volumes.

Objectifs	• Calculer une intégrale avec une primitive • Utiliser linéarité, relation de Chasles, positivité • Intégrer par parties • Calculer l'aire d'un domaine et la valeur moyenne d'une fonction • Calculer le volume d'un solide de révolution
Prérequis	• Primitives • Fonctions logarithme, exponentielle et trigonométriques
Instruments pédagogiques	• Activités de découverte • Applications guidées • Exercices corrigés par thème • Synthèse et test
Volume horaire	18 heures (indicatif)
Évaluation	Test de fin de chapitre (1 h 30)

Au sommaire de ce chapitre

I	Intégrale d'une fonction continue	3
	Définition	1, p. 3
	Propriétés	2, p. 4
II	Méthodes de calcul d'intégrales	5
	Primitives usuelles	1, p. 5
III	Intégration par parties	7
IV	Interprétation géométrique et valeur moyenne	8
	Intégrale et aire	1, p. 8
	Valeur moyenne	2, p. 9
V	Calculs d'aires et de volumes	10
	Aire d'un domaine	1, p. 10
	Volume d'un solide de révolution	2, p. 12



I Intégrale d'une fonction continue

1 Définition

Activités

Activité 11.1 : Aire sous une droite

Soit $f(x) = 2x + 1$ sur $[0; 3]$ et $F(x) = x^2 + x$.

1. Vérifier que F est une primitive de f .
2. Calculer l'aire (en unités d'aire) du trapèze limité par la droite $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 3$.
3. Comparer avec $F(3) - F(0)$. Que remarque-t-on ?
4. Pourquoi ce nombre ne dépend-il pas de la primitive choisie ?

Définition 11.1 : Intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I . L'intégrale de f de a à b est le réel

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

où F est une primitive quelconque de f sur I . Ce nombre ne dépend pas du choix de F .

Remarque : Vocabulaire

a et b sont les *bornes*. La variable est *muette* : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(y) dy$. Le symbole dx indique la variable d'intégration. Les bornes peuvent être rangées dans n'importe quel ordre ($a < b$, $a = b$ ou $a > b$).

Exemple 11.1 Trois calculs

$$1. \int_{-2}^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{16}{3}.$$

2. $\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$
3. $\int_1^2 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$ (une primitive de $\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$ est $\frac{2}{3} x^{3/2}$).

2 Propriétés

Propriété 11.1 : Linéarité et relation de Chasles

Soient f, g continues sur un intervalle I contenant a, b, c , et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$ et $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$;
2. (Chasles) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$;
3. $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ et $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$

Exemple 11.2 Utiliser les propriétés

1. $\int_{-1}^2 |x^3| dx = \int_{-1}^0 (-x^3) dx + \int_0^2 x^3 dx = \left[-\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}.$
2. $\int_0^2 (3e^x - 4x) dx = 3[e^x]_0^2 - 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 3(e^2 - 1) - 8 = 3e^2 - 11.$

Propriété 11.2 : Positivité et comparaison

Soient f, g continues sur $[a; b]$ avec $a \leq b$.

1. Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$; si $f \leq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.
2. Si $f \geq g$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.
3. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

Remarque : Attention aux réciproques

Si f change de signe, on ne peut rien dire du signe de $\int_a^b f$ sans calcul. La réciproque de 1. est fausse :
 $\int_0^3 (2x - 1) dx = [x^2 - x]_0^3 = 6 \geq 0$ alors que $2x - 1$ change de signe sur $[0; 3]$.

Application 11.1 : Premiers calculs

Calculer : 1. $\int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx$ 2. $\int_{-1}^3 |x - 1| dx$ 3. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

II Méthodes de calcul d'intégrales

1 Primitives usuelles

Propriété 11.3 : Tableau de primitives

Dans le tableau, u est une fonction dérivable, $a \neq 0$ et c une constante.

$f(x)$	Une primitive	Sur
a	ax	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \ (n \geq 2)$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$	tout intervalle de $\mathbb{R}^*$
$x^r \ (r \in \mathbb{Q}, r \neq -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	tout intervalle de $\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	tout intervalle où $\cos x \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	intervalle où u ne s'annule pas
$u'e^u$	e^u	intervalle où u est dérivable
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}, r \neq -1)$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	intervalle où u^r est définie (et $u > 0$ si $r \notin \mathbb{Z}$)

Remarque : Méthode

Reconnaître la forme $u' \times \varphi(u)$: $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$, $u'u^r$, $u' \cos u$, ... Une fraction se simplifie parfois d'abord :

$$\frac{x+1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

Application 11.2 : Calculer des intégrales

Calculer :

a) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+1} dx$

c) $\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx$

e) $\int_0^1 \frac{2e^{3x} - e^x - 5}{e^x} dx$

g) $\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx$

i) $\int_0^\pi \cos(3x-5) dx$

k) $\int_0^{-\pi/2} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

b) $\int_{-1}^1 \frac{-2x^2}{x^3+3} dx$

d) $\int_1^2 \left(e^{-x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

f) $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$

h) $\int_0^{\pi/3} \tan x dx$

j) $\int_{-\pi/3}^0 \cos x e^{\sin x} dx$

l) $\int_0^{-\pi/2} \cos x \sin x dx$

III Intégration par parties

★ Théorème 11.1 : Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées u' et v' sont continues, et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

Preuve. $(uv)' = u'v + uv'$, donc uv est une primitive de $u'v + uv'$ et $\int_a^b (u'v + uv') = [uv]_a^b$. On sépare par linéarité. ■

Remarque : Méthode

On choisit v de sorte que v' soit plus simple que v (polynôme que l'on dérive, $\ln x$, ...) et u' facile à primitiver ($\sin$, $\cos$, e^x , puissance). Pour $\int x^n e^x$ ou $x^n \sin x$: $v = x^n$; pour $\int x^n \ln x$: $v = \ln x$.

Exemple 11.3 $I_1 = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

On pose $u'(x) = \sin x$, $v(x) = x$; alors $u(x) = -\cos x$, $v'(x) = 1$. $I_1 = [-x \cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x) \, dx = 0 + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$.

Application 11.3 : Intégrer par parties

Calculer : $I_2 = \int_{-1}^0 x\sqrt{1-x} \, dx$ $I_3 = \int_1^2 (2-x)e^{-x} \, dx$ $I_4 = \int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$ $I_5 = \int_2^e x \ln(x-1) \, dx$.

IV Interprétation géométrique et valeur moyenne

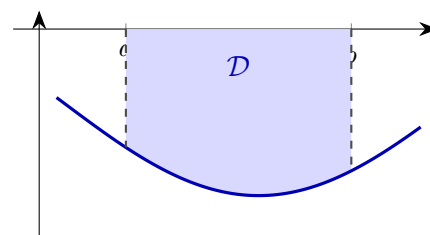
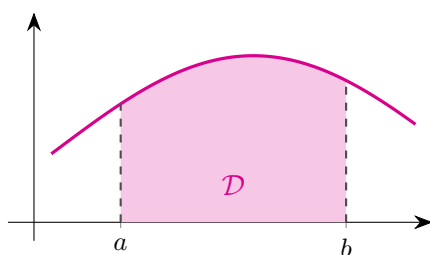
1 Intégrale et aire

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle de côtés $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

Propriété 11.4 : Aire sous une courbe

Soit f continue sur $[a; b]$ ($a \leq b$) et $\mathcal{D}$ le domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

1. Si $f \geq 0$: $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx$ u.a.
2. Si $f \leq 0$: $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^b (-f(x)) dx = - \int_a^b f(x) dx$ u.a.



Application 11.4 : Aires sous une courbe

1. $f(x) = \frac{x^3 + 6}{2}$, repère avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 1$ cm. Montrer que $f > 0$ sur $[-1; 2]$ et calculer en cm^2 l'aire limitée par $\mathcal{C}_f$, (Ox) et les droites $x = -1$, $x = 2$.
2. $g(x) = e^{-x} - x$, repère avec $\|\vec{i}\| = 1,5$ cm et $\|\vec{j}\| = 2$ cm. Montrer que $g < 0$ sur $[1; 2]$ et calculer en cm^2 l'aire limitée par $\mathcal{C}_g$, (Ox) et les droites $x = 1$, $x = 2$.

2 Valeur moyenne

Propriété 11.5 : Inégalité de la moyenne

Soit f continue sur $[a; b]$, $a < b$.

1. S'il existe m, M tels que $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$.
2. S'il existe k tel que $|f| \leq k$ sur $[a; b]$, alors $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq k(b-a)$.

Définition 11.2 : Valeur moyenne

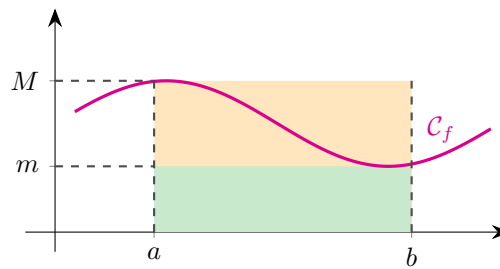
La *valeur moyenne* de f continue sur $[a; b]$ ($a \neq b$) est $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$.

★ Théorème 11.2 : Égalité de la moyenne

Il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \mu$, c'est-à-dire $\int_a^b f(x) \, dx = (b - a)f(c)$.

Remarque : Interprétation

Si $f \geq 0$, l'aire du domaine sous la courbe est égale à celle d'un rectangle de base $[a; b]$ et de hauteur μ . L'inégalité de la moyenne dit que cette aire est comprise entre celles des rectangles de hauteurs m et M .



Application 11.5 : Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne μ de f sur I : 1. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$, $I = [-1; 0]$ 2. $f(x) = (x-1)e^x$, $I = [0; 1]$.

V Calculs d'aires et de volumes

1 Aire d'un domaine

Propriété 11.6 : Aire et valeur absolue

Soit f continue sur $[a; b]$. L'aire du domaine limité par C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx \text{ u.a.}$$

Pour la calculer : étudier le signe de f , découper l'intervalle en $[a; c_1], [c_1; c_2], \dots$ où f garde un signe constant, puis appliquer la relation de Chasles : $\mathcal{A} = \int_a^{c_1} f - \int_{c_1}^{c_2} f + \int_{c_2}^b f$ (le signe change quand f est négative).

Propriété 11.7 : Aire entre deux courbes

Soient f, g continues sur $[a; b]$. L'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ et les droites $x = a, x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \quad \text{u.a.}$$

$$\text{Si } f \leq g \text{ sur } [a; c] \text{ et } f \geq g \text{ sur } [c; b] : \mathcal{A} = \int_a^c (g - f) + \int_c^b (f - g).$$

Application 11.6 : Aire de signe quelconque

Soit $f(x) = x^3 - 2x$; repère avec $\|\vec{i}\| = 1,5 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

1. Étudier le signe de f sur $[0; 2]$.
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, (Ox) et les droites $x = 0$, $x = 2$.

Application 11.7 : Aire entre deux courbes

Repère orthonormé, $\|i\| = 2 \text{ cm}$. Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

1. Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[0; 2]$ et déterminer leurs points d'intersection.
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites $x = 0$, $x = 2$.

2 Volume d'un solide de révolution

Propriété 11.8 : Volume de révolution

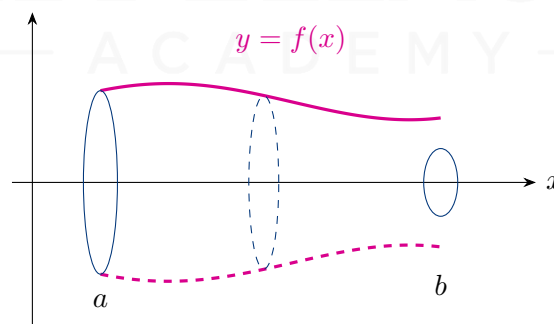
Soit f continue sur $[a; b]$ et $\mathcal{D}$ le domaine limité par $\mathcal{C}_f$, (Ox) et les droites $x = a$, $x = b$. Le solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de (Ox) a pour volume

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \text{ unités de volume,}$$

l'unité de volume étant $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$.

Remarque : Idée

On découpe le solide en disques d'épaisseur dx et de rayon $|f(x)|$: chacun a pour volume $\pi f(x)^2 dx$; on additionne.



Application 11.8 : Aire et volume

Repère orthonormé de l'espace, $\|\vec{i}\| = 1$ cm. Soit $f(x) = e^x$ sur $[\ln 2; \ln 3]$ et $\mathcal{D}$ le domaine limité par $\mathcal{C}_f$, (Ox) et les droites $x = \ln 2$, $x = \ln 3$.

1. Calculer en cm^2 l'aire de $\mathcal{D}$.
2. Calculer en cm^3 le volume du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de (Ox) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Exercice 11.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$.
2. Si $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ avec $a < b$, alors $f \geq 0$ sur $[a; b]$.
3. $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$.
4. $\int_{-2}^2 x^2 dx = 2 \int_0^2 x^2 dx$.
5. La valeur moyenne d'une fonction constante égale à c sur $[a; b]$ est c .

Exercice 11.2 : Primitives et intégrales ★★★

Calculer :

- | | |
|--|--|
| a) $\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 1) dx$ | b) $\int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ |
| c) $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos 2x) dx$ | d) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ |
| e) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx$ | f) $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$ |

Exercice 11.3 : Encadrement ★★★

1. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$: $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$.
2. En déduire un encadrement de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.
3. Montrer que $\left| \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+x^2} dx \right| \leq \pi$ (on utilisera $|\sin x| \leq 1$ et $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$).

Exercice 11.4 : Intégrations par parties ★★★

Calculer, en intégrant par parties :

a) $A = \int_0^1 x e^{-x} dx$

b) $B = \int_1^e \ln x dx$

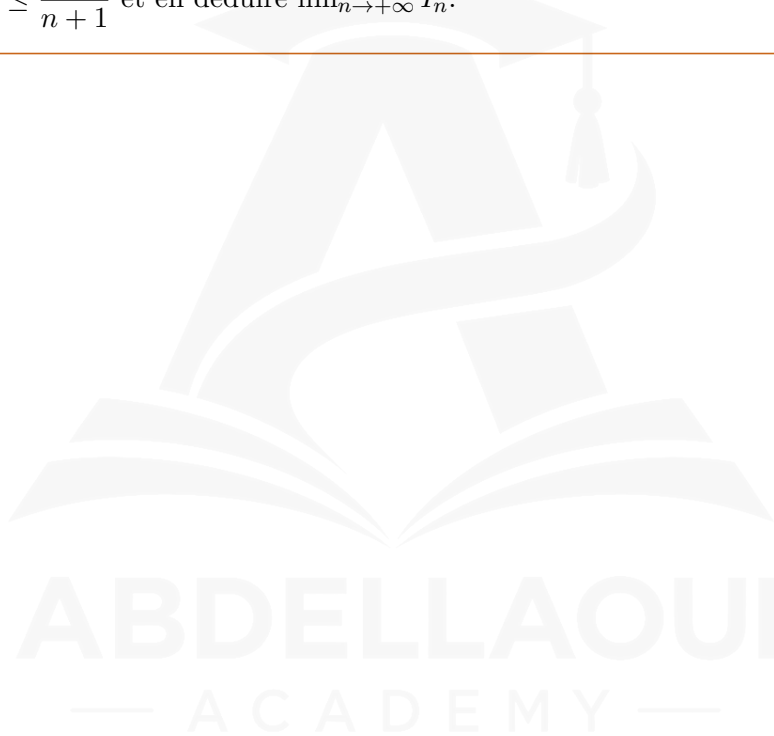
c) $C = \int_1^e x^2 \ln x dx$

d) $D = \int_0^\pi x \cos x dx$

Exercice 11.5 : Une suite d'intégrales ★★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Calculer I_0 .
2. Montrer, par une intégration par parties, que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. En déduire I_1 et I_2 .
3. Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.



Exercice 11.6 : Aire entre deux courbes ★★★

Repère avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 3$ cm. Soit $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$.

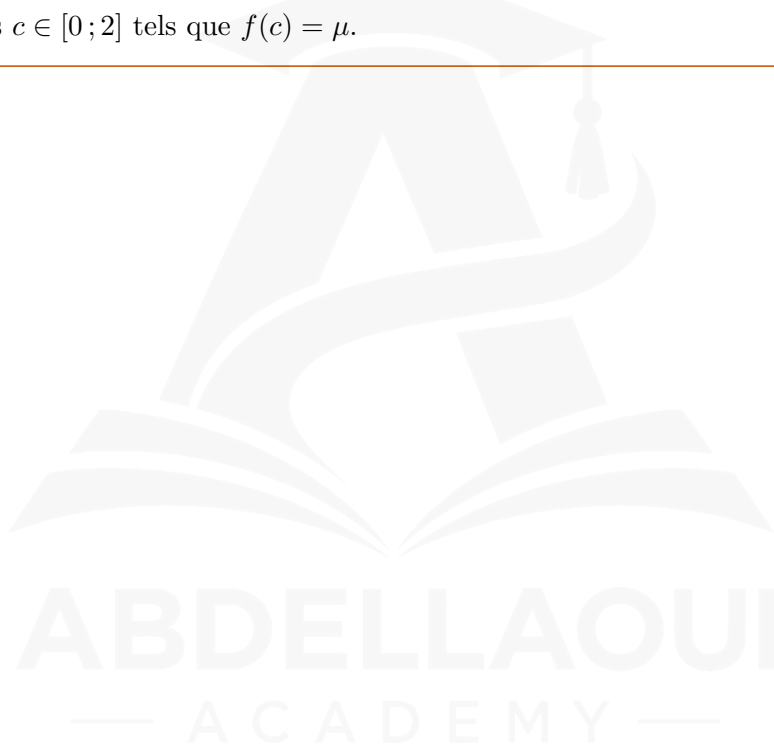
1. Montrer que $f \geq g$ sur $[0; \ln 2]$.
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par les deux courbes et les droites $x = 0$ et $x = \ln 2$.

Exercice 11.7 : Volumes de révolution ★★★

Calculer le volume (en unités de volume) du solide engendré par la rotation autour de (Ox) de la courbe de : a) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; 4]$ b) $f(x) = \sin x$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 11.8 : Valeur moyenne ★★★

1. Calculer la valeur moyenne μ de $f(x) = x(2 - x)$ sur $[0; 2]$.
2. Déterminer les réels $c \in [0; 2]$ tels que $f(c) = \mu$.



Synthèse 11.1 : Étude et aire pour $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$; $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm, $\|\vec{j}\| = 5$ cm.

1. Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$ et dresser le tableau de variations.
3. Montrer que $F(x) = -\frac{1 + \ln x}{x}$ est une primitive de f . En déduire $\int_1^e f(x) dx$ et l'aire (en cm^2) du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, (Ox) et les droites $x = 1$, $x = e$.
4. Pour $t > 1$, on pose $A(t) = \int_1^t f(x) dx$. Calculer $A(t)$ et sa limite quand $t \rightarrow +\infty$.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur $[1; e]$.





Le calcul intégral

2 BAC SE · 1 h 30 · Date :

/20

Exercice 11.1 : Calculs d'intégrales 5 pt

Calculer :

1. $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx$

1 pt

2. $\int_0^2 (x^2 - x) dx$

1 pt

3. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + e^x} dx$

1,5 pt

4. $\int_{-1}^2 |x - 1| dx$

1,5 pt

Exercice 11.2 : Intégration par parties 4 pt

Calculer, en intégrant par parties :

1. $\int_0^1 (x + 1)e^x dx$

2 pt

2. $\int_1^e x \ln x dx$

2 pt

Exercice 11.3 : Aire entre une parabole et une droite 5 pt

Dans un repère avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 1$ cm, on considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2 - 1$ et la droite $\mathcal{D} : y = x + 1$.

1. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$. 1 pt
2. Étudier la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$. 1 pt
3. Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$, en u.a. puis en cm^2 . 3 pt

Exercice 11.4 : Volume, valeur moyenne, encadrement 6 pt

Soit $f(x) = e^{-x}$ sur $[0; 1]$.

1. Calculer le volume (en unités de volume) du solide engendré par la rotation de la courbe de f autour de (Ox) . 2 pt
2. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 1]$. 2 pt
3. Montrer que $e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$. 2 pt

