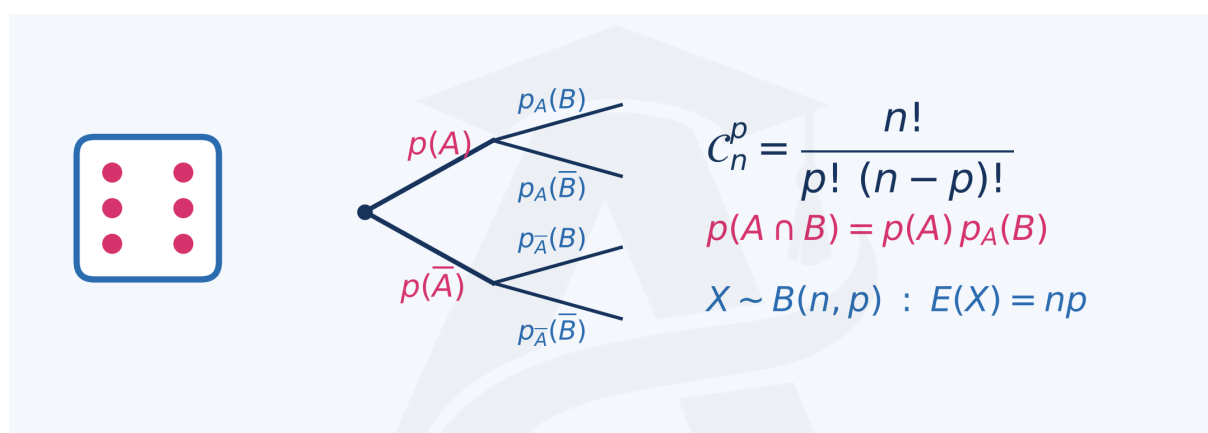


13

DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS



En quelques mots. Ce chapitre présente les techniques de dénombrement (principe multiplicatif, arrangements, permutations, combinaisons), puis les probabilités : équiprobabilité, probabilité conditionnelle, événements indépendants, variables aléatoires, espérance, variance et loi binomiale.

Objectifs	• Dénombrer avec arrangements, permutations et combinaisons • Calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité • Utiliser probabilités conditionnelles, probabilités totales et indépendance • Déterminer la loi, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire • Reconnaître et utiliser la loi binomiale
Prérequis	• Ensembles et logique • Dénombrement élémentaire • Pourcentages et fractions
Instruments pédagogiques	• Activités de découverte • Applications guidées • Exercices corrigés par thème • Synthèse et test
Volume horaire	22 heures (indicatif)
Évaluation	Test de fin de chapitre (1 h 30)

Au sommaire de ce chapitre

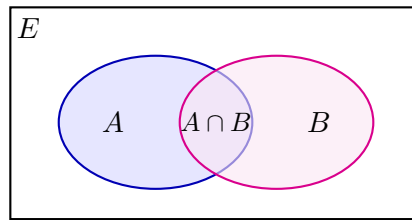
I	Dénombrement	3
	Ensembles et cardinal	1, p. 3
	Principe fondamental	2, p. 4
	Arrangements, permutations, combinaisons	3, p. 4
II	Probabilités	6
	Expérience aléatoire et événements	1, p. 6
	Probabilité	2, p. 6
	Probabilité conditionnelle	3, p. 8
	Événements indépendants	4, p. 9
	Épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli	5, p. 10
	Variables aléatoires	6, p. 10
	Loi binomiale	7, p. 11



I Dénombrement

1 Ensembles et cardinal

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .



Définition 13.1 : Opérations sur les ensembles

- Union : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$; intersection : $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- Complémentaire : $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$; différence : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
- Produit cartésien : $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Définition 13.2 : Cardinal

Le *cardinal* d'un ensemble fini E , noté $\text{Card}(E)$, est le nombre de ses éléments. A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.

Propriété 13.1 : Cardinaux

1. Si $A \cap B = \emptyset$: $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$; en général $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
2. $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$ et $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.

Application 13.1 : Cardinal d'une réunion

Dans une classe de 30 élèves, 18 aiment le football, 15 le basket et 8 les deux. Combien n'aiment aucun des deux sports ?

.....

.....

.....

.....

2 Principe fondamental

★ Théorème 13.1 : Principe multiplicatif

Si un choix C_1 se fait de n_1 manières, puis un choix C_2 de n_2 manières, ..., puis un choix C_p de n_p manières, l'ensemble des choix se fait de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ manières.

Exemple 13.1

Un code est formé de deux lettres *différentes* suivies d'un chiffre non nul : $26 \times 25 \times 9 = 5\,850$ codes. Dans une classe de 21 filles et 12 garçons, choisir une fille et un garçon : $21 \times 12 = 252$ possibilités. Deux lancers d'une pièce : $2 \times 2 = 4$ issues.

3 Arrangements, permutations, combinaisons

Activité 13.1 : Choisir dans $\{A, B, C\}$

On choisit deux lettres dans $E = \{A, B, C\}$.

1. Combien de couples (x, y) avec répétition possible ? Écrire-les.
2. Même question si les deux lettres sont distinctes.
3. Combien de *parties* à deux éléments (l'ordre ne compte pas) ?

Définition 13.3 : Arrangements et permutations

Soit E de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$.

- Un *arrangement avec répétition* de p éléments de E est un p -uplet $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E non nécessairement distincts.
- Un *arrangement sans répétition* est un p -uplet d'éléments deux à deux distincts ; pour $p = n$, c'est une *permutation* de E .

L'ordre compte.

Propriété 13.2 : Nombres d'arrangements

Pour $1 \leq p \leq n$:

- arrangements avec répétition : n^p ;

- arrangements sans répétition : $\mathcal{A}_n^p = n(n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$;
- permutations de n éléments : $n! = n(n-1) \cdots 2 \times 1$ (avec $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1)n!$).

Définition 13.4 : Combinaison

Une *combinaison* de p éléments de E ($\text{Card } E = n$) est une partie de E à p éléments ; l'ordre ne compte pas.

Propriété 13.3 : Nombre de combinaisons

$C_n^p = \frac{\mathcal{A}_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. De plus $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$ et, pour $1 \leq p \leq n$, $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$ (formule de Pascal).

Remarque : Résumé

Tirage de p éléments parmi n	Ordre	Nombre
successif avec remise	compte	n^p
successif sans remise	compte	$\mathcal{A}_n^p$
simultané	ne compte pas	C_n^p

Application 13.2 : Choisir le bon outil

1. Un sac contient 5 jetons a, b, c, d, e . Nombre de tirages successifs avec remise de 3 jetons ?
2. 4 élèves s'assoient sur 6 chaises : combien de façons ?
3. Nombre de tirages simultanés de 3 boules dans une urne de 4 boules ? Nombre d'ordres possibles pour 4 boules tirées une à une sans remise ?
4. Un comité de 4 personnes est choisi parmi 6 hommes et 4 femmes. Combien de comités ? avec exactement 2 femmes ? avec au moins une femme ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II Probabilités

1 Expérience aléatoire et événements

Définition 13.5 : Vocabulaire

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat ne peut être prévu. Une *éventualité* (ou issue) est un résultat possible ; l'*univers* Ω est l'ensemble des éventualités ; un *événement* est une partie de Ω .

- événement élémentaire : une seule éventualité ; impossible : $\emptyset$; certain : Ω ;
- A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$;
- A et B sont *contraires* si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$; on note $B = \bar{A}$.

Exemple 13.2

On lance un dé équilibré : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{2, 4, 6\}$ (« nombre pair ») et $B = \{1, 3, 5\} = \bar{A}$.

2 Probabilité

Définition 13.6 : Probabilité

Pour $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, une probabilité p associe à chaque événement élémentaire un nombre $p(\{\omega_i\}) = p_i \in [0; 1]$ avec $p_1 + \dots + p_n = 1$. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des éventualités qui le composent ; (Ω, p) est un espace probabilisé fini. On a $p(\emptyset) = 0$, $p(\Omega) = 1$ et $0 \leq p(A) \leq 1$.

★ Théorème 13.2 : Équiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité (« au hasard », « dé équilibré », « boules indiscernables »), alors

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Propriété 13.4 : Règles de calcul

1. Si $A \cap B = \emptyset$: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
2. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
3. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
4. Si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$.

Application 13.3 : Tirage simultané

Une urne contient 4 boules blanches, 6 rouges, 8 noires et 2 jaunes. On tire simultanément 3 boules. Calculer la probabilité de : E « trois blanches » ; K « trois de même couleur » ; M « trois couleurs différentes » ; N « au moins une jaune ».

[illegible]

Application 13.4 : Trois modes de tirage

Un étudiant tire 3 questions parmi 12 (5 de géométrie, 4 d’algèbre, 3 d’analyse). A : « trois questions de géométrie » ; B : « une question de chaque matière » ; C : « au moins une de géométrie ». Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ pour un tirage **a)** simultané, **b)** successif sans remise, **c)** successif avec remise.

Application 13.5 : Pourcentages

Dans une classe, 54 % des élèves aiment le football (F), 32 % le basket (B), 15 % les deux. On choisit un élève au hasard. Calculer la probabilité qu'il aime le football mais pas le basket, l'un au moins des deux sports, un seul sport, aucun des deux.

3 Probabilité conditionnelle

Définition 13.7 : Probabilité conditionnelle

Si $p(A) \neq 0$, la probabilité de B sachant A est $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Propriété 13.5 : Formule des probabilités composées

$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $p_A(B) = p_B(A) = 0$.

Définition 13.8 : Partition

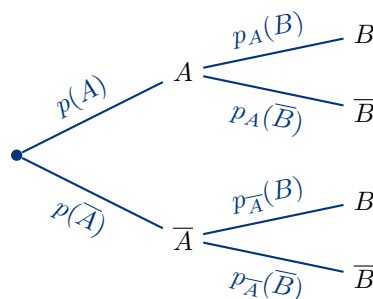
$A_1, \dots, A_n$ forment une *partition* de Ω si $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Par exemple A et $\bar{A}$.

★ Théorème 13.3 : Probabilités totales

Si $A_1, \dots, A_n$ est une partition de Ω , alors pour tout événement B :

$$p(B) = p(A_1) p_{A_1}(B) + \dots + p(A_n) p_{A_n}(B).$$

En particulier $p(B) = p(A) p_A(B) + p(\bar{A}) p_{\bar{A}}(B)$.



Application 13.6 : Conditionnelle et totales

1. Une urne contient 25 boules : 15 blanches et 10 noires. On tire deux boules sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir deux blanches, deux noires, deux couleurs différentes.
2. On lance une pièce équilibrée. Si on obtient pile, on tire une boule de U_1 (2 blanches, 3 rouges), sinon de U_2 (1 blanche, 4 rouges). Calculer $p(\text{blanche})$ puis la probabilité d'avoir eu face sachant que la boule est blanche.
3. Trois machines fournissent 20 %, 30 %, 50 % des lampes, avec 5 %, 4 %, 1 % de lampes défectueuses. Probabilité qu'une lampe soit défectueuse ? Qu'elle vienne de M_1 sachant qu'elle est défectueuse ?

4 Événements indépendants

Définition 13.9 : Indépendance

A et B sont *indépendants* si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ (si $p(A) \neq 0 : p_A(B) = p(B)$).

Remarque

Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont *jamaïs* indépendants : $p(A \cap B) = 0 \neq p(A)p(B)$.

Application 13.7 : Tester l'indépendance

Une urne contient 9 jetons : 3 blancs numérotés 2, 2, 1 ; 2 jaunes numérotés 1, 1 ; 4 noirs numérotés 1, 1, 1, 2. On tire 3 jetons simultanément. A : « même numéro » ; B : « couleurs deux à deux différentes ». Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$. Les événements sont-ils indépendants ? Calculer $p_B(A)$.

5 Épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

Définition 13.10 : Épreuves indépendantes, Bernoulli

Deux épreuves sont *indépendantes* si le résultat de l'une n'influence pas celui de l'autre (lancers successifs d'un dé, tirages avec remise). Une *épreuve de Bernoulli* n'a que deux issues : succès (probabilité p) et échec (probabilité $1 - p$).

Propriété 13.6 : Schéma de Bernoulli

Si l'on répète n fois, de façon indépendante, une épreuve où A a pour probabilité p , la probabilité que A se réalise *exactement* k fois ($0 \leq k \leq n$) est $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

Exemple 13.3

Trois lancers d'une pièce équilibrée, B : « deux piles » : $p(B) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ (les trois chemins PPF , PPF , FPP ont chacun la probabilité $\frac{1}{8}$).

6 Variables aléatoires

Définition 13.11 : Variable aléatoire

Une *variable aléatoire* X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Les événements $(X = x)$, $(X \leq x)$, ... sont les parties de Ω correspondantes. Déterminer la *loi* de X , c'est calculer $p(X = x_i)$ pour toutes les valeurs $x_1, \dots, x_n$; on a toujours $p_1 + \dots + p_n = 1$.

Définition 13.12 : Espérance, variance, écart-type

$E(X) = \sum x_i p_i$; $V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 p_i = E(X^2) - (E(X))^2$ avec $E(X^2) = \sum x_i^2 p_i$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple 13.4

Une urne contient 6 boules numérotées 0, 0, 0, 1, 1, 2; on en tire 2 simultanément et X est la somme. $\text{Card } \Omega =$

k	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$E(X) = \frac{4}{3} \text{ et } V(X) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}.$$

Application 13.9 : Un jeu répété

Une urne contient 4 boules blanches et 2 noires. Un joueur tire 2 boules simultanément et gagne s'il obtient deux boules de même couleur. Il joue 5 parties indépendantes ; X est le nombre de parties gagnées.

1. Montrer que X suit une loi binomiale ; préciser ses paramètres.
2. Calculer $p(X = 2)$, $p(X = 4)$, $p(X \leq 1)$ (valeurs exactes puis approchées).
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 13.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

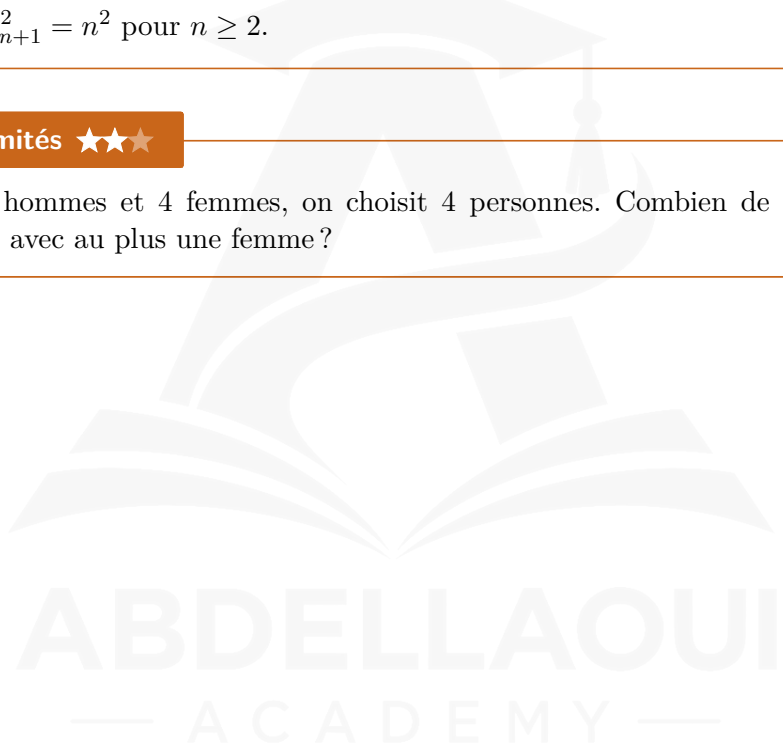
1. $\mathcal{A}_n^k = k! \mathcal{C}_n^k$.
2. $\mathcal{C}_8^3 = \mathcal{C}_8^5$.
3. Si A et B sont incompatibles et de probabilités non nulles, ils sont indépendants.
4. Pour tous événements, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
5. Si $X \sim B(10; 0,3)$ alors $E(X) = 3$.

Exercice 13.2 : Compter ★★★

1. Combien de nombres de trois chiffres *distincts* peut-on former ? Combien sont pairs ?
2. Déterminer n tel que $\mathcal{A}_n^2 = 56$, puis n tel que $\mathcal{C}_n^2 = 45$.
3. Montrer que $\mathcal{C}_n^2 + \mathcal{C}_{n+1}^2 = n^2$ pour $n \geq 2$.

Exercice 13.3 : Comités ★★★

Dans un groupe de 6 hommes et 4 femmes, on choisit 4 personnes. Combien de choix : au total ? avec exactement 2 femmes ? avec au plus une femme ?



Exercice 13.4 : Deux dés ★★★

On lance deux dés équilibrés. A : « la somme vaut 7 » ; B : « au moins un 6 ». Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$ et $p_B(A)$. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 13.5 : Conditionnelle ★★★

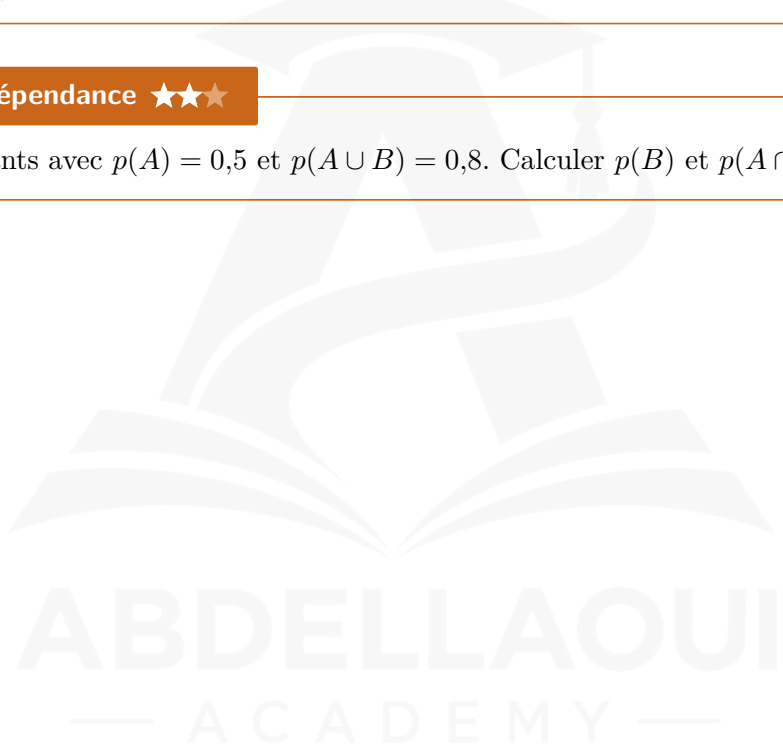
Dans un lycée, 60 % des élèves sont des filles ; 30 % des filles et 20 % des garçons pratiquent un sport. On choisit un élève au hasard. Calculer la probabilité qu'il pratique un sport, puis qu'il soit une fille sachant qu'il pratique un sport.

Exercice 13.6 : Deux urnes et un dé ★★★

On lance un dé : si on obtient 1 ou 2, on tire une boule dans U_1 (3 rouges, 2 vertes) ; sinon dans U_2 (1 rouge, 4 vertes). Calculer $p(R)$, puis la probabilité d'avoir tiré dans U_1 sachant que la boule est rouge.

Exercice 13.7 : Indépendance ★★★

A et B sont indépendants avec $p(A) = 0,5$ et $p(A \cup B) = 0,8$. Calculer $p(B)$ et $p(A \cap B)$.



Exercice 13.8 : Un jeu de dé ★★★

On lance un dé équilibré : on gagne 5 € avec un 6, 1 € avec un 4 ou un 5, et on perd 2 € sinon. Soit X le gain. Donner la loi de X , $E(X)$ et $V(X)$.

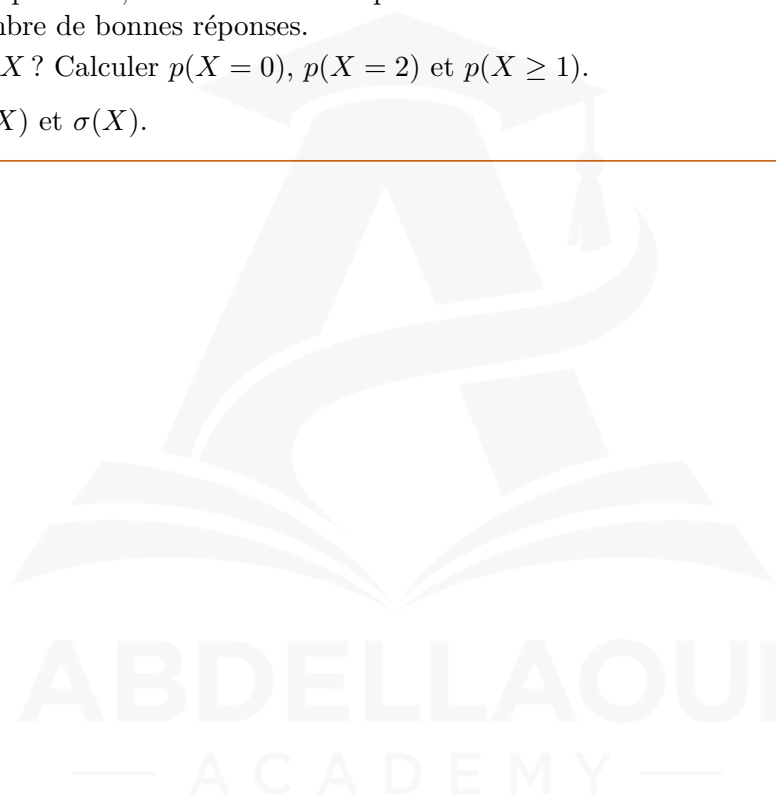
Exercice 13.9 : Maximum de deux dés ★★★

On lance deux dés équilibrés et X est le plus grand des deux résultats. Montrer que $p(X = k) = \frac{2k-1}{36}$ et calculer $E(X)$.

Exercice 13.10 : QCM au hasard ★★★

Un QCM comporte 5 questions, chacune avec 3 réponses dont une seule exacte. Un candidat répond au hasard ; X est son nombre de bonnes réponses.

1. Quelle est la loi de X ? Calculer $p(X = 0)$, $p(X = 2)$ et $p(X \geq 1)$.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.



Synthèse 13.1 : Un jeu d'urne répété

Une urne contient 3 boules blanches et 3 boules noires. Une partie consiste à tirer simultanément 2 boules ; on gagne si elles ont la même couleur.

1. Calculer la probabilité p de gagner une partie.
2. Sachant qu'on a gagné, quelle est la probabilité d'avoir tiré deux boules blanches ?
3. On joue 4 parties indépendantes ; X est le nombre de parties gagnées. Donner la loi de X , $E(X)$ et $V(X)$, puis $p(X \geq 2)$.
4. À chaque partie on reçoit 3 € si on gagne et on perd 2 € sinon. Soit Y le gain d'une partie : calculer $E(Y)$. Le jeu est-il équitable ?





Dénombrement et probabilités

2 BAC SE · 1 h 30 · Date :

/20

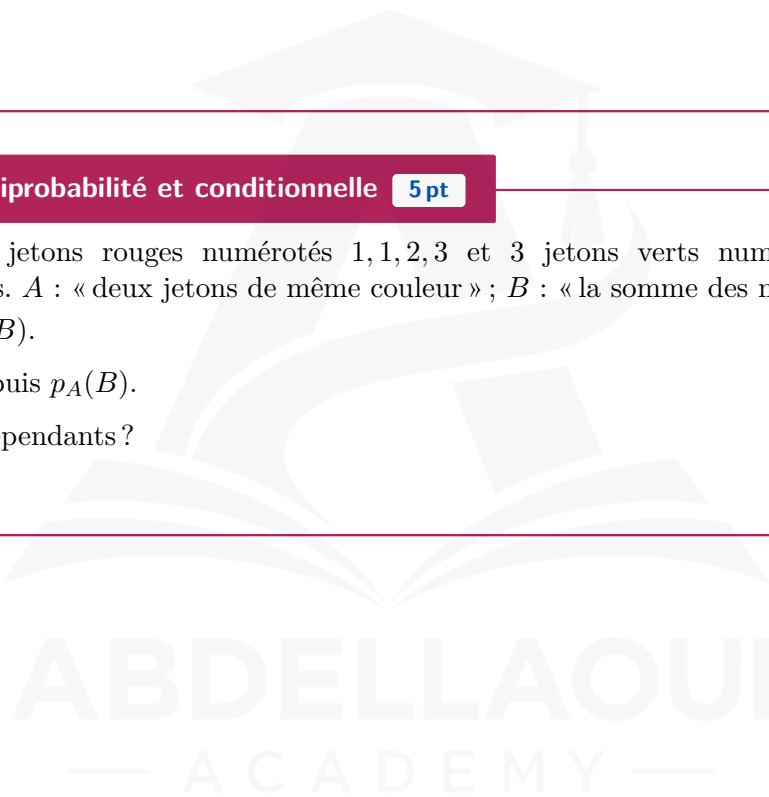
Exercice 13.1 : Dénombrement 5 pt

- Combien de codes de 4 chiffres peut-on former : avec répétition possible ? avec des chiffres deux à deux distincts ? 1,5 pt
- Dans un groupe de 8 élèves (5 filles et 3 garçons), on choisit 3 élèves. Combien de choix : au total ? avec 2 filles et 1 garçon ? avec au moins un garçon ? 2,5 pt
- Résoudre $C_n^2 = 21$. 1 pt

Exercice 13.2 : Équiprobabilité et conditionnelle 5 pt

Une urne contient 4 jetons rouges numérotés 1,1,2,3 et 3 jetons verts numérotés 1,2,2. On tire simultanément 2 jetons. A : « deux jetons de même couleur » ; B : « la somme des numéros vaut 3 ».

- Calculer $p(A)$ et $p(B)$. 2 pt
- Calculer $p(A \cap B)$ puis $p_A(B)$. 2 pt
- A et B sont-ils indépendants ? 1 pt



Exercice 13.3 : Probabilités totales 4 pt

Une usine a deux machines : M_1 produit 60 % des pièces avec 2 % de défauts, M_2 produit 40 % avec 5 % de défauts. On prend une pièce au hasard ; D : « la pièce est défectueuse ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré. 1 pt
2. Calculer $p(D)$. 1,5 pt
3. Sachant que la pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de M_1 ? 1,5 pt

Exercice 13.4 : Variable aléatoire et loi binomiale 6 pt

Une urne contient 5 boules numérotées 0, 1, 1, 2, 2. On tire simultanément 2 boules ; X est la somme des numéros.

1. Déterminer la loi de X . 2 pt
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. 2 pt
3. On répète 3 fois ce tirage (avec remise des boules). Soit Y le nombre de fois où $X = 3$. Donner la loi de Y et calculer $p(Y = 2)$ et $E(Y)$. 2 pt

