

Consignes Le devoir doit impérativement être réalisé et remis à la date indiquée. Il sera rédigé sur des feuilles doubles au format A4. Chaque réponse doit être justifiée, et la rédaction ainsi que la présentation doivent être soignées.

Exercice 1 : 8 points

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln(x)$.

1 Montrer que $g'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$, puis en déduire que la fonction g est croissante sur $]0; +\infty[$. (1 pt)

2 Calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$. (0,5 pt)

Partie B : Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et donner l'interprétation géométrique de ce résultat. (0,5 pt)

b Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ (poser $t = \sqrt{x}$). (1 pt)

c Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$. (0,5 pt)

2 Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ pour tout x de $]0; +\infty[$, puis en déduire les variations de la fonction f . (1 pt)

3 Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite $(D) : y = x$. (0,5 pt)

4 Construire la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (1 pt)

Partie C : Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = e$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), U_{n+1} = f(U_n)$.

1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 1 \leq U_n \leq e$. (0,5 pt)

2 Montrer que la suite (U_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente. (1 pt)

3 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,5 pt)

Exercice 2 : 6 points

Soient A, B et C trois points du plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'affixes respectives : $z_A = 1 + 3i$, $z_B = 5 + 3i$ et $z_C = \sqrt{3} + i$.

1 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $z_A \times z_B$ et $\frac{z_A}{z_B}$. (0,5 pt)

2 Calculer la distance AB et le module $|z_A \times z_C|$. (0,5 pt)

3 Déterminer la forme trigonométrique de z_C . (1 pt)

4 Soit I le milieu du segment $[AB]$.

a Déterminer $z_I = \text{aff}(I)$, l'affixe du point I . (0,5 pt)

b Montrer que : $z_I = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$. (0,5 pt)

c En déduire la forme trigonométrique des nombres : $z_C \times z_I$, z_C^4 et $-z_I$. (1 pt)

5 Soient D et E deux points du plan complexe d'affixes respectives : $z_D = 5 - i$ et $z_E = 2 + 2i$.

a Montrer que le triangle ABD est rectangle en B . (1 pt)

b Montrer que les points A, D et E sont alignés. (1 pt)

Exercice 3 : 6 points

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$. (1 pt)

2 Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a Écrire a sous forme algébrique. (0,5 pt)

b Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$. (0,5 pt)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et $\bar{a}$.

3 Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport. (0,5 pt)

4 Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a Écrire z' en fonction de z et a . (0,5 pt)

b Soit d l'affixe du point D , image de C par la rotation R . Montrer que $d = a + 1$. (0,5 pt)

c Soit I le point d'affixe 1. Montrer que $ADIO$ est un losange. (0,5 pt)

5 a Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$, puis en déduire un argument du nombre $d - b$. (1 pt)

b Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique. (0,5 pt)

c En déduire une mesure de l'angle $(\widehat{BI}, \widehat{BD})$. (0,5 pt)