

MATHÉMATIQUES

Notions de logique

Séries d'exercices

1^{re} année du Baccalauréat**Sciences Expérimentales**

Exercices de logique traduits, classés par notion et organisés en séries progressives : propositions et connecteurs, quantificateurs, raisonnements (déduction, équivalence, contraposée, absurde, disjonction des cas, récurrence) et problèmes de synthèse. Chaque exercice comporte un espace de correction.

Professeur

ABDELLAOUI Said

Établissement :



Informations générales

Titre	Notions de logique – Séries d'exercices
Matière	Mathématiques
Niveau	1 ^{re} année du Baccalauréat
Classe / filière	1 ^{re} Bac – Sciences Expérimentales
Professeur	ABDELLAOUI Said
Établissement	
Année scolaire	2026 – 2027
Version	1.0

Organisation du polycopié

Le polycopié est organisé en **parties**, **chapitres** et **séries**. Chaque chapitre s'ouvre sur la liste des notions travaillées et un mini-sommaire de ses séries. Les exercices sont numérotés de façon continue du début à la fin du document, ce qui permet de les désigner sans ambiguïté en classe (« exercice n° 37 »).

Chaque exercice comporte deux parties :

- la partie supérieure contient l'**énoncé** complet et les questions ;
- la partie inférieure, intitulée **Correction**, est réservée à la rédaction de l'élève (lignes pointillées).

Notations et conventions

$\bar{p}$	négation de la proposition p (aussi notée « non p »)
p et q , p ou q	conjonction, disjonction
$p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$	implication, équivalence
$\forall, \exists, \exists!$	« pour tout », « il existe », « il existe un unique »
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*$	$[0; +\infty[$ et $]0; +\infty[$
$\llbracket a; b \rrbracket$	ensemble des entiers k tels que $a \leq k \leq b$
$E(x)$	partie entière du réel x
$\sum_{k=1}^n a_k, \prod_{k=1}^n a_k$	somme et produit des termes $a_1, \dots, a_n$

Mentions de contrôle

Les énoncés ont été traduits et recomposés fidèlement à partir des documents sources. Lorsqu'un passage était illisible ou ambigu, il est signalé dans l'énoncé par la mention [À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE]. Les corrections typographiques manifestes (coquilles du document source) sont signalées par une courte note en petits caractères.

Sommaire

Informations générales	1
I Logique des propositions et quantificateurs	3
Chapitre 1 Propositions, connecteurs et lois logiques.	3
Série 1 – Valeur de vérité d’une proposition	3
Série 2 – Négation et lois logiques	6
Chapitre 2 Fonctions propositionnelles et quantificateurs	14
Série 1 – Écriture symbolique et négation	14
Série 2 – Valeur de vérité des propositions quantifiées.	21
Série 3 – Approfondissement sur les quantificateurs.	37
II Raisonnements mathématiques	40
Chapitre 3 Raisonnement déductif et raisonnement par équivalence	40
Série 1 – Raisonnement déductif	40
Série 2 – Raisonnement par équivalences successives	57
Série 3 – Inégalités classiques et moyennes	68
Chapitre 4 Raisonnement par contraposée et raisonnement par l’absurde	70
Série 1 – Raisonnement par contraposée	70
Série 2 – Raisonnement par l’absurde	78
Chapitre 5 Raisonnement par disjonction des cas	91
Série 1 – Démontrer par disjonction des cas	91
Série 2 – Valeurs absolues : équations, inéquations, systèmes	95
Chapitre 6 Applications : équations, inéquations et systèmes	99
Série 1 – Équations et inéquations irrationnelles	99
Série 2 – Changement de variable	102
Série 3 – Systèmes et équations à paramètre	106
Chapitre 7 Raisonnement par récurrence	109
Série 1 – Sommes et produits.	109
Série 2 – Inégalités démontrées par récurrence.	120
Série 3 – Divisibilité	129
Série 4 – Fonctions et suites définies par récurrence	134
III Problèmes de synthèse	138
Chapitre 8 Choisir le raisonnement adapté – Problèmes	138
Série 1 – Choisir le type de raisonnement convenable	138
Série 2 – Problèmes.	143

PARTIE I

Logique des propositions et quantificateurs

Propositions, connecteurs logiques, lois logiques, quantificateurs et négation.

1

CHAPITRE

Propositions, connecteurs et lois logiques

Notions travaillées

- Valeur de vérité d'une proposition
- Négation, conjonction, disjonction
- Implication et équivalence ; condition nécessaire, condition suffisante
- Tables de vérité et lois logiques (lois de Morgan, contraposée, distributivité)

Dans ce chapitre

Série 1 – Valeur de vérité d'une proposition. 3

Série 2 – Négation et lois logiques 6

Série 1 Valeur de vérité d'une proposition

Exercice n° 1

Soient p , q et r trois propositions telles que p est vraie, q et r sont fausses. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) $(p \text{ et } q) \Rightarrow r$

3) $(p \Rightarrow \bar{q}) \text{ et } r$

2) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

4) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \bar{r}$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 2

Donner la négation de chacune des propositions suivantes en précisant sa valeur de vérité :

$$p : \frac{25}{4} \neq \frac{5}{2}$$

$$r : \pi \in \mathbb{Q}$$

$$q : \sqrt{17} < \sqrt{5} + \sqrt{12}$$

$$s : \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 3

Déterminer, parmi les propositions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Justifier.

$$a : -3 \notin \mathbb{N} \text{ et } \sqrt{16} + \sqrt{25} = \sqrt{16 + 25}$$

$$b : \sqrt{5} > 2 \text{ ou } (-\sqrt{3})^2 = -3$$

$$c : \left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 = \frac{6}{5} \Rightarrow \sqrt{\frac{6}{5}} \in \mathbb{Q}$$

$$d : \sqrt{3} > \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{3} \neq \sqrt{2} + 1$$

$$e : (a \in \mathbb{N}) \quad a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

$$f : (a \in \mathbb{Z}) \quad a^2 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \in \mathbb{N}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 4

Soient p, q et r trois propositions. On considère la proposition

$$A : (p \text{ et } q) \Rightarrow r.$$

- 1) Donner la négation de A .
- 2) Déterminer la valeur de vérité de A dans chacun des cas suivants :
 - a) p est fausse ;
 - b) r est vraie.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 5

Soient p et q deux propositions. On considère la proposition

$$A : (p \Rightarrow q) \Rightarrow \bar{q}.$$

- 1) Donner la négation de A .
- 2) Déterminer la valeur de vérité de A dans chacun des cas suivants :
 - a) q est vraie ;
 - b) q est fausse.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 6*Condition nécessaire, condition suffisante*

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 1 = 0$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- 1) Pour que $x^2 - 1 = 0$, il faut que $x = 1$.
- 2) Pour que $x^2 - 1 = 0$, il faut et il suffit que $x = 1$.
- 3) Pour que $x^2 - 1 = 0$, il suffit que $x = 1$.
- 4) Si $x^2 - 1 = 0$, alors $x = 1$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Série 2 Négation et lois logiques**Exercice n° 7**

Soient P , Q et R trois propositions. Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$$P_1 : P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \qquad P_2 : P \Rightarrow Q$$

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 8*Lois de Morgan – négation d'une implication*

Soient p et q deux propositions.

1) Montrer, à l'aide d'une table de vérité, que :

$$(1) \quad \overline{(p \text{ et } q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ ou } \bar{q})$$

$$(2) \quad \overline{(p \text{ ou } q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ et } \bar{q})$$

2) a) Montrer que : (3) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ ou } q)$.

b) En déduire que : (4) $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \text{ et } \bar{q})$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 9

Soient P, q et R des propositions. Étudier la vérité des propositions suivantes :

- 1) $(P \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{P})$
- 2) $\overline{(P \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \bar{q})$
- 3) $\overline{(P \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } q)$
- 4) $[(P \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 10

Soient p et q deux propositions. Montrer, en utilisant les tables de vérité, que les propositions suivantes sont des lois logiques :

- 1) $p \Rightarrow (\bar{p} \Rightarrow q)$
- 2) $(p \text{ et } q) \Rightarrow (p \text{ ou } q)$
- 3) $(p \Rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow \overline{(p \text{ et } q)}$
- 4) $(p \text{ et } \bar{p}) \Rightarrow q$
- 5) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q})$

Note : dans l'énoncé source, la question 4 est imprimée « $(p \text{ et } \bar{q}) \Rightarrow q$ », qui n'est pas une loi logique ; la correction du document source traite $(p \text{ et } \bar{p}) \Rightarrow q$, retenue ici.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 11

Soient p, q et r trois propositions. Montrer que :

- 1) $A : [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et } q) \Rightarrow r] ;$
- 2) $B : [p \Rightarrow (q \text{ et } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ et } (p \Rightarrow r)] .$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 12

Soient P, Q et R des propositions. Montrer les équivalences suivantes :

- 1) $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \Rightarrow R]$
- 2) $[(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)]$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 13

Soient P et Q deux propositions. Montrer que :

- 1) $P \Leftrightarrow [P \text{ et } (P \text{ ou } Q)] ;$
- 2) $P \Leftrightarrow [P \text{ ou } (P \text{ et } Q)].$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 14

Soient P et Q deux propositions. Montrer que :

- 1) la proposition $\overline{(P \text{ ou } \overline{P})}$ est fausse ;
- 2) la proposition $(Q \text{ et } \overline{Q})$ ou $(P \text{ ou } \overline{P})$ est vraie ;
- 3) la proposition $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est vraie.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 15*Distributivité*

1) Soient p, q et r des propositions. Montrer que :

$$(1) \quad [p \text{ et } (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)]$$

$$(2) \quad [p \text{ ou } (q \text{ et } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r)]$$

2) a) Développer $(x - 1)(y - 2)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$(S) : \begin{cases} xy - y + 2 - 2x = 0 \\ yx^2 - (y^2 + 1)x + y = 0 \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 16

1) Soient p, q et r des propositions. Montrer que :

$$[p \Rightarrow (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et } \bar{q}) \Rightarrow r].$$

2) Montrer que : $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) ; (ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 17

Soient P et Q deux propositions. On note $P * Q$ la proposition $\overline{(P \text{ ou } Q)}$. Écrire les propositions suivantes sans utiliser le symbole $*$:

1) $(P * P) * (Q * Q)$

3) $(P * Q) * (P * Q)$

2) $P * (Q * Q)$

4) $(P * P) * (P * P)$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2

CHAPITRE

Fonctions propositionnelles et quantificateurs

Notions travaillées

- Fonction propositionnelle ; quantificateurs $\forall, \exists, \exists!$
- Traduction d'un énoncé en langage symbolique
- Négation d'une proposition quantifiée ; ordre des quantificateurs
- Valeur de vérité d'une proposition quantifiée (exemple, contre-exemple)

Dans ce chapitre

Série 1 – Écriture symbolique et négation . . .	14
Série 2 – Valeur de vérité des propositions quantifiées	21
Série 3 – Approfondissement sur les quantificateurs	37

Série 1 Écriture symbolique et négation

Exercice n° 18

Écrire les propositions suivantes en utilisant les symboles logiques, écrire leur négation et déterminer leur valeur de vérité.

p : Il n'existe pas de nombre rationnel solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$.

q : Le polynôme $x^2 - 3x + 1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

r : Pour tout entier naturel n , il existe au moins un nombre réel x tel que $x > n$.

s : Si le carré d'un réel quelconque est strictement supérieur à 1, alors ce nombre est positif.

t : Tout entier naturel multiple de 2 et de 4 est multiple de 8.

Note : pour s , la correction du document source écrit $x^2 \geq 1$ au lieu de $x^2 > 1$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 19

Écrire chacune des propositions suivantes à l'aide des symboles logiques, puis dire si elle est vraie ou fausse.

- 1) Aucun nombre rationnel n'est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$.
- 2) Pour tous nombres rationnels x et y , il existe un nombre rationnel z tel que $x < z$ et $z < y$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 20

Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et des connecteurs logiques :

p : il existe au moins un réel a tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a $a \leq x$;

q : pour tous a et b de $\mathbb{R}$, on a $(a + b)^2 \geq 4ab$;

r : pour tout x de $\mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif p tel que $p \leq x$;

s : tout entier naturel divisible par 4 est pair ;

t : pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, il existe au moins un α de $\mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$, si $|x - 1| < \alpha$ alors $\left| \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 21

Écrire les propositions suivantes à l'aide des symboles et des connecteurs logiques, puis écrire leurs négations :

p : le carré de tout nombre réel est positif ;

q : l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ admet une solution réelle ;

r : il n'existe aucun entier relatif x tel que $x^2 = 2$;

s : il existe un nombre réel plus petit que tous les nombres réels ;

u : si un nombre réel est inférieur à -1 , alors il est strictement négatif ;

v : le produit de deux nombres réels est nul si et seulement si l'un de ces deux nombres est nul.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 22

Écrire à l'aide des quantificateurs, puis déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) Il existe au moins deux nombres irrationnels dont le produit est nul.

2) La somme d'un nombre rationnel et de $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 23

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs, puis écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

- | | |
|---------------------------|---|
| 1) f est paire ; | 5) f ne s'annule jamais ; |
| 2) f est impaire ; | 6) f est nulle ; |
| 3) f est croissante ; | 7) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{Z}$; |
| 4) f est décroissante ; | 8) f n'atteint aucune valeur de $\mathbb{Z}$. |

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 24

Traduire les propositions suivantes en langage courant, puis déterminer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses, en justifiant :

- | | |
|--|--|
| 1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), x > y$ | 3) $(\forall x \in \mathbb{R}), (x^2 \geq 4) \Rightarrow (x \geq 2)$ |
| 2) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), x > y$ | 4) $(\exists x \in \mathbb{R}^-), x^2 = 4$ |

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 25

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$$

$$Q : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x < 2 \Rightarrow x^2 > 2006$$

$$R : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 26

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes (f désigne une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$) :

$$P : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq x < 1$$

$$Q : (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : xy = 0$$

$$R : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$H : (\forall x \in \mathbb{R}) : -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = f(x)$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 27

1) Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$$p : (\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{x^2 + 1} > x$$

$$q : (\exists p \in \mathbb{Z}) ; p^2 = 2$$

$$r : (\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) ; 2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2$$

$$s : (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{N}) : x + y = 12$$

$$t : (\forall x \in \mathbb{Q})(\exists n \in \mathbb{Z}) : nx \in \mathbb{Z}$$

2) Déterminer la valeur de vérité de ces propositions.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 28

À l'aide des lois de Morgan et de la négation d'une implication (voir l'exercice sur les lois de Morgan du chapitre 1), déterminer la négation des propositions suivantes :

$$p : (\forall x \in \mathbb{R}) (x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0)$$

$$q : (\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 > 5 \text{ et } x \in \mathbb{Z})$$

$$r : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : |xy| = xy \Rightarrow (x + y)^2 \geq x^2 + y^2$$

$$s : (\forall a \in \mathbb{R}) : (a^2 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$$

$$t : (\forall \alpha > 0)(\exists \beta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) : |x| < \beta \Rightarrow \left| \frac{x}{x^2 + 2} \right| < \alpha$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 29

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$$p : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x + y > 1$$

$$q : (\exists x \in \mathbb{R}), x - 1 < \frac{x}{x+1} \leq x$$

$$r : \forall (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2, \frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0$$

$$s : \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Série 2 Valeur de vérité des propositions quantifiées

Exercice n° 30

Déterminer, parmi les deux propositions suivantes, celle qui est vraie :

$$P : (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) : y = 2x + 1$$

$$Q : (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) : x = 2y + 1$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 31

Déterminer, parmi les deux propositions suivantes, celle qui est vraie :

$$P : (\exists x \in \mathbb{Q}) : x^2 = 9$$

$$Q : (\forall x \in \mathbb{N}) : x > 0$$

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 32

Déterminer, parmi les deux propositions suivantes, celle qui est vraie :

$$P : (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x - y = 3$$

$$Q : (\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) : x - y = 3$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 33

Déterminer, parmi les deux propositions suivantes, celle qui est vraie :

$$P : (\exists x \in \mathbb{Q})(\exists y \in \mathbb{Q}) : y = \sqrt{x}$$

$$Q : (\exists x \in \mathbb{Q}) : x^2 = 3$$

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 34

Montrer que la proposition $P : (\forall x \in]0; 1[) \frac{2x}{x^2(1-x^2)} < 1$ est fausse.

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 35

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes, puis dire si elle est vraie ou fausse :

$$P : (\exists x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) : 2x - 3y = \sqrt{2}$$

$$Q : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : \frac{2x}{1+x^2} > y$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 36

On considère la proposition $P : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + xy + y^2 = 0$.

- 1) Déterminer la négation de la proposition P .
- 2) Montrer que la proposition P est fausse.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 37

On considère la proposition $P : (\forall x \in [0; 2]) (\exists y \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]) : xy - x + 2y - 1 = 0$.

- 1) Déterminer la négation de la proposition P .
- 2) Montrer que la proposition P est vraie.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 38

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes, puis écrire sa négation :

- 1) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \leq y$
- 2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}) \quad n \leq x < n + 1$
- 3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}) \quad n > x$
- 4) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$
- 5) $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad (n \text{ impair ou } n = 2) \Rightarrow n \text{ premier}$
- 6) $(\forall a \in \mathbb{Z}) (\exists (p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0; 4 \rrbracket) \quad a = 5p + r$
- 7) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in \{1 + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}) : \quad x < \varepsilon + 1$

Note : dans la question 7, l'énoncé source imprime « $\varepsilon + 10$ » ; la correction du document source traite $\varepsilon + 1$, retenu ici.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE]

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 39

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

1) $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : ax^2 + ax - 1 + a = 0$

2) $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : ax^2 + ax - 1 + a = 0$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 40

Distinguer, parmi les propositions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses ; justifier.

1) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x \leq y$

4) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad y(x^2 + 1) = 1$

2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \leq y$

5) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad y(x^2 + 1) = 1$

3) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad y(x^2 + 1) = 1$

6) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad y(x^2 + 1) = 1$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 41

On considère les propositions suivantes :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}$$

$$Q : (\forall x \in]0; 1[) (\forall y \in]0; 1[) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 2$$

$$R : (\exists x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1$$

- 1) Donner la négation de chacune des propositions P , Q et R .
- 2) Montrer que chacune des propositions P , Q et R est vraie.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 42

On considère les propositions suivantes :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \neq 1$$

$$Q : (\exists x \in]0; 1[) \quad \frac{2x}{1 + x^2} > 1$$

$$R : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad \frac{2y}{1 + y^2} > x$$

- 1) Donner la négation de chacune des propositions P , Q et R .
- 2) Montrer que chacune des propositions P , Q et R est fausse.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 43

On considère les propositions suivantes :

$$A : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x^2 \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \in \mathbb{Z})$$

$$B : (\exists x \in \mathbb{R}^+) \quad (x > 1) \Rightarrow (x^2 < 1)$$

$$C : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x \leq 0) \Rightarrow (x^2 \geq 2)$$

1) Donner la négation de chacune des propositions A , B et C .

2) Montrer que chacune des propositions A , B et C est fausse.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] La correction du document source conclut que B est vraie (par exemple pour $x \leq 1$), ce qui contredit la consigne 2.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 44

On considère les propositions suivantes :

$$A : (\forall x \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{x-1} + |x^2 - 1| \neq 0$$

$$B : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$C : (\forall x \in]1; +\infty[) \quad \frac{x}{\sqrt{x-1}} < 2$$

- 1) Donner la négation de chacune des propositions A , B et C .
- 2) Montrer que chacune des propositions A , B et C est fausse.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 45

Étudier la vérité des propositions suivantes :

$$P_1 : (\exists x \in]0; +\infty[) \quad \sqrt{x} > x$$

$$P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + 4x - 5 > 0$$

$$P_3 : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - x > 0 \text{ et } x^2 + x < 0$$

$$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + 2x - 3 \geq 0 \text{ ou } \frac{x+1}{2} \leq \frac{x}{3}$$

$$P_5 : (\exists x \in \mathbb{N}) \quad |x^2 + 6x - 7| + (x - 1)^2 = 0$$

$$P_6 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x + 2y = 8$$

$$P_7 : (\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = \sqrt{3}$$

$$P_8 : (\forall x \in \mathbb{Q}) \quad x^2 - 13 \neq 0$$

$$P_9 : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$$

$$P_{10} : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$P_{11} : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x \leq 0$$

$$P_{12} : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$P_{13} : (\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad x^2 - y^2 - 4x + 6y + 14 = 0$$

$$P_{14} : (\forall x \in [-1; 2])(\exists y \in [\frac{1}{7}; 16]) \quad / \quad 2xy - 5y - 5x - 6 = 0$$

$$P_{15} : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x + 5y = 7$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 46

On considère la propriété $A(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, où $A(n) = n^2 + n + 41$.

- 1) Calculer $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$ et $A(40)$.
- 2) Montrer que la proposition $[(\forall n \in \mathbb{N}^*) : A(n) \text{ est un nombre premier}]$ est fausse.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 47

- 1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x^2 + x - 1 < 0$.
- 2) On considère la proposition $p : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) ; -x^2 + x - 1 \geq y$.
 - a) Déterminer la négation de la proposition p .
 - b) En déduire que la proposition p est fausse.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 48

On considère la proposition $p : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : y^2 - 3xy + 2x^2 = 1$.

- 1) La proposition p est-elle vraie ? Justifier.
- 2) Déterminer la négation de la proposition p .

Note : l'énoncé source imprime « $y^2 - 3xy^2 + 2x^2 = 1$ » ; la correction du document source traite $y^2 - 3xy + 2x^2 = 1$, retenu ici.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 49

On considère les deux propositions suivantes :

$$(p) : (\exists x \in \mathbb{R}^+) ; \sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$(q) : (\forall y \in \mathbb{R}) ; (\exists x \in \mathbb{R}) ; \frac{x}{1+x^2} < y$$

- 1) Donner la négation de chacune des propositions (p) et (q) .
- 2) a) Montrer que la proposition (p) est vraie et que la proposition (q) est fausse.
b) Quelle est la valeur de vérité de la proposition

$$(r) : \left[(\exists y \in \mathbb{R}) ; (\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{x}{1+x^2} \geq y \right] \Rightarrow \left[(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sqrt{1+x} \neq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right] ?$$

- 3) On considère la proposition $(s) : (p \Rightarrow q) \Rightarrow \bar{q}$.
a) Donner la négation de la proposition (s) .
b) Quelle est la valeur de vérité de la proposition (s) ?

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 50

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$, et les propositions suivantes :

$$p : \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$$

$$q : (\forall y \in \mathbb{R}) ; (\exists x \in \mathbb{R}) : y = f(x)$$

$$r : (\forall \alpha \in \mathbb{R}^+) ; (\exists \beta \in \mathbb{R}) ; \alpha = f(\beta)$$

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.
 b) Donner la négation de la proposition p .
 c) La proposition p est-elle vraie ? Justifier.
- 2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = a$, où a est un réel de l'intervalle $] -\infty ; -1]$.
 b) Donner la négation de la proposition q .
 c) Déterminer la valeur de vérité des propositions q et r .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 51*Contre-exemple*

- 1) Montrer que la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 5x + 4 > 0$ est fausse.
- 2) On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Montrer que la fonction f n'est ni paire ni impaire.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 52*Contre-exemple*

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2 \cos x - 1 = 0$.
- 2) Montrer que la proposition $p : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad 3 \cos x \neq 2 \sin^2 x$ est fausse.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 53

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2x$.

1) Déterminer la valeur de vérité de chacune des deux propositions suivantes :

$$P : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : y = f(x)$$

$$Q : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists! x \in \mathbb{R}) : y = f(x)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 1$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 54

Soit (P) la proposition suivante :

$$(P) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \quad \text{avec } f(x) = x^2 - 6x - 16.$$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2) Donner la négation de la proposition (P) , puis en déduire la vérité de (P) .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 55

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - x - 2}$.

- 1) Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : f(x) = \frac{1}{2}$.
- 3) On considère la proposition $p : (\forall x \in D_f)(\forall y \in D_f) \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
 - a) Écrire la négation de p .
 - b) En déduire que p est fausse.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Série 3 Approfondissement sur les quantificateurs

Exercice n° 56

Soient E et F deux ensembles non vides, A et B deux fonctions propositionnelles définies sur E , et P une fonction propositionnelle définie sur $E \times F$. Étudier la vérité des propositions suivantes :

- 1) $[(\forall x \in E) : A(x) \text{ ou } B(x)] \Rightarrow [(\forall x \in E) : A(x) \text{ ou } (\forall x \in E) : B(x)]$
- 2) $[(\forall x \in E) : A(x) \text{ ou } B(x)] \Rightarrow [(\forall x \in E) : A(x) \text{ ou } (\exists x \in E) : B(x)]$
- 3) $[(\exists x \in E) A(x) \text{ et } (\exists x \in E) B(x)] \Rightarrow [(\exists x \in E) : A(x) \text{ et } B(x)]$
- 4) $[(\forall x \in E)(\exists y \in F) P(x; y)] \Rightarrow [(\forall y \in F)(\exists x \in E) P(x; y)]$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 57

Démontrer que la proposition suivante est fausse :

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) \ 2x - 3y = 1 \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \ 2x - 3y = 1.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 58

Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la proposition $(x = 0) \Leftrightarrow (x = 1)$ est vraie.

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 59

Soient a et b deux réels. Montrer que les propositions suivantes sont vraies :

- 1) $[(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) |a| \leq x] \Rightarrow [a = 0]$
- 2) $[(\forall x \in \mathbb{R}) a \leq x \Rightarrow b < x] \Rightarrow [b < a]$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PARTIE II

Raisonnements mathématiques

Raisonnement déductif, par équivalences successives, par contraposée, par l'absurde, par disjonction des cas et par récurrence.

3

CHAPITRE

Raisonnement déductif et raisonnement par équivalence

Notions travaillées

- Démontrer une implication (raisonnement direct, déductif)
- Démontrer une équivalence par équivalences successives
- Inégalités et égalités usuelles ; moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique

Dans ce chapitre

Série 1 – Raisonnement déductif	40
Série 2 – Raisonnement par équivalences successives	57
Série 3 – Inégalités classiques et moyennes . .	68

Série 1 Raisonnement déductif

Exercice n° 60

Soient a et b deux réels. Montrer que :

- 1) $ab + a - b = 1 \Rightarrow a = 1$ ou $b = -1$;
- 2) $(a - 1)(b + 1) = (a + 1)(b - 1) \Rightarrow a = b$.

Correction

Exercice n° 61

Soient a et b deux réels. Montrer que :

$$[(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ax + b = 0] \Rightarrow a = b = 0.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 62

Soient a et b deux rationnels positifs. Montrer que si $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est rationnel, alors $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont aussi rationnels.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 63

Soient x et y deux réels non nuls. On considère les deux propositions :

$$P : \ll 2x + 4y = 1 \gg \quad \text{et} \quad Q : \ll \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20 \gg.$$

Montrer que $P \Rightarrow Q$.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Énoncé manuscrit peu lisible : la relation P peut aussi se lire « $2x + y = 1$ » ; la correction du document source utilise $2x + 4y = 1$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 64

Soient a , b et c des réels. Montrer l'implication suivante :

$$[|a - b| \leq c \text{ et } |a + b| \leq c] \Rightarrow |ab| \leq \frac{c^2}{2}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 65

Soient a, b et c des réels. On considère les deux propositions :

$$P : \ll a > 0, b > 0, c > 0 \gg \quad \text{et} \quad Q : \ll \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c \gg.$$

Montrer que $P \Rightarrow Q$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 66

Soient a, b et x des réels. On considère les deux propositions :

$$P : \ll -2 \leq x \leq 2 \gg \quad \text{et} \quad Q : \ll a^2 + abx + b^2 \geq 0 \gg.$$

Montrer que $P \Rightarrow Q$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 67

Soit x un réel. On considère les deux propositions :

$$H : \left\langle x^2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right\rangle \quad \text{et} \quad G : \left\langle \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{2(1+x)^4} + \frac{1}{2(1-x)^4} = 4 \right\rangle.$$

Montrer que $H \Rightarrow G$.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Contrôle numérique : lorsque $x^2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$, le membre de gauche de G vaut $\frac{9}{2}$ et non 4. L'énoncé (et la correction) du document source indiquent bien 4.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 68

Soient a, b et c des réels. Montrer que :

$$(a > 3, b > 3 \text{ et } c > 3) \Rightarrow ab + bc + ca < abc.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 69

Soient x et y deux réels. On considère les propositions :

$$P_1 : \ll xy = \sqrt{6} \gg, \quad P_2 : \ll x + \sqrt{2} = y + \sqrt{3} \gg, \quad P_3 : \ll x = \sqrt{3} \text{ et } y = \sqrt{2} \gg.$$

Montrer que $(P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow P_3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 70

Soient a , b et c des réels. On considère les propositions :

$$P_1 : \ll a \geq 0 \gg, \quad P_2 : \ll b \geq 0 \gg, \quad P_3 : \ll c \geq 0 \gg, \quad P_4 : \ll (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc \gg.$$

Montrer que $(P_1 \text{ et } P_2 \text{ et } P_3) \Rightarrow P_4$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 71

Soient a, b, x et y des réels. On considère les propositions :

$$P_1 : \ll xy = ab \neq 0 \gg, \quad P_2 : \ll x + b = y + a \gg, \quad P_3 : \ll x = a \text{ et } y = b \gg.$$

Montrer que $(P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow P_3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 72

Soient x, y, a et b des réels. On considère les propositions :

$$P : \ll ax = by \neq 0 \gg, \quad Q : \ll ay = bx \neq 0 \gg, \quad R : \ll a^2 = b^2 \text{ et } x^2 = y^2 \gg.$$

Montrer que $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 73

Soient a et b deux réels. On considère les deux propositions :

$$P : \ll a^3 + b^3 < 1 < a + b \gg \quad \text{et} \quad Q : \ll 0 < a < 1 \text{ et } 0 < b < 1 \gg.$$

Montrer que $P \Rightarrow Q$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 74

Soient x, y et z des réels. On considère les deux propositions :

$$P : \ll x^2 + y^2 + z^2 = 1 \gg \quad \text{et} \quad Q : \ll -\sqrt{3} \leq x + y + z \leq \sqrt{3} \gg.$$

1) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

2) En déduire que $P \Rightarrow Q$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 75

Soient x, y, z et a des réels. On considère les propositions :

$$P_1 : \ll x + y \neq 0, x + z \neq 0 \text{ et } y + z \neq 0 \gg$$

$$P_2 : \ll x + y + z = a \gg$$

$$P_3 : \ll x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \gg$$

$$P_4 : \ll \frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} + a = 0 \gg$$

1) Montrer que $(P_2 \text{ et } P_3) \Rightarrow xy + yz + zx = 0$.

2) En déduire que $(P_1 \text{ et } P_2 \text{ et } P_3) \Rightarrow P_4$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 76

Soient a et b deux réels. On considère les propositions :

$$P_1 : \ll a \geq 1 \text{ et } b \geq 1 \gg, \quad P_2 : \ll \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{ab} \gg, \quad P_3 : \ll a^5 b^5 \geq 2^{20} \gg, \quad P_4 : \ll a^5 + b^5 \geq 2^{11} \gg.$$

1) Montrer que $(P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow P_3$.

2) Montrer que $(P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow P_4$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 77

Soient a, b, c, x, y et z des réels non nuls. On considère les propositions :

$$P : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad Q : \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0, \quad R : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- 1) Montrer que $Q \Rightarrow \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} = 0$.
- 2) Montrer que $P \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} \right) = 1$.
- 3) En déduire que $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 78

Soient a, b et c des réels positifs tels que

$$a + \sqrt{2} = b + \sqrt{3} = c + \sqrt{5} = k.$$

Montrer que $a\sqrt{3} + b\sqrt{5} + c\sqrt{2} \leq k^2$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 79

Montrer que les implications suivantes sont vraies :

- 1) $(\forall x \in [0; +\infty[) \quad \sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow x = 0$
- 2) $(\forall x \in [1; +\infty[) (\forall y \in [1; +\infty[) \quad \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ et } y = 8$
- 3) $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+4} = 4 \Rightarrow x = y = 0$
- 4) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) \quad \frac{x+y+2}{2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$
- 5) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) \quad |x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \Rightarrow \left| \frac{x+y}{1+xy} \right| < 1$
- 6) $(\forall x \geq 1) (\forall y \geq 1) \quad x = y - 2\sqrt{y} \Rightarrow y = (\sqrt{x+1} + 1)^2$
- 7) $(\forall x \in [0; +\infty[) (\forall y \in [1; +\infty[) (\forall z \in [2; +\infty[)$
 $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z) \Rightarrow x = 1 \text{ et } y = 2 \text{ et } z = 3$
- 8) $(\forall a \in \mathbb{R}) (\forall b \in \mathbb{R}) \quad \left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| < 1 \Rightarrow |a| < 1 \text{ et } |b| < 1$

Note : question 2 : l'énoncé source indique $y \in [1; +\infty[$; l'expression $\sqrt{y-4}$ impose en fait $y \geq 4$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 80

Soient a et b deux nombres réels positifs.

- 1) Montrer que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
- 2) Montrer que $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ et $ab \leq \frac{1}{4}$.
- 3) Montrer que $a+b=1 \Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Question 2 : l'énoncé source est imprimé « $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2 \geq ab \leq \frac{1}{4}$ » ; la correction du document source établit $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ puis $ab \leq \frac{1}{4}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 81

Soient a, b et c trois réels tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |ax^2 + bx + c| \leq 1 \quad (*)$$

- 1) Montrer que $|c| \leq 1$.
- 2) Montrer que $-1 \leq a + c \leq 1$.
- 3) En déduire que $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

Note : question 2 : l'énoncé source imprime des inégalités strictes ; la correction du document source établit des inégalités larges.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 82

Soient x et y deux réels non nuls et non opposés.

- 1) Montrer que : $\left((x + y) \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \right) \Rightarrow (x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q})$.
- 2) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout $b \in \mathbb{Z}$ tels que $a^2 - 2b^2 = 1$:

$$\frac{|b|}{a} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow a \geq 3 \Leftrightarrow |b| \geq 2.$$

Note : question 2 : l'énoncé source imprime « $a > 3$ » ; la correction du document source traite $a \geq 3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 83

Soient a, b, c des nombres réels et a', b', c' des nombres réels strictement positifs.

1) Montrer que : $\frac{a}{a'} \leq \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} \leq \frac{a+b}{a'+b'} \leq \frac{b}{b'}$.

2) Montrer que : $\frac{a}{a'} \leq \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{a'} \leq \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \leq \frac{c}{c'}$.

Note : l'énoncé source mêle inégalités strictes et larges et place mal une parenthèse au dénominateur ; la version retenue est celle de la correction du document source.

Correction

Exercice n° 84

Soit a un réel strictement positif tel que $a^5 - a^3 + a = 2$.

1) Montrer que $a^6 + 1 = 2 \left(a + \frac{1}{a} \right)$.

2) En déduire que $a^6 \geq 3$.

3) Montrer que $\frac{2}{a^3} + 1 = a^2 + \frac{1}{a^2}$.

4) En déduire que $a^6 \leq 4$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 85

1) Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R}_+^*), a + \frac{1}{a} \geq 2$.

2) Soient x et p deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$x^5 - x^3 + x = p \Rightarrow x^6 \geq 2p - 1.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 86

Soient a, b et c des réels de l'intervalle $]0; 1[$. On pose $A = (ab - 1)(bc - 1)(ac - 1)$.

- 1) Vérifier que $\frac{A}{abc} = \left(a - \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{c}\right) \left(c - \frac{1}{a}\right)$.
- 2) Montrer que $A < 0$.
- 3) En déduire que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc \leq a + b + c + \frac{1}{abc}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 87

Soient x et y deux réels tels que $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $|y| < 1$. Montrer que

$$|4x^2y - y - x| \leq \frac{17}{16}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 88

Soient a, b, c et d des entiers naturels tels que $1 < a < b < c < d$. Montrer que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a \cdot b \cdot c \cdot d} \leq \frac{31}{24}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 89

Soient x et y deux réels tels que $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. Montrer que

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 90

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a + b = 1$, et n un entier naturel. Montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{a^n}\right) \left(1 + \frac{1}{b^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Série 2 Raisonnement par équivalences successives**Exercice n° 91**

Soient x et y deux réels. Démontrer que : $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 92

Montrer que :

1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (xy - 2 = y - 2x) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } y = -2) ;$

2) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{a^2 + b^2}{2} = a + b - 1 \Leftrightarrow (a = 1 \text{ et } b = 1) ;$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^+), (\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1) \Leftrightarrow (x = 1).$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 93

Montrer que :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+), \frac{x+y+2}{2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow (x = 1 \text{ et } y = 1) ;$

2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy + 6 = 3x + 2y \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } y = 3) ;$

3) $(\forall x \in [1; +\infty[) (\forall y \in [2; +\infty[), \left(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-2} = \frac{x+y+2}{2} \right) \Leftrightarrow (x = 2 \text{ et } y = 6).$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 94

Soit x un réel. On considère les propositions :

$$A : \cos^3 x + \sin^3 x = 1, \quad B : \sin x = 1 \text{ et } \cos x = 0, \quad C : \sin x = 0 \text{ et } \cos x = 1.$$

Montrer que $A \Leftrightarrow (B \text{ ou } C)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 95

Soient x et y deux réels. On considère les propositions :

$$p : \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) = 1 \quad \text{et} \quad q : x + y = 0.$$

Montrer que $p \Leftrightarrow q$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 96

Déterminer les réels x et y tels que : $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 97

Soient a et b deux réels. Montrer que :

$$|a| < 1 \text{ et } |b| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 98

Montrer que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} < c \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < c \\ |b| < c \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 99

En utilisant le raisonnement par équivalence, montrer que :

1) $(\forall x \in [1; +\infty[) (\forall y \in [1; +\infty[) \quad \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy} ;$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R}^* \quad \frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+1}} \Rightarrow |a| = |b|.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 100

Soient a et b deux réels.

- 1) Montrer que si $|a| < 1$ et $|b| < 1$, alors $|a + b| < |1 + ab|$.
- 2) Montrer que $(a = 18 \text{ et } b = 8) \Leftrightarrow 3\sqrt{a-9} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2}$.
- 3) Soit c un réel strictement positif. Montrer que si $3 < c^4 + 8c^3 + 18c^2 + 8c$, alors $\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{2}}} < c + 2$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 101

Soient $(a; r)$ et $(b; s)$ deux éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$]a - r; a + r[=]b - s; b + s[\Leftrightarrow (a; r) = (b; s).$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 102

Soient a, b, x et y des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{x}{y} < \frac{ax + by}{bx + ay} < \frac{y}{x} \Leftrightarrow x < y.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 103

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$.

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 104

Montrer que $(\forall a \in [0; +\infty[), \quad a < \sqrt{3 + \sqrt{3}} - 2 \Rightarrow a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a < 3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 105

Montrer que $(\forall x \in [-2; 2]) \quad \sqrt{4 - x^2} - x \leq 2\sqrt{2}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 106

Soient a et b deux réels. On considère les deux propositions :

$$P : \ll a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \gg \quad \text{et} \quad Q : \ll (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0 \gg.$$

- 1) Montrer que $P \Leftrightarrow Q$.
- 2) En déduire que la proposition P est vraie.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 107

Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{2x + 5y}{5x + 2y} < \frac{y}{x}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 108

Montrer que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 109

Soient a et b deux réels. Montrer que la proposition $P : \ll a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) \gg$ est vraie.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 110

Soient x et y deux réels. Montrer que : $x + y = 0 \Leftrightarrow (|x| = |y| \text{ et } xy \leq 0)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 111

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$.

2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+), \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 1}{5}} \geq \sqrt{x}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 112

- 1) Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\forall b \in \mathbb{R}^+) ; \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
- 2) En déduire que $(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{15}) \geq 8\sqrt{15}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 113

- 1) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{2\pi}{3} + k\pi \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right] \Leftrightarrow k \in \{-1; 0; 1\}$.
- 2) Soit a un réel tel que $|a - 2| \leq \frac{2}{3}$. Montrer que $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{3a+2} \leq \frac{1}{6}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 114

- 1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) ; (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.
- 2) Soient a et b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 2$. Montrer que $|a + b| \leq 2$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Série 3 Inégalités classiques et moyennes**Exercice n° 115***Les moyennes*

Soient a et b deux réels strictement positifs. On appelle :

- $m = \frac{a+b}{2}$ la moyenne arithmétique des nombres a et b ;
- $g = \sqrt{ab}$ la moyenne géométrique des nombres a et b ;
- $h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ la moyenne harmonique des nombres a et b ;
- $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ la moyenne quadratique des nombres a et b .

- 1) Montrer que $h \leq g \leq m \leq q$.
- 2) Soient a, b et c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(1) \quad a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$(2) \quad \frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$$

$$(3) \quad (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$$

$$(4) \quad (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

$$(5) \quad \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

$$(6) \quad (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

$$(7) \quad \frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2ab}$$

$$(8) \quad \frac{a+b}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$(9) \quad \frac{a+b}{a^2 + b^2} + \frac{b+c}{b^2 + c^2} + \frac{c+a}{c^2 + a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$(10) \quad \frac{a^2 + 1}{b} + \frac{b^2 + 1}{a} \geq 4$$

Correction

.....

Exercice n° 116

- 1) Montrer que $(\forall a \in]1; +\infty[) ; \frac{a^2}{a-1} \geq 4$.
- 2) Montrer que $\forall (a; b) \in (]1; +\infty[)^2 ; \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$.

Correction

4

CHAPITRE

Raisonnement par contraposée et raisonnement par l'absurde

Notions travaillées

- Loi de la contraposée : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
- Démontrer qu'une fonction prend des valeurs distinctes
- Raisonnement par l'absurde : $[\bar{p} \Rightarrow (q \text{ et } \bar{q})] \Rightarrow p$
- Irrationalité, non-existence d'une solution, d'un objet ou d'une fonction

Dans ce chapitre

Série 1 – Raisonnement par contraposée 70

Série 2 – Raisonnement par l'absurde 78

Série 1 Raisonnement par contraposée

Exercice n° 117

En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que :

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \left(x \neq y \text{ et } x \neq \frac{1}{y} \right) \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}$;
- 2) $\forall x \geq 1, \forall y \geq 1, x \neq y \Rightarrow \frac{x+1}{x^2+1} \neq \frac{y+1}{y^2+1}$.

Correction

Exercice n° 118

En utilisant la contraposée, montrer que pour tous x et y de $\mathbb{R}$:

$$(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 119

En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que :

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x \neq -\sqrt{7} \text{ et } x \neq \sqrt{7}) \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2}} \neq 1 ;$
- 2) $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) \quad (a \neq b \text{ et } ab \neq 1) \Rightarrow \frac{a}{a^2 + 1} \neq \frac{b}{b^2 + 1}.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 120

Montrer que :

1) $(\forall x \in [1; +\infty[) (\forall y \in [1; +\infty[) \quad x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y ;$

2) $(\forall x \in]1; +\infty[) (\forall y \in]1; +\infty[) \quad x \neq y \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} \neq \frac{y}{y^2 - 1}.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 121

En utilisant la contraposée, montrer que pour tous x et y de $]1; +\infty[$:

$$x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 122

Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$a \neq b \Rightarrow \frac{a+1}{a^2+2a+2} \neq \frac{b+1}{b^2+2b+2}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 123

Montrer que, pour tous réels x et y :

$$(xy \neq -1 \text{ et } 2x + y \neq 1) \Rightarrow (2x^2y + xy^2 + 2x \neq xy - y + 1).$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 124

Montrer que $(\forall a \in [1; +\infty[) (\forall b \in [4; +\infty[)$:

$$(a \neq 2 \text{ ou } b \neq 8) \Rightarrow \sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} \neq \frac{a+b}{2}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 125

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$:

$$(|x| \neq |y| \text{ et } |xy| \neq 1) \Rightarrow (y^2|x| - |y| \neq x^2|y| - |x|).$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 127

Soient a et b deux réels. Montrer que : $((\forall \varepsilon > 0) |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow (a = b)$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 128

Soit n un entier relatif. Montrer que si 8 ne divise pas $n^2 - 1$, alors n est pair.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 129

Montrer que, pour tous x et y de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$(x \neq y) \Rightarrow \frac{3x+2}{x-2} \neq \frac{3y+2}{y-2}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 130

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; \left(x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1 \right)$.

2) Soient a et b deux réels non nuls tels que $b \neq 2a$. Montrer que :

$$b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 131

Soient x, y et z des réels. Montrer que :

$$(x + y \leq z) \Rightarrow \left(x \leq \frac{1}{2}z \right) \text{ ou } \left(y \leq \frac{1}{2}z \right).$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 132

- 1) Montrer que $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; (x \neq y \Rightarrow x^3 + x \neq y^3 + y)$.
- 2) a) Montrer que $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2; (|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0)$.
 b) En déduire que $\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3; (|a - b| = |a - c| + |b - c| \Leftrightarrow a \leq c \leq b \text{ ou } b \leq c \leq a)$.
- 3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $((\forall \varepsilon > 0); |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Série 2 Raisonnement par l'absurde**Exercice n° 133**

En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que :

- 1) il n'existe pas de triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont $3a, 4a$ et $6a$ ($a > 0$) ;
- 2) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (a + b) \notin \mathbb{Q}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 134

Montrer qu'il n'existe aucun triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont 5, 6 et 7.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 135

Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, et en déduire que $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 136

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n^2 \text{ pair}) \Rightarrow (n \text{ pair})$.
- 2) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 137

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que 3 divise n si, et seulement si, 3 divise n^2 .
 2) Démontrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 138

En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$;
 2) $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a > b$: $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \notin \mathbb{N}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 139

En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$;
- 2) $\forall a \in]0; +\infty[\quad \sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} \neq \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$;
- 3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \neq \frac{1}{abc}$ avec $a > 0, b > 0, c > 0$ et $a^2 + b^2 + c^2 < 2$;
- 4) $b > \frac{c}{2}$ ou $a > \frac{c}{2}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a + b > c$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 140

Montrer par l'absurde que $(\forall a \in [0; +\infty[), \quad \sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} \neq \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 141

Soient a, b et c trois réels. On considère les équations :

$$(E_1) : x^2 - 2ax + bc = 0 \quad (E_2) : x^2 - 2bx + ac = 0 \quad (E_3) : x^2 - 2cx + ab = 0$$

Montrer par l'absurde qu'au moins l'une de ces équations admet une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 142

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2x - y^2}{x^2 + 2} \neq 1$.

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 143

Montrer par l'absurde que l'équation $(E) : x^3 + x - 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 144

Montrer que le système

$$(S) : \begin{cases} 2x - 3z > 3 \\ 3y - 2x > 3 \\ y - z < 2 \end{cases}$$

n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 145

En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que le système

$$\begin{cases} 2x - 3z > 3 \\ 3y - 2x \geq 3 \\ y - z \leq 2 \end{cases}$$

n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 146

On considère la proposition

$$P : (\forall x \in [0; +\infty[) (\forall y \in [0; +\infty[), \quad (xy \leq 1) \Rightarrow (x \leq 1 \text{ ou } y \leq 1).$$

- 1) Donner la négation de P .
- 2) Montrer par l'absurde que P est vraie.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 147

Montrer par l'absurde que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0), \quad |x| < \varepsilon \Rightarrow x = 0$.

Note : énoncé reproduit tel qu'il figure dans le document source ; il se lit : si $|x| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x = 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 148

Montrer par l'absurde que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N} ;$
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{4n+2014} \notin \mathbb{N} ;$
- 3) $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \frac{8n+2013}{10} \notin \mathbb{Z} ;$
- 4) $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \frac{4n+3}{6} \notin \left\{ \frac{3m+2}{7} / m \in \mathbb{Z} \right\}.$

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Question 2 : la correction du document source traite $\sqrt{4n+2}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 149

Soit x un réel tel que $\cos^3(x) - \sin^3(x) = 1$.

- 1) En raisonnant par l'absurde, montrer que $0 \leq \cos(x)$ et $\sin(x) \leq 0$.
- 2) Montrer que $\cos^3 x - \sin^3 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x$.
- 3) En raisonnant par l'absurde, montrer que

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 150

Soient n un entier naturel impair et $x_1, x_2, \dots, x_n$ les éléments de l'intervalle d'entiers $\llbracket 1; n \rrbracket$, rangés dans un ordre quelconque. Montrer qu'il existe au moins un entier k de $\llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x_k - k$ soit pair.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 151

Montrer que l'équation $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solution rationnelle.

Rappel : Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, ils n'ont aucun diviseur premier commun.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 152

Montrer qu'il n'existe aucune fonction f définie sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall m \in \mathbb{N}^*) \quad f(n)^{f(m)} = m^n.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 153

Montrer qu'il n'existe pas de fonction f définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{N}^2) \quad (f(x))^{f(y)} = y^x.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 154

Montrer qu'il n'existe pas de fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions :

a- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4};$

b- $(\forall (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2) \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 155

Soit a un réel tel que $1 < a < 2$. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + ax + 1 \neq 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 156

Soient a, b et c trois réels strictement positifs vérifiant

$$abc > 1 \quad \text{et} \quad a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Montrer que :

- 1) aucun de ces nombres n'est égal à 1 ;
- 2) l'un de ces nombres est strictement inférieur à 1.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 157

Soit n un entier naturel.

- 1) Déterminer les restes de la division euclidienne de n^2 par 5.
- 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 158

Montrer que l'équation (*) : $3 \cos x = 7x^2 + 2x + 5$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 159

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont des entiers relatifs, vérifiant $P(1) = 1$ et $P(2007) = 2$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 160

Montrer que :

$$\left(\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\right) \quad \tan^4 x + (x^2 + 2|x| - 1) \tan^2 x + 1 \neq 0.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5

CHAPITRE

Raisonnement par disjonction des cas

Notions travaillées

- Loi : $[(p \Rightarrow r) \text{ et } (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \text{ ou } q) \Rightarrow r]$
- Partition d'un ensemble en cas (signe, parité, restes d'une division)
- Équations, inéquations et systèmes comportant des valeurs absolues

Dans ce chapitre

- Série 1 – Démontrer par disjonction des cas . . . 91
- Série 2 – Valeurs absolues : équations, inéquations, systèmes 95

Série 1 Démontrer par disjonction des cas

Exercice n° 161

En utilisant le raisonnement par disjonction des cas :

- 1) montrer que 6 divise $n^3 - n$ pour tout entier naturel n ;
- 2) montrer que 3 ne divise pas $n^2 + 1$ pour tout entier naturel n .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 162

Montrer que le produit de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 6.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 163

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Correction**Exercice n° 164**

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x - 1) > 0$.

Correction**Exercice n° 165**

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}(x + 2) > 0$.

Correction

Exercice n° 166

- 1) Étudier le signe de l'expression $u(x) = 2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x}$, où $x \in]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$.
- 2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2 + 2x + 2} > x + 1$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 167

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si $3n + 1$ est un carré parfait, alors $n + 1$ est la somme de trois carrés parfaits.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 168

1) Montrer que l'équation $|x - 1| + |x + 1| - |x| = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $-2 < \frac{1}{x} < 1$.

Note : dans le document source, la question 2 est numérotée 3).

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 169

Soient x , y et z trois réels tels que l'un d'eux est strictement positif, un autre est nul et le dernier est strictement négatif, et qui vérifient les implications suivantes :

$$x = 0 \Rightarrow y > 0 \qquad x > 0 \Rightarrow y < 0 \qquad y \neq 0 \Rightarrow z > 0$$

Déterminer, parmi ces nombres, celui qui est nul, celui qui est strictement positif et celui qui est strictement négatif.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Série 2 Valeurs absolues : équations, inéquations, systèmes**Exercice n° 170**

En utilisant la disjonction des cas, résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(E_1) : x^2 - 5|x - 3| - 21 = 0 \qquad (E_2) : |x^2 - x - 6| - 2x + 4 = 0$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 171

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2|x - 3| - 3|x - 2| = 4x - 5$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 172

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x^2 - 2x| \geq 2x - 3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 173

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $3 - 2|x - 4| = 2x + 5$.

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 174

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (*) : $|x - 2| + |x - 3| = x + 2$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 175

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x + 1 - |4x - 3| < 3x - 4$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 176

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$$(1) \quad |2x - 1| < \frac{x}{2}$$

$$(2) \quad |x + 1| \leq |x - 1|$$

$$(3) \quad |3x - 1| - |2x + 1| > -x$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 177

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x^2 - |x + 2| - 13 = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S) :
$$\begin{cases} 2|x - 1| + y = 3 \\ |x - 2| + 2y = 4 \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 178

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - |x - 3| - 4 = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système
$$\begin{cases} 2|x + 1| - y = 4 \\ |x + 2| + 2y = 6 \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6

CHAPITRE

Applications : équations, inéquations et systèmes

Notions travaillées

- Équivalences et implications dans la résolution d'une équation
- Équations et inéquations irrationnelles (racines carrées)
- Changement de variable ; équations réciproques
- Systèmes ; discussion suivant un paramètre

Dans ce chapitre

Série 1 – Équations et inéquations irrationnelles	99
Série 2 – Changement de variable.	102
Série 3 – Systèmes et équations à paramètre.	106

Série 1 Équations et inéquations irrationnelles

Exercice n° 179

Analyse d'une erreur

Un professeur a proposé à ses élèves de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Un élève a donné la solution suivante :

Solution de l'élève : Comme $x^2 + x + 1 = 0$, alors $-x^2 = x + 1$ (1) et $x(x + 1) + 1 = 0$ (2). En remplaçant $x + 1$ par sa valeur dans (2), on trouve $x(-x^2) + 1 = 0$, c'est-à-dire $x^3 = 1$. Cette équation admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x = 1$, d'où $S = \{1\}$.

Un autre élève a remarqué que 1 n'est pas solution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Quelle est l'erreur commise par le premier élève ?

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 180

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$$(I_1) : \sqrt{x-1} \geq x-4$$

$$(I_2) : \sqrt{x^2-5x+6} \leq 2x-3$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 181

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x+4 = \sqrt{x^2+3x+2}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 182

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x = \sqrt{x+6}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 183

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : 2x + 1 \leq \sqrt{x^2 + 3}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 184

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : x + 3 \geq \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 185

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x+4}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 186

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : \sqrt{5-x} + 3x - 2 > 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Série 2 Changement de variable**Exercice n° 187**

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$, et on note S_E l'ensemble de ses solutions.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 + 2t - 24 = 0$.
- 2) On pose $t = x^2 + 3x$.
 - a) Montrer que $x \in S_E \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0$.
 - b) En déduire l'ensemble S_E .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 188

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(F) : (1 + x^2)^2 = 4x(1 - x^2)$.

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (1 + x^2)^2 = (1 - x^2)^2 + 4x^2$.

2) Soit S_F l'ensemble des solutions de l'équation (F) .

a) Montrer que $x \in S_F \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$.

b) En déduire l'ensemble S_F .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 189

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : (x + 2)^4 + x^4 = 82$. (On pourra poser $x = t - 1$.)

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 190

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(G) : \frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$$

(On pourra poser $t = 2x + \frac{3}{x}$.)

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 191

Calculer $\frac{x}{y}$ sachant que $2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 1 = 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 192

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) : \frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} = \frac{13}{5} \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{x} \right).$$

(On pourra poser $X = \frac{x}{2} + \frac{3}{x}$.)

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 193

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ et on note S l'ensemble de ses solutions.

1) Montrer que 0 n'est pas solution de l'équation (E) .

2) On pose $X = x + \frac{1}{x}$.

a) Montrer que $x \in S \Leftrightarrow 2X^2 - 7X + 5 = 0$.

b) En déduire l'ensemble S .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 194

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Série 3 **Systèmes et équations à paramètre****Exercice n° 195**

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} xy = 0 \\ 2x - 5y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} (x - 2)(y + 3) = 0 \\ (2x - y)(3x + y) = 0 \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 196

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ (x - 2)(y - 6) = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} |2x - y + 3| = 6 \\ |x| + y - 1 = 2 \end{cases}$$

Note : pour (S_1) , l'énoncé source imprime « $2x - (x - 2)(y - 6) = 0$ » ; la correction du document source traite $(x - 2)(y - 6) = 0$, retenu ici.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 197

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^2 - 2(1 + m)x + 4 = 0$, où m est un paramètre réel.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 198

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , les solutions du système

$$(S) : \begin{cases} mx + 3y = m^2 \\ 3x + my = 9 \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 199

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : a - x = 1 - a^2x$, où a est un paramètre réel.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7

CHAPITRE Raisonnement par récurrence

Notions travaillées

- Principe de récurrence : initialisation et hérédité
- Sommes et produits ; symboles Σ , $\prod$ et $n!$
- Inégalités démontrées par récurrence (inégalité de Bernoulli)
- Divisibilité ; fonctions et suites définies par une relation de récurrence

Dans ce chapitre

Série 1 – Sommes et produits	109
Série 2 – Inégalités démontrées par récurrence	120
Série 3 – Divisibilité	129
Série 4 – Fonctions et suites définies par récurrence	134

Série 1 Sommes et produits

Exercice n° 200

Montrer par récurrence que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} ;$
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} ;$
- 3) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Note : question 3 : coquille de l'énoncé source (« $n(x+1)(2x+1)$ ») corrigée.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 201

Montrer par récurrence que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$

2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 202

Montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2};$

2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

Note : question 1 : l'énoncé source imprime le dénominateur 4 ; la correction du document source établit $\frac{n(n+1)}{2}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 203

Montrer que :

$$1) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4};$$

$$2) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} n(1+n)(n+2).$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 204

Montrer par récurrence que :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$$

5) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$

7) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$

8) $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^n \geq n + 1$

9) $\forall n \in \mathbb{N}$ $3^n \geq 1 + 2n$

10) $\forall n \in \mathbb{N}$ $5n^3 + n$ est divisible par 6

11) $\forall n \in \mathbb{N}$ $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7

12) $\forall n \in \mathbb{N}$ $9^n - 1$ est divisible par 8

13) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $3^n + 4^n - 1$ est divisible par 6

Note : question 10 : l'énoncé source imprime « $5^{3n} + n$ » (faux pour $n = 0$) ; la correction du document source traite $5n^3 + n$, retenu ici.

Correction

Exercice n° 205

1) a) Calculer la différence $(k+1)^2 - k^2$.

b) En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n+1} k$.

2) a) Calculer la différence $(k+1)^3 - k^3$.

b) En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n+1} k^2$.

3) a) Calculer la différence $(k+1)^4 - k^4$.

b) En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n+1} k^3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 206

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = S_n \quad \text{avec} \quad S_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 207

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n + 1)(n^2 + 5n + 4)$.

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

3) a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; -2\}) \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

b) Retrouver le résultat de la question 2 sans raisonner par récurrence.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 208*Exercice d'application*

En utilisant la même méthode que dans l'exercice précédent, déterminer les réels $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \llbracket 0; 10 \rrbracket) \quad \frac{1}{x(x-1) \cdots (x-10)} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 209

Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 210

Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (n-k)^2 \times (-1)^k$.

1) Calculer S_3 et S_4 .

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 211

Soit n un entier naturel. On pose $u_n = \prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2$.

- 1) Calculer u_0 .
- 2) Montrer que $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^2$.
- 3) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2n + 3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 212*Autour du symbole Σ*

On note $\sum_{i=1}^n a_i$ la somme $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, où $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout i de $\{1; 2; \dots; n\}$. L'écriture

$\sum_{i=1}^n a_i$ s'écrit aussi $\sum_{k=1}^n a_k$ ou $\sum_{j=1}^n a_j$...

Propriétés du symbole Σ : (1) $\sum_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i$ (2) $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$ (3) $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$ (4) $\sum_{i=1}^n a = na$

- 1) On pose $S_1 = \sum_{k=1}^n k$.
 - a) Vérifier que $S_1 = \sum_{k=1}^n (n+1-k)$.
 - b) En déduire que $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.
 - c) Calculer $T_1 = \sum_{k=0}^n (2k+1)$ et $T_2 = \sum_{k=1}^n 2k$.
 - d) Calculer $T_3 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1$.

- 2) En utilisant l'égalité $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, montrer que $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
- 3) Montrer que $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
- 4)
 - a) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$.
 - b) Vérifier que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
 - c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n}$.
- 5) Soient $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S = \sum_{k=0}^n q^k$. Calculer $S - qS$, puis en déduire que $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Calculer la somme $S' = q^m + q^{m+1} + \dots + q^n$, où $m \in \mathbb{N}$ et $n > m$.

Note : dans le document source, les questions sont numérotées 1, 2, 4, 5, 6 (pas de question 3).

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Question 5 : la borne inférieure de la somme S est peu lisible dans l'énoncé ; la correction du document source utilise $k = 0$.

Correction

Exercice n° 213

Autour du symbole $\prod$

On note $\prod_{i=1}^n a_i$ le produit $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$. Le nombre $\prod_{i=1}^n a_i$ s'écrit aussi $\prod_{k=1}^n a_k$ ou $\prod_{j=1}^n a_j \dots$

Propriétés : (1) $\prod_{i=1}^n a_i b_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{i=1}^n b_i \right)$ (2) $\prod_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i=1}^n a_i$ (3) $\prod_{i=1}^n a = a^n$ (4) $\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=0}^{n-1} a_{n-i}$

1) a) Vérifier que $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_n}{a_0}$, où $a_i \in \mathbb{R}^*$ pour tout i de $\{0; 1; 2; \dots; n-1\}$.

b) En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k} \right) = n$.

2) On pose $P_n = \prod_{k=0}^n \cos \left(\frac{x}{2^{k+1}} \right)$. En utilisant la relation $\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$, montrer que

$$P_n = \frac{\sin x}{2^{n+1} \sin \left(\frac{x}{2^{n+1}} \right)}.$$

3) Vérifier que $\prod_{k=0}^n a^k = \sqrt{a^{n(n+1)}}$.

Rappel : $\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$ pour tout b de $\mathbb{R}_+^*$, et $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Correction

Exercice n° 214

Le symbole $n!$

On définit le nombre $n!$, où $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} 0! = 1! = 1 \\ n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq 2 \end{cases}$$

- 1) Calculer $3!; 4!; 5!; 6!; \frac{5!}{3!}; \frac{6!}{4!}; \frac{5!}{4!}$.
- 2) Vérifier que $(n+1)! = (n+1)n!$.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$(1) \quad \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \qquad (2) \quad n! = \prod_{k=1}^n (n+1-k)$$

- 4) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$.
- a) Montrer que $n \leq k(n+1-k) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.
- b) En déduire que $\sqrt{n^n} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Correction

Série 2 Inégalités démontrées par récurrence

Exercice n° 215

Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2^n > n$.

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 216

Montrer par récurrence que $(\forall n \geq 3) 3^n \geq n^3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 217

Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq 4 \Rightarrow 2^n \geq n^2$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 218

Montrer par récurrence que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3^n \geq 2n + 1 ;$
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq 5, \quad 3^n > 2^n + 5n^2 ;$
- 3) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 219

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 220

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$3n(2n+3)(n+1)^2 + (2n+3)(2n+1) \geq 3(2n+1)(n+1)^3.$$

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 221

Montrer par récurrence que :

1) $(\forall n \geq 6) \quad 2^n \geq (n+2)^2 ;$

2) $(\forall n \geq 1) \quad 4^n \geq 3^n + n 3^{n-1} ;$

3) $(\forall n \geq 1) \quad 5^n \leq 4^n + n 5^{n-1}.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 222

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq 3, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 223

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 4n^2 \geq (n+1)^2$.
- 2) a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 4^n \geq n^2$.
- b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4^n \geq n^2$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 224*Inégalité de Bernoulli*

Montrer par récurrence sur n que :

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Telle qu'elle est écrite, l'inégalité n'est pas vraie pour tout réel a ; la correction du document source commence par « soit a un réel positif ».

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 225

Soit x un réel strictement positif.

1) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2) En déduire que :

a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2^n \geq 1 + n ;$

b) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3^n \geq n ;$

c) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (1 + n)^n \geq 2^n.$

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Question 2.c : la correction du document source aboutit à $(n + 1)^n \geq 2n^n$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 226

1) Montrer que $(\forall a \in]0; +\infty[) ; a + \frac{1}{a} \geq 2$.

2) Soit x un réel positif tel que $x \neq 1$. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} \geq (1 + 2n) x^n.$$

Note : la correction du document source prend $x \in]0; +\infty[$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 227

Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2 \geq 2n + 3$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 228

- 1) Montrer que $3^{2n} - 1$ est un multiple de 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3^n > 2n$.
- 3) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k 2^{k-1} = (n-1) 2^n - n 2^{n-1} + 1.$$

- 4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n! \geq 2^{n-1}$.
- 5) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad P_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Correction

Exercice n° 229

Inégalité de Cauchy-Schwarz

- 1) Montrer que $a + \frac{1}{a} \geq 2$ pour tout a de l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer par récurrence que :

$$(1) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2.$$

- 3) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels. En considérant le polynôme $P(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2$, montrer que :

$$(2) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz. En déduire de nouveau l'inégalité (1).

Correction

Exercice n° 230

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels positifs.

a) Montrer que (1) $\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$.

b) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels de l'intervalle $[1; +\infty[$. Montrer que :

$$(2) \quad n + \prod_{i=1}^n b_i \geq 1 + \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n (1 + b_i) \geq \frac{2^n}{1 + n} \left(1 + \sum_{i=1}^n b_i \right).$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 231

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
- 2) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_{2^n} - 1 \geq \frac{n}{2}$.
- 3) La proposition $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \leq M$ est-elle vraie ?

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Série 3 Divisibilité**Exercice n° 232**

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 14 divise $21^n - 7^{2n}$.

Note : coquille de l'énoncé source (« 72ⁿ ») corrigée d'après la correction du document source.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 233

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 15 divise $4^{2n+2} - 1$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 234

Montrer par récurrence que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 \text{ divise } 3^n + 5^{n+1} ;$
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3 \text{ divise } 2^{2n} - 1.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 235

Montrer que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3 \text{ divise } 2^{2n+1} + 5^{2n} ;$
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 7 \text{ divise } 2^{n+2} + 3^{2n+1} ;$
- 3) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 9 \text{ divise } 4^n + 6n - 1.$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 236

Montrer que :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 2 \text{ est divisible par } 3 ;$
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n + 6n - 1 \text{ est divisible par } 9 ;$
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{6n+3} + 3^{4n+2} \text{ est divisible par } 17.$

Remarque : Si un entier naturel m divise deux entiers relatifs a et b , alors il divise toute combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de a et b .

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 237

On considère les fonctions propositionnelles définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$P(n) : \ll 3 \text{ divise } 4^n - 1 \gg \quad \text{et} \quad Q(n) : \ll 3 \text{ divise } 4^n + 1 \gg.$$

- 1) Montrer que les propositions $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n) \Rightarrow P(n+1)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ sont vraies.
- 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), 3 \text{ divise } 4^n - 1$.
- 3) La proposition $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow Q(n)$ est-elle vraie ?

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 238

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = 25^n + 2^{3n+4}$.

- 1) Déterminer deux entiers a et b tels que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$.
- 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n$ est divisible par 17.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 239

Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $a_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 240

Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $n^3 - n$ est divisible par 6.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 241

- 1) On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique entier naturel p tel que $n = 3p$ ou $n = 3p + 1$ ou $n = 3p + 2$. En déduire que le nombre $n(n^2 + 5)$ est un multiple de 3 pour tout n de $\mathbb{N}$.
- 2) Montrer par récurrence que $n(n^2 + 5)$ est un multiple de 3 pour tout n de $\mathbb{N}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 242

- 1) a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.
 b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $2^{3n+2} - 4$ est divisible par 7.
- 2) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $3^{2n+1} + 4^{n+1} - 2(-1)^n$ est divisible par 5.
- 3) Soit x un réel positif. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Série 4 Fonctions et suites définies par récurrence**Exercice n° 243**

Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(0) = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = 2f(n) + 5$.

- 1) Déterminer $f(1)$ et $f(2)$.
- 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(n) = 2^{n+3} - 5$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 244

Soit f la fonction numérique définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 2$ et $f(n+1) = 5f(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 1) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
- 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(n) = 2 \times 5^n$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 245

Soit g la fonction numérique définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(0) = -3$ et $g(n+1) = g(n) + \frac{5}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 1) Calculer $g(1)$ et $g(2)$.
- 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad g(n) = -3 + \frac{5}{2}n$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 246

On veut déterminer toutes les fonctions numériques f vérifiant :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1 \quad \text{et} \quad f(1) = a.$$

- 1) Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$.
- 2) En déduire $f(n)$ en fonction de n , où $n \in \mathbb{N}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 247

Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que si f est strictement croissante, alors $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(n) \geq n$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 248

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que :

$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \\ a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n \end{cases}$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PARTIE III

Problèmes de synthèse

Exercices mobilisant plusieurs types de raisonnement et problèmes longs.

8

CHAPITRE

Choisir le raisonnement adapté – Problèmes

Notions travaillées

- Choisir et combiner les différents types de raisonnement
- Principe des tiroirs (boules et urnes)
- Équations fonctionnelles ; partie entière d'un réel
- Rédaction d'une démonstration longue

Dans ce chapitre

Série 1 – Choisir le type de raisonnement convenable	138
Série 2 – Problèmes	143

Série 1 Choisir le type de raisonnement convenable

Exercice n° 249

Montrer que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (a, b) \in (]0; 1[)^2 \quad a + p = b + q \Rightarrow a = b \text{ et } p = q.$$

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE]

L'énoncé source est mal imprimé (« $a + P + b + q \Rightarrow$ et $P = q$ ») ; la version retenue est celle de la correction du document source.

Correction

Exercice n° 250

1) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$: $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$.

2) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments de $[0; 1]$. On pose

$$A_n = x_1 x_2 \cdots x_n \quad \text{et} \quad B_n = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n).$$

a) Montrer que $0 \leq A_n B_n \leq \frac{1}{4^n}$.

b) Montrer que $A_n \leq \frac{1}{2^n}$ ou $B_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 251

On choisit de manière aléatoire 6 entiers relatifs. Montrer qu'il existe au moins deux de ces nombres dont la différence est divisible par 5.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 252

On choisit 12 entiers relatifs deux à deux distincts, compris entre 1 et 99. Montrer qu'il existe au moins deux de ces nombres dont la différence s'écrit sous la forme 11 ou 22 ou 33 ... ou 88 ou 99.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 253

Soient n un entier naturel non nul et $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

- 1) Montrer que si P admet une racine entière relative q , alors q divise a_0 .
- 2) Quelles sont les racines entières relatives possibles du polynôme $6 + x - 3x^3 + x^4$?
- 3) Montrer que le polynôme $3 - x - x^2 - x^3 - x^4$ n'admet pas de racine entière relative.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 254

Soit f un polynôme du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b et c des réels, $a \neq 0$). Montrer que si l'équation $f(x) = x$ est impossible dans $\mathbb{R}$, alors l'équation $f(f(x)) = x$ l'est également.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 255

Soit $r = \frac{a}{b}$ un nombre rationnel, où a et b sont des entiers naturels premiers entre eux.

- 1) Montrer que si les seuls diviseurs premiers possibles de b sont 2 et 5, alors r est un nombre décimal.
- 2) Montrer que si b admet un diviseur premier différent de 2 et de 5, alors r n'est pas un nombre décimal.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 256

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $E = \{1; 2; 3\}$ à valeurs dans lui-même, telle que

$$f(2) > f(f(1)) \quad \text{et} \quad f(3) > f(f(2)).$$

- 1) Établir que $f(2) \neq 3$ et $f(1) \neq 2$.
- 2) Montrer que si $f(1) = 3$, alors $f(2) = 3$.
- 3) Déterminer explicitement la fonction f .

Correction

Exercice n° 257

Soient $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ cent entiers naturels tels que :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = x_1 x_2 \dots x_{100}.$$

- 1) Montrer qu'au moins 93 de ces nombres sont égaux à 1.
- 2) En déduire les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ sachant que 98 d'entre eux sont égaux à 1.

Correction

Série 2 Problèmes

Exercice n° 258

Problème – Principe des tiroirs

- 1) Montrer que si l'on distribue $n + 1$ boules dans n urnes, avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe au moins une urne contenant au moins deux boules.
- 2) Soient $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ des réels de l'intervalle $[0; 20[$ tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_{25}$. On veut démontrer le résultat suivant : il existe au moins un élément i de $\llbracket 1; 25 \rrbracket$ tel que la distance entre x_i et x_{i+1} est strictement inférieure à 1.
 - a) Quantifier le résultat précédent.
 - b) Nier la proposition obtenue à la question précédente.
 - c) En utilisant le raisonnement par l'absurde, établir le résultat.
 - d) En utilisant la question 1, retrouver le résultat (on pourra considérer les intervalles $[k; k + 1[$, avec $k = 0, 1, 2, \dots, 19$, comme des urnes).

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 259

Le but de ce problème est de déterminer trois entiers naturels non nuls a , b et c vérifiant

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $a \leq b \leq c$.

- 1) Montrer que $1 \leq \frac{3}{a}$.
- 2) En déduire que $a \in \{1; 2; 3\}$.
- 3) Étudier le cas $a = 1$.
- 4) On suppose que $a = 2$. Montrer que $b \in \{2; 3; 4\}$, puis étudier séparément tous les cas possibles.
- 5) On suppose que $a = 3$. Déterminer les valeurs de b et de c .
- 6) Déterminer toutes les solutions possibles.

Correction

Exercice n° 260

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad f(n) + f(m) = f(n + m) - nm - 1.$$

- 1) Montrer que $f(0) = -1$ et $f(-1) = -2$.
- 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad f(n) + f(-n) = n^2 - 2$.
- 3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad f(n + 1) - f(n) = n + 2$.
- 4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(1 + n)}{2}$.
- 5) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) \quad f(n) = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$.
- 6) En déduire la forme explicite de $f(n)$ lorsque $n \in \mathbb{Z}_-$.
- 7) Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad f(n) + f(m) = f(n + m) - nm - 1.$$

Correction

Exercice n° 261

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe aucune fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans lui-même vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad f(n+1) = f(n) + f(f(n)) \quad (I)$$

Pour arriver à ce résultat, on utilisera le raisonnement par l'absurde. On suppose donc que le problème (I) admet une solution notée f .

- 1) Montrer que f est strictement croissante.
- 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad f(n) \leq n$.
- 3) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad f(n) = n$.
- 4) Conclure.

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n° 264

Équation fonctionnelle

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} (1) : (\exists a \in \mathbb{R}_+^*) : f(1) = a - 1 \\ (2) : \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : f(x + y) + x + y = (f(x) + x)(f(y) + y) \end{cases}$$

- 1)
 - a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) + x \geq 0$ (remarquer que $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$).
 - b) En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) + x > 0$.
 - c) Montrer que $f(0) = 1$.
- 2)
 - a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) - x = \frac{1}{f(x) + x}$.
 - b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}) : f(nx) + nx = [f(x) + x]^n$.
 - c) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{Z}) : f(x) = a^x - x$.

Correction

Exercice n° 265*Partie entière d'un réel*

Pour tout réel x , il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. Ce nombre n est appelé *partie entière* du réel x et noté $E(x)$. On a ainsi :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Exemples : $E(\sqrt{2}) = 1$ car $1 < \sqrt{2} < 2$; $E(-1,3) = -2$ car $-2 < -1,3 < -1$. *Remarque :*
 $(\forall x \in \mathbb{Z}) : E(x) = x$.

1) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : E(\sqrt{n^2 + 1}) = n$.

b) Déterminer $E(\sqrt{n^2 + 4n})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

2) a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : x - 1 < E(x) \leq x$.

b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists r \in [0; 1[) : x = E(x) + r$.

3) a) Montrer que $\forall (n; p) \in \mathbb{Z}^2 : n + 1 > p \Leftrightarrow n \geq p$.

b) Montrer que $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$.

4) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall p \in \mathbb{Z}) \quad (1) \quad E(x + p) = E(x) + p$.

b) Montrer que :

$$(2) \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : E(x + y) \geq E(x) + E(y)$$

$$(3) \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$$

5) Montrer que (4) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}) : E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

6) a) Montrer que (5) $(\forall x \in \mathbb{R}) : E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$.

b) Déterminer la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n E\left(\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right)$ en fonction de n et de x .

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$(1) \quad E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2 \quad (2) \quad E(2x) = x - 1 \quad (3) \quad E\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \quad (4) \quad E(x) + |x - 1| = x$$

Correction

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



ABDELLAOUI ACADEMY

Mathématiques – 1^{re} Bac Sciences Expérimentales

Notions de logique – Séries d'exercices
Polycopié préparé par ABDELLAOUI Said
Année scolaire 2026 – 2027 – Version 1.0