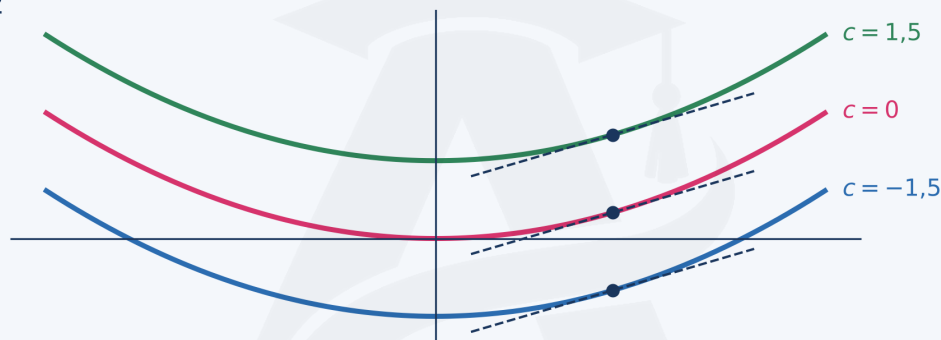


6

PRIMITIVES

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + c : \text{primitives de } f(x) = x$$



En quelques mots. Ce chapitre présente la notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle : définition, ensemble des primitives, condition initiale, linéarité, tableau des primitives usuelles et reconnaissance des formes $u'u^r$, u'/u^2 , $u'/\sqrt{u}$.

Objectifs	• Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre • Déterminer toutes les primitives d'une fonction et celle qui vérifie une condition • Utiliser le tableau des primitives usuelles et la linéarité • Reconnaître les formes composées $u'u^r$, u'/u^2, $u'/\sqrt{u}$ • Linéariser pour primitiver $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\tan^2 x$
Prérequis	• Dérivation : dérivées usuelles, opérations, composée • Continuité, trigonométrie (linéarisation)
Instruments pédagogiques	• Activités de découverte • Applications guidées • Exercices corrigés par thème • Synthèse et test
Volume horaire	10 heures (indicatif)
Évaluation	Test de fin de chapitre (1 h 30)

Au sommaire de ce chapitre

I Primitive d'une fonction sur un intervalle	3
Définition	1, p. 3
II Ensemble des primitives d'une fonction	4
Toutes les primitives	1, p. 4
III Opérations et primitives usuelles	5
Linéarité	1, p. 5
Tableau des primitives usuelles	2, p. 5
IV Reconnaître la forme d'une fonction	6
Les formes $u'u^r$, $\frac{u'}{u^2}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$	1, p. 6
Linéariser	2, p. 7



I Primitive d'une fonction sur un intervalle

1 Définition

Activités

Activité 6.1 : Dérivée dans l'autre sens

Soit $f(x) = 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = x^2 + 3x$, $G(x) = x^2 + 3x + 5$, $H(x) = x^2 + 2x$.

1. Calculer F' , G' et H' .
2. Lesquelles de ces fonctions ont pour dérivée f ? Que remarque-t-on pour F et G ?

Définition 6.1 : Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Une fonction F est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque : Notation

On note en général une primitive par une lettre majuscule. On dit *une* primitive de f et non *la* primitive : on verra qu'il y en a une infinité.

★ Théorème 6.1 : Existence (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Exemple 6.1 Vérifier une primitive

Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ et $F(x) = x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$. F est dérivable sur I et $F'(x) = 1 + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = f(x)$: F est une primitive de f sur I .

Application 6.1 : Est-ce une primitive ?

Montrer que $F(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ est une primitive de $f(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

II Ensemble des primitives d'une fonction

1 Toutes les primitives

★ Théorème 6.2 : Ensemble des primitives

Soit f continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

- Les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + c$, où c est une constante réelle.
- Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une *unique* primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Preuve. Si $G = F + c$, alors $G' = F' = f$: c'est une primitive. Réciproquement, si G est une primitive de f , la fonction $G - F$ est dérivable sur l'intervalle I de dérivée $G' - F' = f - f = 0$; elle est donc constante : $G = F + c$. Pour la condition $G(x_0) = y_0$: $F(x_0) + c = y_0$ équivaut à $c = y_0 - F(x_0)$, valeur unique de c . ■

Remarque : Interprétation graphique

Les courbes des primitives de f se déduisent les unes des autres par translation de vecteur $c\vec{j}$; en des points de même abscisse, leurs tangentes sont parallèles (même coefficient directeur $f(x)$). La condition $G(x_0) = y_0$ sélectionne la courbe qui passe par le point $(x_0; y_0)$.

Exemple 6.2 Primitive avec condition

Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$. Les primitives de f sont $F(x) = x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + c$. La condition $F(1) = 0$ donne $1 + 2 + 1 + c = 0$, donc $c = -4$ et $F(x) = x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 4$.

Application 6.2 : Primitive et condition initiale

Soit $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer les primitives de f , puis celle qui vaut 2 en 0.

III Opérations et primitives usuelles

1 Linéarité

Propriété 6.1 : Somme et multiple

Si F et G sont des primitives de f et g sur I , alors pour tous réels α, β : $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I .

2 Tableau des primitives usuelles

Propriété 6.2 : Primitives usuelles

Dans chaque ligne, c désigne une constante réelle.

$f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle
a ($a \in \mathbb{R}$)	ax	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)	$\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
x^r ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$] 0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x\sqrt{x}$	$] 0; +\infty[$
$\sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n+1]{x^{n+1}}$	$] 0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$)
$\sin(ax+b)$ ($a \neq 0$)	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$ ($a \neq 0$)	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

Propriété 6.3 : Formes composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

f	Une primitive F	Condition sur I
$u' u^r$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$	$u > 0$ (ou $r \in \mathbb{N}$: aucune)
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	u ne s'annule pas
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$u' \cos u$	$\sin u$	aucune
$u' \sin u$	$-\cos u$	aucune

Remarque : Vérifier toujours

Une primitive se contrôle en dérivant : F' doit redonner f . Cette vérification est la seule garantie contre les erreurs de coefficient.

Application 6.3 : Utiliser le tableau

Déterminer une primitive de : $f(x) = x^4 - 3x + \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$; $g(x) = 3\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$; $h(x) = \cos(2x + 1) + \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

IV Reconnaître la forme d'une fonction

1 Les formes $u'u^r$, $\frac{u'}{u^2}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

Activités

Activité 6.2 : Dériver pour primitiver

Soit $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

- Poser $u(x) = x^2 + 1$ et reconnaître f sous la forme $u'u^r$.
- En déduire une primitive de f et la vérifier en dérivant.

.....

.....

.....

.....

.....

Remarque : Méthode

On repère une fonction u (souvent une expression à l'intérieur d'une puissance, d'une racine ou d'un dénominateur) et on regarde si u' apparaît en facteur. Si u' apparaît à une constante près, on corrige par une constante : $x(x^2 + 1)^3 = \frac{1}{2} u' u^3$ avec $u = x^2 + 1$.

Exemple 6.3 Trois formes

- $f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$ sur $] -1; +\infty[: u = x^3 + 1, u' = 3x^2, f = 2 \frac{u'}{u^2}$ et $F(x) = -\frac{2}{x^3+1}$.
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R} : u = x^2 + 1, f = \frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$ et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.
- $f(x) = \cos x \sin^3 x$ sur $\mathbb{R} : u = \sin x, f = u' u^3$ et $F(x) = \frac{\sin^4 x}{4}$.

Application 6.4 : Reconnaître $u'u^r$

Déterminer une primitive de $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ sur $\mathbb{R}$ et de $g(x) = 3x^2 \cos(x^3)$ sur $\mathbb{R}$.

2 Linéariser

Remarque : Formules de linéarisation

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1; \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Exemple 6.4 Primitives de $\cos^2$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \text{ a pour primitive } F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Application 6.5 : Linéariser

Déterminer une primitive de $\sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$ et de $\tan^2 x$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Remarque : Deux primitives différentes

$\sin x \cos x$ a pour primitive $\frac{\sin^2 x}{2}$ (forme $u'u, u = \sin x$) mais aussi $-\frac{\cos 2x}{4}$ (linéarisation). Leur différence est

la constante $\frac{1}{4}$: c'est cohérent avec le théorème 1.



Exercice 6.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. $x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto x^2 - 3$ sont deux primitives de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet une unique primitive.
3. Si F et G sont des primitives de f sur un intervalle, alors $F - G$ est constante.
4. $x \mapsto \frac{x|x|}{2}$ est une primitive de $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.
5. Toute primitive d'une fonction paire est impaire.

Exercice 6.2 : Vérifier une primitive ★★★

1. Montrer que $F(x) = x\sqrt{x+1}$ est une primitive de $f(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ sur $] -1; +\infty[$.
2. Montrer que $G(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ est une primitive de $g(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.3 : Primitives usuelles ★★★

Déterminer une primitive de f sur l'intervalle indiqué :

1. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + x - 5$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1}{x^3} + \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}$ sur $]0; +\infty[$
4. $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$ sur $\mathbb{R}$
5. $f(x) = \cos(3x - 1)$ sur $\mathbb{R}$
6. $f(x) = 1 + \tan^2 x$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

Exercice 6.4 : Condition initiale ★★★

Déterminer la primitive F de f vérifiant la condition donnée :

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$, $F(1) = 2$;
2. $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$, $F(1) = 0$;
3. $f(x) = \sin 2x + \cos x$ sur $\mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 6.5 : Reconnaître la forme $u' \varphi(u)$ ★★★

Déterminer une primitive de f sur l'intervalle indiqué :

1. $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$ sur $] -1 ; +\infty[$
3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f(x) = \cos x \sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$
6. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ sur $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

Exercice 6.6 : Linéarisation ★★★

Déterminer une primitive de :

1. $\cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$;
2. $\sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$;
3. $\tan^2 x$ sur $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 6.7 : Une primitive qui s'étudie ★★★

Soit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$.

1. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1.
2. Montrer que $F(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$.
3. Étudier le signe de f , en déduire les variations de F et son minimum.



Primitives

2 BAC SE · 1 h 30 · Date :

/20

Exercice 6.1 : Vrai ou faux 4 pt

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant brièvement.

4 pt

1. Si F est une primitive de f sur I , alors $F + 3$ en est une aussi.
2. Une fonction continue sur un intervalle I n'a qu'une seule primitive sur I .
3. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.
4. $x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$ est une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.2 : Calculs de primitives 6 pt

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

6 pt

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur $\mathbb{R}$

1,5 pt

2. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$

1,5 pt

3. $f(x) = 2x(x^2 + 3)^4$ sur $\mathbb{R}$

1,5 pt

4. $f(x) = \sin x \cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$

1,5 pt

Exercice 6.3 : Primitive et étude 5 pt

Soit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive F de f telle que $F(0) = 0$.
3. Étudier les variations de F et montrer que $F(x) \geq 0$.
4. Résoudre l'équation $F(x) = 1$.

1,5 pt

1 pt

1,5 pt

1 pt

Exercice 6.4 : Linéarisation 5 pt

1. Montrer que $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

1 pt

2. En déduire une primitive de $\cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$.

1 pt

3. Déterminer la primitive G de $g(x) = \cos^2 x$ telle que $G(0) = 1$.

1 pt

4. Déterminer deux primitives de $h(x) = \sin x \cos x$ (l'une par la forme $u'u$, l'autre par linéarisation) et vérifier qu'elles diffèrent d'une constante.

2 pt

