

Consignes Le devoir doit impérativement être réalisé et remis à la date indiquée. Il sera rédigé sur des feuilles doubles au format A4. Chaque réponse doit être justifiée, et la rédaction ainsi que la présentation doivent être soignées.

Exercice 1 : Questions indépendantes

- 1 Montrer que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x-2}; & x \neq 2 \\ f(2) = \frac{5}{12} \end{cases}$ est continue en 2.
- 2 Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$.
- 3 Montrer que : $\frac{\sqrt[6]{81} \times 2^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[6]{36}}{2^{\frac{2}{3}} \times 3} = 1$.
- 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt[3]{x^5} + 2 = 0$.
- 5 Étudier la dérivabilité de la fonction f et calculer la fonction dérivée dans chacun des cas suivants :

a $f(x) = (x^3 + x)^8$

b $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

c $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x}$

Exercice 2

- I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
- 1 Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donner le tableau de variations de la fonction g .
 - 2 Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 1], g(x) < 0)$.
 - 3 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que : $1 < \alpha < 2$.
 - 4 Donner une approximation du nombre α sur $]1; 2[$ à la précision 0,25.
 - 5 En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (résumer le signe de g dans un tableau).
- II) Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.
- 1 Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - 2 Montrer que : $\forall x \in] -1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.
 - 3 Donner le tableau de variations de la fonction f sur $] -1; +\infty[$.
 - 4 Montrer que : $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$.

- 1 Montrer que : $D_f = [1; +\infty[$.
- 2 Montrer que : $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) > 0$.
- 3 Déterminer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[1; +\infty[$, puis en déduire que f est décroissante sur $[1; +\infty[$.
- 4 Montrer que : $\forall x \in [1; +\infty[, \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$.

Exercice 3 (suite)

- 5 a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'il faut déterminer.
- b Calculer $f(4)$, en déduire que f^{-1} est dérivable en $2 - \sqrt{3}$ et déterminer $(f^{-1})'(2 - \sqrt{3})$.
- 6 Montrer que : $\forall x \in J, f^{-1}(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}$.