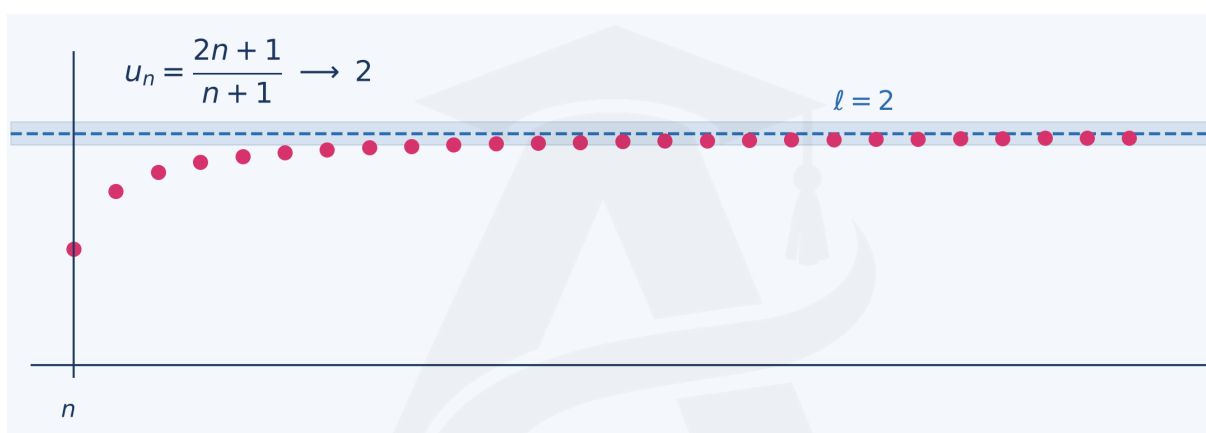


5

SUITES NUMÉRIQUES

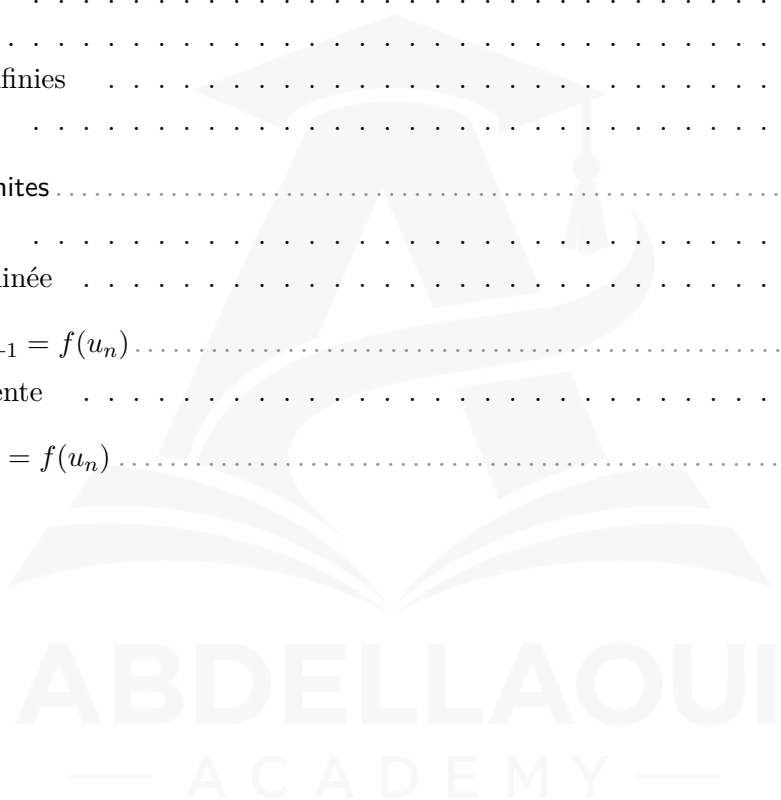


En quelques mots. Ce chapitre étudie le comportement d'une suite numérique lorsque n tend vers $+\infty$: limites finies et infinies, suites de référence, critères de convergence, opérations sur les limites, suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

Objectifs	• Rappeler suites arithmétiques et géométriques, monotonie, bornes • Déterminer la limite d'une suite (références, opérations, q^n) • Utiliser les critères : encadrement, comparaison, suite monotone bornée • Étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et déterminer sa limite • Étudier la suite $v_n = f(u_n)$
Prérequis	• Suites arithmétiques et géométriques (1 BAC) • Limites de fonctions, continuité, raisonnement par récurrence
Instruments pédagogiques	• Activités de découverte • Applications guidées • Exercices corrigés par thème • Synthèse et test
Volume horaire	16 heures (indicatif)
Évaluation	Test de fin de chapitre (1 h 30)

Au sommaire de ce chapitre

I	Rappels sur les suites	3
	Suites arithmétiques et géométriques	1, p. 3
	Monotonie et bornes	2, p. 4
II	Limite d'une suite	4
	Limite finie, limite infinie	1, p. 4
	Suites de référence	2, p. 5
	Propriétés	3, p. 6
	La suite géométrique q^n	4, p. 6
	Suites convergentes, suites divergentes	5, p. 7
III	Critères de convergence	7
	Théorème d'encadrement	1, p. 7
	Critère $ u_n - \ell \leq \alpha v_n$	2, p. 8
	Comparaison et limites infinies	3, p. 9
	Suites monotones bornées	4, p. 10
IV	Opérations sur les limites	11
	Somme, produit, quotient	1, p. 11
	Lever une forme indéterminée	2, p. 12
V	Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$	13
	Limite d'une suite récurrente	1, p. 13
VI	Suites de la forme $v_n = f(u_n)$	14



I Rappels sur les suites

1 Suites arithmétiques et géométriques

Activités

Activité 5.1 : Deux suites classiques

1. Soit $u_n = 5n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_0 et u_1 , montrer que (u_n) est arithmétique, puis calculer $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.
2. Soit $v_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer v_0 et v_1 , montrer que (v_n) est géométrique, puis calculer $S_2 = v_1 + v_2 + \dots + v_{10}$.

Propriété 5.1 : Suite arithmétique

(u_n) est *arithmétique de raison r* si $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout n . Alors

$$u_n = u_p + (n - p)r \quad \text{et} \quad u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Propriété 5.2 : Suite géométrique

(u_n) est *géométrique de raison q* si $u_{n+1} = qu_n$ pour tout n . Alors

$$u_n = u_p q^{n-p} \quad \text{et, si } q \neq 1, \quad u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Application 5.1 : Suite auxiliaire arithmétique

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$, et $v_n = \frac{2}{1 - u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2 .
2. Montrer que (v_n) est arithmétique ; préciser sa raison.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

2 Monotonie et bornes

Définition 5.1 : Suite monotone, majorée, minorée

Soit (u_n) une suite numérique.

- *Croissante* si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ; *décroissante* si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n (strictement si les inégalités sont strictes).
- *Majorée* s'il existe M avec $u_n \leq M$ pour tout n ; *minorée* s'il existe m avec $u_n \geq m$; *bornée* si elle est majorée et minorée.

Remarque : Méthodes

Pour le sens de variation : signe de $u_{n+1} - u_n$, ou, pour $u_n > 0$, comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Pour une borne : inégalités directes ou raisonnement par récurrence.

II Limite d'une suite

1 Limite finie, limite infinie

Activités

Activité 5.2 : Que deviennent les termes ?

Soit $u_n = \frac{4n+2}{n}$ pour $n \geq 1$.

1. Calculer $u_1, u_2, u_{10}, u_{100}, u_{1000}$.
2. Que conjecture-t-on sur le comportement de u_n quand n devient grand ? Le justifier par une écriture de u_n .

Définition 5.2 : Limite d'une suite

- $\ell \in \mathbb{R}$ est la *limite* de (u_n) si tout intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si tout intervalle $]A; +\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) contient tous les termes à partir d'un certain rang.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si tout intervalle $]-\infty; B[$ ($B \in \mathbb{R}$) contient tous les termes à partir d'un certain rang.

Propriété 5.3 : Unicité

Si (u_n) admet une limite (finie ou infinie), cette limite est unique.

2 Suites de référence

Propriété 5.4 : Limites de référence

Pour tout entier $p \geq 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0.$$

Application 5.2 : Limites de référence

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2020}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{50}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^7$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^7}$.

3 Propriétés

Propriété 5.5 : Limite finie et écart

Pour $\ell \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Propriété 5.6 : Opposé

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Application 5.3 : Utiliser $u_n - \ell \rightarrow 0$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+1}{n} = 5$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3+\sqrt{n}}{3\sqrt{n}} = \frac{1}{3}$ (suites définies pour $n \geq 1$).

4 La suite géométrique q^n

Propriété 5.7 : Limite de q^n

Soit $q \in \mathbb{R}$.

1. Si $q > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
2. Si $q = 1$: $q^n = 1$ pour tout n , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
3. Si $-1 < q < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
4. Si $q \leq -1$: la suite (q^n) n'a pas de limite.

Exemple 5.1 Quatre cas

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$; $((-5)^n)$ n'a pas de limite car $-5 \leq -1$.

Application 5.4 : Limite de q^n

Déterminer la limite de $\left(\frac{7}{4}\right)^n$, de $\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1}\right)^n$, de $(0,2020)^n$, de $(\pi-2)^n$ et de $(\sqrt{2}-2)^n$.

5 Suites convergentes, suites divergentes

Définition 5.3 : Convergence

Une suite est *convergente* si elle admet une limite finie ; elle est *divergente* sinon (limite infinie, ou pas de limite).

Exemple 5.2 Convergentes ou divergentes

Convergentes : $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{3n+1}{n}$ (limites 0, 0, 3). Divergentes : n^4 ($+\infty$), -7^n ($-\infty$), $(-1)^n$ (pas de limite).

Application 5.5 : Étudier la convergence

Étudier la convergence de $u_n = n^9$, $v_n = -n^{11}$, $w_n = \frac{1}{4}$, $x_n = (-9)^n$, $y_n = 1 + \left(\frac{1}{13}\right)^n$, $t_n = 5^n$.

III Critères de convergence

1 Théorème d'encadrement

Activités

Activité 5.3 : Une suite prise en sandwich

Soit, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{2}{n^2 + 2018}$, $v_n = \frac{2}{n^2 + 2019}$ et $w_n = \frac{2}{n^2 + 2020}$.

- Montrer que $w_n \leq v_n \leq u_n$ pour tout $n \geq 1$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

★ Théorème 5.1 : Théorème d'encadrement

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites. Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Exemple 5.3 Encadrement

Si $5 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 5 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 2017$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 5$, alors (u_n) converge vers 5.

Application 5.6 : Encadrer

Soit $u_n = \frac{5n+6}{n+1}$. Montrer que $5 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 5 + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2 Critère $|u_n - \ell| \leq \alpha v_n$

Activité 5.4 : Majorer l'écart

Soit $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$. (1) Montrer que $|u_n - 3| \leq \frac{2}{n}$ pour $n \geq 1$. (2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n}$. (3) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

★ Théorème 5.2 : Critère de convergence

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et (v_n) une suite. Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leq \alpha v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Exemple 5.4 Un critère en pratique

Pour $u_n = \frac{4\sqrt{n} - 7}{1 + \sqrt{n}}$: $u_n - 4 = \frac{-11}{1 + \sqrt{n}}$ donc $|u_n - 4| = \frac{11}{1 + \sqrt{n}} \leq \frac{11}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

Application 5.7 : Majorer $|u_n - \ell|$

Soit $u_n = \frac{3 - 5n^3}{1 + n^3}$. Montrer que $|u_n + 5| \leq \frac{8}{n^3}$ pour $n \geq 1$, puis déduire la limite de (u_n) .

3 Comparaison et limites infinies

Activité 5.5 : Minorer pour conclure

Soit $u_n = 2^n - \frac{n}{2020}$. (1) Montrer par récurrence que $2^n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (2) En déduire $u_n \geq \frac{2019}{2020}n$. (3) Conclure sur $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

★ Théorème 5.3 : Comparaison

Soit $\alpha > 0$. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq \alpha v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. De même, si $u_n \leq \alpha v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 5.5 Comparaison

Soit $u_n = \frac{4}{7}n^3 + \frac{4^n}{n-5}$ pour $n \geq 6$. Comme $\frac{4^n}{n-5} > 0$, $u_n \geq \frac{4}{7}n^3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Application 5.8 : Divergence par comparaison

Soit $u_n = 3\sqrt{n} + \frac{2n}{3^n + 1}$. Montrer que $u_n \geq 3\sqrt{n}$ pour tout n et en déduire que (u_n) est divergente.

4 Suites monotones bornées

★ Théorème 5.4 : Suites monotones

- Toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.
- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$; une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Remarque : Attention

Ce théorème assure l'existence de la limite, pas sa valeur : si (u_n) est croissante et majorée par M , sa limite est $\leq M$, mais pas nécessairement égale à M .

Exemple 5.6 Croissante et majorée

Pour $u_n = \frac{n+2}{n+3}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{n+4} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{1}{(n+3)(n+4)} > 0$: croissante. Et $u_n = 1 - \frac{1}{n+3} < 1$: majorée par 1. Donc (u_n) converge.

Application 5.9 : Suite récurrente monotone bornée

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Montrer par récurrence que $u_n < 2$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge.

IV Opérations sur les limites

1 Somme, produit, quotient

Remarque : Formes indéterminées

Dans les tableaux, « F.I. » désigne une forme indéterminée : le résultat dépend des suites et il faut transformer l'écriture. Pour une différence : $u_n - v_n = u_n + (-v_n)$.

Propriété 5.8 : Limite d'une somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Le cas $(+\infty) + (-\infty)$ est une forme indéterminée.

Propriété 5.9 : Limite d'un produit

Le signe du résultat s'obtient par la règle des signes.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Le cas $0 \times (\pm\infty)$ est une forme indéterminée.

Propriété 5.10 : Limite d'un quotient

Cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	F.I.

Cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ avec v_n de signe constant à partir d'un certain rang : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \neq 0$ ou $\pm\infty$, alors $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers $\pm\infty$ (règle des signes) ; si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, c'est une F.I.

Exemple 5.7 Opérations

$\sqrt{n} + n^2 \rightarrow +\infty$ (somme). $\sqrt{n} \left(-5 + \frac{1}{n^2} \right) \rightarrow -\infty$ car $-5 + \frac{1}{n^2} \rightarrow -5$. $\frac{n - 2020}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1} \rightarrow -\infty$ car le numérateur $\rightarrow +\infty$ et le dénominateur $\rightarrow -1$.

2 Lever une forme indéterminée

Remarque : Trois techniques

- Terme dominant** : pour un polynôme ou une fraction rationnelle, on factorise le terme de plus haut degré ; $\frac{an^p + \dots}{bn^q + \dots}$ se comporte comme $\frac{a n^p}{b n^q}$.
- Quantité conjuguée** pour les différences de racines : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.
- Puissances** : on factorise la plus grande base, $a^n - b^n = a^n (1 - (b/a)^n)$ si $a > b > 0$.

Application 5.10 : Formes indéterminées

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 4^n}{4^n + 3^n}$.

V Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Limite d'une suite récurrente

★ Théorème 5.5 : Limite et équation $f(x) = x$

Soit (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue sur un intervalle fermé I avec $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$. Si (u_n) converge, sa limite ℓ appartient à I et vérifie $f(\ell) = \ell$.

Remarque : Pourquoi ?

Si $u_n \rightarrow \ell$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ alors, par continuité de f en ℓ , $u_{n+1} \rightarrow f(\ell)$. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$. Attention : cette équation peut avoir plusieurs solutions ; il faut retenir celle qui est dans l'intervalle où se trouve la suite.

Remarque : Méthode en quatre temps

1. Trouver un intervalle I stable ($f(I) \subset I$) contenant u_0 ; en déduire $u_n \in I$ par récurrence.
2. Étudier le sens de variation de (u_n) (signe de $u_{n+1} - u_n$, ou monotonie de f).
3. Conclure à la convergence (suite monotone bornée).
4. Résoudre $f(x) = x$ dans I : on obtient ℓ .

Exemple 5.8 $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 4}{u_n + 8}$

Soit $f(x) = \frac{4x - 4}{x + 8}$ sur $I = [-2; -1]$. f est rationnelle, donc continue sur I , et $f'(x) = \frac{36}{(x + 8)^2} > 0$: f est strictement croissante. $f(I) = [f(-2); f(-1)] = \left[-2; -\frac{8}{7}\right] \subset I$ et $u_0 = -1 \in I$.

Récurrence : $u_0 \in I$; si $u_n \in I$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) \subset I$. Donc $-2 \leq u_n \leq -1$ pour tout n .

Variations : $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 4 - u_n(u_n + 8)}{u_n + 8} = \frac{-(u_n + 2)^2}{u_n + 8} \leq 0$ car $u_n + 8 > 0$: (u_n) est décroissante, minorée par -2 , donc convergente.

Limite : $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell \iff 4\ell - 4 = \ell^2 + 8\ell \iff (\ell + 2)^2 = 0 \iff \ell = -2$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$.

Application 5.11 : Suite $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrer que $0 < u_n < 3$ pour tout n , puis que (u_n) est strictement croissante et convergente.
2. Soit $f(x) = \sqrt{x+6}$ et $I = [0; 3]$. Montrer que $f(I) \subset I$. Résoudre $f(x) = x$ dans I et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

VI Suites de la forme $v_n = f(u_n)$

Activités

Activité 5.6 : Composer une suite par une fonction

Soit $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$, $u_n = \frac{1}{n^3}$ pour $n \geq 1$ et $v_n = f(u_n)$.

- Exprimer v_n en fonction de n .
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Quelle relation voit-on avec f ?

★ Théorème 5.6 : Limite de $f(u_n)$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Exemple 5.9 Avec $\cos n$

Soit $f(x) = \frac{5x-6}{x+3}$, $u_n = \frac{\cos n}{n}$ ($n \geq 1$) et $v_n = f(u_n) = \frac{5 \cos n - 6n}{\cos n + 3n}$. De $-1 \leq \cos n \leq 1$: $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (encadrement). Or f est continue en 0 (rationnelle, $0 \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(0) = -2$.

Application 5.12 : Utiliser le théorème

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + (\frac{1}{2})^n}{3 - (\frac{1}{2})^n}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Exercice 5.1 : Vrai ou faux ? ★★★

Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. Toute suite bornée est convergente.
2. Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors (u_n) est croissante.
4. La suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1}$ est convergente.
5. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Exercice 5.2 : Arithmétique et géométrie ★★★

1. (u_n) est arithmétique avec $u_3 = 7$ et $u_8 = -3$. Déterminer r , u_0 , puis $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.
2. (v_n) est géométrique avec $v_2 = 12$ et $v_5 = -96$. Déterminer q , v_0 , puis $v_0 + v_1 + \dots + v_6$.

Exercice 5.3 : Calculs de limites ★★★

Déterminer la limite de (u_n) :

1. $u_n = (n-1) \left(4 + \frac{3}{n^3}\right)$
2. $u_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2}$
3. $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n + 1}$
4. $u_n = 3^n - 2^n$
5. $u_n = \frac{2^n - 4^n}{4^n + 3^n}$
6. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

Exercice 5.4 : Critères de convergence ★★★

1. Soit $u_n = \frac{n + \sin n}{n}$ ($n \geq 1$). Montrer que $1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
2. Soit $v_n = \frac{2n + (-1)^n}{n + 1}$ ($n \geq 1$). Montrer que $|v_n - 2| \leq \frac{3}{n}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
3. Soit $w_n = n + \sin n$. Montrer que $w_n \geq \frac{n}{2}$ pour $n \geq 2$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

Exercice 5.5 : Monotone et bornée ★★★

Soit $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 2, puis conclure.

Exercice 5.6 : Une récurrence affine ★★★

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. Montrer que $u_n < 3$ pour tout n , puis que (u_n) est croissante.
2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Vérifier que $u_n = 3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et retrouver la limite.

Exercice 5.7 : Choisir la bonne solution ★★★

Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$. Soit $f(x) = 2x - x^2$ et $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

1. Montrer que $f(I) \subset I$ et que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ pour tout n .
2. Montrer que (u_n) est croissante, puis qu'elle converge.
3. Résoudre $f(x) = x$ et déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 5.8 : Limite de $f(u_n)$ ★★★

Déterminer les limites de :

1. $v_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$ ($n \geq 1$);
2. $w_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$ avec $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Synthèse 5.1 : Étude complète d'une suite récurrente

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$. On pose $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$ et $I = [1; 3]$.

1. Montrer que f est croissante sur I et que $f(I) \subset I$. En déduire que $1 \leq u_n \leq 3$ pour tout n .

2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$ et en déduire que (u_n) est décroissante, puis convergente.

3. Résoudre $f(x) = x$ et en déduire la limite de (u_n) .

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ (on admet $u_n \neq 1$). Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$; exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n ; retrouver la limite.

5. Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.



Suites numériques

2 BAC SE · 1 h 30 · Date :

/20

Exercice 5.1 : Vrai ou faux 4 pt

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant brièvement.

4 pt

1. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
2. Si (u_n) est décroissante, alors elle converge.
3. Si $|u_n - 2| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.
4. Si $u_n \geq n$ pour tout n , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 5.2 : Limites 5 pt

Déterminer la limite de chacune des suites, en justifiant.

5 pt

1. $a_n = \frac{3n^2 - n + 2}{n^2 + 1}$
2. $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $c_n = \frac{5^n - 3^n}{5^n + 2^n}$
4. $d_n = n - \sqrt{n}$

1,25 pt

1,25 pt

1,25 pt

1,25 pt

Exercice 5.3 : Suite récurrente 6 pt

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Montrer par récurrence que $0 < u_n < 3$.
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$ et en déduire que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Déterminer sa limite.

1,5 pt

2 pt

1 pt

1,5 pt

Exercice 5.4 : Critères de convergence 5 pt

1. Soit $a_n = \frac{3n + 2 \cos n}{n + 1}$ ($n \geq 1$). Montrer que $|a_n - 3| \leq \frac{5}{n}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

2,5 pt

2. Soit $b_n = n^2 + (-1)^n n$. Montrer que $b_n \geq \frac{n^2}{2}$ pour $n \geq 2$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

2,5 pt

