

PROFESSEUR
ABDELLAOUI Said

CHAPITRE
Complexes et exponentielle

À REMETTRE LE
.../.../2027

Consignes Le devoir doit impérativement être réalisé et remis à la date indiquée. Il sera rédigé sur des feuilles doubles au format A4. Chaque réponse doit être justifiée, et la rédaction ainsi que la présentation doivent être soignées.

Exercice 1

- 1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.
- 2 On pose $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
 - a Écrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel.
 - b Soit le nombre complexe $b = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$. Prouver que $b^2 = a$.
- 3 On considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c tels que $c = 1$.
La rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe z' .
 - a Vérifier que $z' = bz$.
 - b Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R .
- 4
 - a Montrer que $|a - b| = |b - c|$ et en déduire la nature du triangle ABC .
 - b Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
- 5 Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ et D l'image de A par T .
 - a Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$.
 - b Montrer que $\frac{b^2 + 1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O , B et D sont alignés.

Exercice 2

I- Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

- 1 Étudier les variations de la fonction g .
- 2 En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}), g(x) \geq 0$.

II- Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.

- 1 Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, et interpréter géométriquement ce résultat.
- 2 Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter géométriquement ces résultats.
- 3
 - a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = 2g(x)e^x$.
 - b En déduire que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - c Calculer $f'(0)$ et interpréter géométriquement ce résultat.
 - d Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 3 : 6 points

Soit (E) l'équation différentielle $2y' + y = 2$.

- 1 Résoudre l'équation (E) , puis déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.

Soit (F) l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$.

- 1 Résoudre l'équation (F) , puis déterminer la solution g de (F) qui vérifie $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$.