

Consignes Le devoir doit impérativement être réalisé et remis à la date indiquée. Il sera rédigé sur des feuilles doubles au format A4. Chaque réponse doit être justifiée, et la rédaction ainsi que la présentation doivent être soignées.

Exercice 1 : 8 points + 3 points

Partie I : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}$.

$(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

- 1 a Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (1,5 pt)
- b Déterminer les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$. (1 pt)
- 2 a Montrer que : $(\forall x \in D_f), f'(x) = \frac{\sqrt{2}(x+2)}{2\sqrt{1+x}^3}$. (0,5 pt)
- b Étudier le signe de f' , puis donner le tableau de variations de f sur D_f et déterminer $f([0;1])$. (0,75 pt)
- 3 a Montrer que : $(\forall x \in D_f), f(x) - x = \frac{x(1-x)}{(\sqrt{1+x})(\sqrt{2} + \sqrt{1+x})}$. (0,5 pt)
- b En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite $(\Delta) : y = x$. (0,5 pt)
- 4 Déterminer l'équation de la droite (T) , tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x = 0$. (0,5 pt)
- 5 Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$, puis en déduire la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ sur $]1; +\infty[$. (0,75 pt)
- 6 Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prend $\sqrt{2} \approx 1,4$. (1 pt)
- 7 a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (0,5 pt)
- b Tracer la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} dans le même repère. (0,5 pt)

Partie II : Considérons la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

- 1 Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_n < 1$. (1 pt)
- 2 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{U_n}{U_{n+1}} < 1$. (1 pt)
- 3 En déduire que (U_n) est convergente, puis calculer sa limite. (1 pt)

Exercice 2 : 6 points

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite numérique $(U_n)_{n \geq 2}$ définie par : $U_2 = \frac{8}{25}$ et $U_{n+1} = \frac{7}{20}U_n + \frac{1}{4}$, pour tout $n \geq 2$.

- 1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \geq 2), U_n \leq \frac{5}{13}$. (1 pt)
- 2 Étudier la monotonie de $(U_n)_{n \geq 2}$, puis en déduire qu'elle est convergente. (1,5 pt)
- 3 Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = U_n - \frac{5}{13}$, pour tout $n \geq 2$.
 - a Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{20}$, puis calculer V_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$. (1,5 pt)
 - b En déduire U_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$, puis calculer la limite de (U_n) . (1 pt)
- 4 Pour tout $n \geq 2$, on pose : $S_n = U_2 + U_3 + \dots + U_n$. Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 2}$. (1 pt)

Exercice 3 : 3 points

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 7}{(x - 2)^2}$ définie sur $I = [3; +\infty[$.

- ❶ Déterminer a , b et c de façon que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 2)^2}$. (1 pt)
- ❷ Calculer les primitives de f sur $I = [3; +\infty[$. (1 pt)
- ❸ En déduire la primitive F de f sachant que $F(3) = \frac{11}{2}$. (1 pt)