

MATHÉMATIQUES

Notions de logique

Séries d'exercices

1^{re} année du Baccalauréat**Sciences Expérimentales**

Exercices de logique traduits, classés par notion et organisés en séries progressives : propositions et connecteurs, quantificateurs, raisonnements (déduction, équivalence, contraposée, absurde, disjonction des cas, récurrence) et problèmes de synthèse. Chaque exercice comporte un espace de correction.

Professeur

ABDELLAOUI Said

Établissement :



Informations générales

Titre	Notions de logique – Séries d'exercices
Matière	Mathématiques
Niveau	1 ^{re} année du Baccalauréat
Classe / filière	1 ^{re} Bac – Sciences Expérimentales
Professeur	ABDELLAOUI Said
Établissement	
Année scolaire	2026 – 2027
Version	1.0

Organisation du polycopié

Le polycopié est organisé en **parties**, **chapitres** et **séries**. Chaque chapitre s'ouvre sur la liste des notions travaillées et un mini-sommaire de ses séries. Les exercices sont numérotés de façon continue du début à la fin du document, ce qui permet de les désigner sans ambiguïté en classe (« exercice n° 37 »).

Chaque exercice comporte deux parties :

- la partie supérieure contient l'**énoncé** complet et les questions ;
- la partie inférieure, intitulée **Correction**, est réservée à la rédaction de l'élève (lignes pointillées).

Notations et conventions

$\bar{p}$	négation de la proposition p (aussi notée « non p »)
p et q , p ou q	conjonction, disjonction
$p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$	implication, équivalence
$\forall, \exists, \exists!$	« pour tout », « il existe », « il existe un unique »
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*$	$[0; +\infty[$ et $]0; +\infty[$
$\llbracket a; b \rrbracket$	ensemble des entiers k tels que $a \leq k \leq b$
$E(x)$	partie entière du réel x
$\sum_{k=1}^n a_k, \prod_{k=1}^n a_k$	somme et produit des termes $a_1, \dots, a_n$

Mentions de contrôle

Les énoncés ont été traduits et recomposés fidèlement à partir des documents sources. Lorsqu'un passage était illisible ou ambigu, il est signalé dans l'énoncé par la mention [À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE]. Les corrections typographiques manifestes (coquilles du document source) sont signalées par une courte note en petits caractères.

Sommaire

Informations générales	1
I Logique des propositions et quantificateurs	3
Chapitre 1 Propositions, connecteurs et lois logiques.	3
Série 1 – Valeur de vérité d’une proposition	3
Série 2 – Négation et lois logiques	6
Chapitre 2 Fonctions propositionnelles et quantificateurs	14
Série 1 – Écriture symbolique et négation	14
Série 2 – Valeur de vérité des propositions quantifiées.	20
Série 3 – Approfondissement sur les quantificateurs.	31
II Raisonnements mathématiques	34
Chapitre 3 Raisonnement déductif et raisonnement par équivalence	34
Série 1 – Raisonnement déductif	34
Série 2 – Raisonnement par équivalences successives	48
Série 3 – Inégalités classiques et moyennes	57
Chapitre 4 Raisonnement par contraposée et raisonnement par l’absurde	59
Série 1 – Raisonnement par contraposée	59
Série 2 – Raisonnement par l’absurde	65
Chapitre 5 Raisonnement par disjonction des cas	75
Série 1 – Démontrer par disjonction des cas	75
Série 2 – Valeurs absolues : équations, inéquations, systèmes	79
Chapitre 6 Applications : équations, inéquations et systèmes	84
Série 1 – Équations et inéquations irrationnelles	84
Série 2 – Changement de variable	87
Série 3 – Systèmes et équations à paramètre	90
Chapitre 7 Raisonnement par récurrence	93
Série 1 – Sommes et produits.	93
Série 2 – Inégalités démontrées par récurrence.	105
Série 3 – Divisibilité	113
Série 4 – Fonctions et suites définies par récurrence	117
III Problèmes de synthèse	119
Chapitre 8 Choisir le raisonnement adapté – Problèmes	119
Série 1 – Choisir le type de raisonnement convenable	119
Série 2 – Problèmes.	123

PARTIE I

Logique des propositions et quantificateurs

Propositions, connecteurs logiques, lois logiques, quantificateurs et négation.

1

CHAPITRE

Propositions, connecteurs et lois logiques

Notions travaillées

- Valeur de vérité d'une proposition
- Négation, conjonction, disjonction
- Implication et équivalence ; condition nécessaire, condition suffisante
- Tables de vérité et lois logiques (lois de Morgan, contraposée, distributivité)

Dans ce chapitre

Série 1 – Valeur de vérité d'une proposition. . . 3

Série 2 – Négation et lois logiques 6

Série 1 Valeur de vérité d'une proposition

Exercice n° 1

Soient p , q et r trois propositions telles que p est vraie, q et r sont fausses. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) $(p \text{ et } q) \Rightarrow r$

3) $(p \Rightarrow \bar{q}) \text{ et } r$

2) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

4) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \bar{r}$

Correction

On utilise les tables de vérité avec p vraie, q et r fausses.

1)

p	q	r	$p \text{ et } q$	$(p \text{ et } q) \Rightarrow r$
V	F	F	F	V

2)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
V	F	F	F	V

3)

p	q	r	$\bar{q}$	$p \Rightarrow \bar{q}$	$(p \Rightarrow \bar{q}) \text{ et } r$
V	F	F	V	V	F

4)

p	q	r	$\bar{r}$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \bar{r}$
V	F	F	V	F	V

Donc les propositions 1), 2) et 4) sont vraies et la proposition 3) est fausse.

Exercice n° 2

Donner la négation de chacune des propositions suivantes en précisant sa valeur de vérité :

$$p : \frac{25}{4} \neq \frac{5}{2}$$

$$r : \pi \in \mathbb{Q}$$

$$q : \sqrt{17} < \sqrt{5} + \sqrt{12}$$

$$s : \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$$

Correction

- $\bar{p} : \frac{25}{4} = \frac{5}{2}$. Or $\frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{5}{2}\right)^2 \neq \frac{5}{2}$ (car $a^2 = a \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 1$). Donc $\bar{p}$ est fausse et p est vraie.
- $\bar{q} : \sqrt{17} \geq \sqrt{5} + \sqrt{12}$. Pour $a, b > 0$: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} > a + b = (\sqrt{a+b})^2$, donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$; en particulier $\sqrt{5} + \sqrt{12} > \sqrt{17}$. Donc q est vraie et $\bar{q}$ fausse.
- $\bar{r} : \pi \notin \mathbb{Q}$. $\bar{r}$ est vraie (π est irrationnel), donc r est fausse.
- $\bar{s} : \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$. On a $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$: $\bar{s}$ est vraie et s est fausse.

Rappel : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exercice n° 3

Déterminer, parmi les propositions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Justifier.

$$a : -3 \notin \mathbb{N} \text{ et } \sqrt{16} + \sqrt{25} = \sqrt{16+25}$$

$$b : \sqrt{5} > 2 \text{ ou } (-\sqrt{3})^2 = -3$$

$$c : \left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 = \frac{6}{5} \Rightarrow \sqrt{\frac{6}{5}} \in \mathbb{Q}$$

$$d : \sqrt{3} > \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{3} \neq \sqrt{2} + 1$$

$$e : (a \in \mathbb{N}) \quad a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

$$f : (a \in \mathbb{Z}) \quad a^2 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \in \mathbb{N}$$

Correction

- a est fausse : « $-3 \notin \mathbb{N}$ » est vraie, mais $\sqrt{16} + \sqrt{25} = 9 \neq \sqrt{41}$; une conjonction est vraie seulement si ses deux termes sont vrais.
- b est vraie, car $\sqrt{5} > 2$ est vraie ($5 > 4$).
- c est fausse : $\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 = \frac{6}{5}$ est vraie et $\sqrt{\frac{6}{5}} \in \mathbb{Q}$ est fausse ; or le vrai n'implique pas le faux.
- d est vraie : $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$ est vraie ($\frac{3}{2} = 1,5$ et $\sqrt{3} \approx 1,7$) et $\sqrt{3} \neq \sqrt{2} + 1$ est vraie (car $\sqrt{3} < 2 < \sqrt{2} + 1$).
- e est vraie : pour $a \in \mathbb{N}$, $a^2 = 1 \Leftrightarrow (a-1)(a+1) = 0 \Leftrightarrow a-1 = 0$ (car $a+1 \geq 1$) $\Leftrightarrow a = 1$.
- f est fausse : $(-1)^2 = 1 \in \mathbb{N}$, mais $-1 \notin \mathbb{N}$.

Exercice n° 4

Soient p, q et r trois propositions. On considère la proposition

$$A : (p \text{ et } q) \Rightarrow r.$$

- 1) Donner la négation de A .
- 2) Déterminer la valeur de vérité de A dans chacun des cas suivants :
 - a) p est fausse ;
 - b) r est vraie.

Correction

- 1) On a $A : (p \text{ et } q) \Rightarrow r$. Comme $\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow (A \text{ et } \bar{B})$, la négation de A est la proposition $\bar{A} : (p \text{ et } q) \text{ et } \bar{r}$.
- 2) a) Si p est fausse, alors $(p \text{ et } q)$ est fausse ; par conséquent $(p \text{ et } q) \Rightarrow r$ est vraie (une implication dont la prémisse est fausse est vraie). D'où A est vraie.
 b) Si r est vraie, alors $\bar{r}$ est fausse, donc $[(p \text{ et } q) \text{ et } \bar{r}]$ est fausse. Comme $\bar{A}$ est fausse, A est vraie.

Exercice n° 5

Soient p et q deux propositions. On considère la proposition

$$A : (p \Rightarrow q) \Rightarrow \bar{q}.$$

- 1) Donner la négation de A .
- 2) Déterminer la valeur de vérité de A dans chacun des cas suivants :
 - a) q est vraie ;
 - b) q est fausse.

Correction

- 1) $A : (p \Rightarrow q) \Rightarrow \bar{q}$, donc $\bar{A} : (p \Rightarrow q) \text{ et } \bar{\bar{q}}$, c'est-à-dire $\bar{A} : (p \Rightarrow q) \text{ et } q$.
- 2) On utilise la valeur de vérité de $\bar{A}$ pour déduire celle de A .
 a) Si q est vraie, alors $p \Rightarrow q$ est vraie, donc $[(p \Rightarrow q) \text{ et } q]$ est vraie. Comme $\bar{A}$ est vraie, A est fausse.
 b) Si q est fausse, alors $[(p \Rightarrow q) \text{ et } q]$ est fausse. Comme $\bar{A}$ est fausse, A est vraie.

Exercice n° 6*Condition nécessaire, condition suffisante*

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 1 = 0$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- 1) Pour que $x^2 - 1 = 0$, il faut que $x = 1$.
- 2) Pour que $x^2 - 1 = 0$, il faut et il suffit que $x = 1$.
- 3) Pour que $x^2 - 1 = 0$, il suffit que $x = 1$.
- 4) Si $x^2 - 1 = 0$, alors $x = 1$.

Correction

- 1) Fausse : -1 vérifie $x^2 - 1 = 0$, cependant $-1 \neq 1$.
- 2) Fausse, pour la même raison.
- 3) Vraie : il suffit de remplacer x par 1 : $1^2 - 1 = 0$.
- 4) Fausse, car x peut aussi prendre la valeur -1 .

Série 2 Négation et lois logiques**Exercice n° 7**

Soient P , Q et R trois propositions. Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$$P_1 : P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \qquad P_2 : P \Rightarrow Q$$

Correction

- $P_1 : P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$; sa négation : $\overline{P_1} : \overline{P} \text{ ou } (\overline{Q} \text{ et } \overline{R})$.
- $P_2 : P \Rightarrow Q$, c'est-à-dire $\overline{P} \text{ ou } Q$; sa négation : $\overline{P_2} : P \text{ et } \overline{Q}$.

Exercice n° 8*Lois de Morgan – négation d'une implication*

Soient p et q deux propositions.

1) Montrer, à l'aide d'une table de vérité, que :

$$(1) \quad \overline{(p \text{ et } q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ ou } \bar{q}) \qquad (2) \quad \overline{(p \text{ ou } q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ et } \bar{q})$$

2) a) Montrer que : (3) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ ou } q)$.

b) En déduire que : (4) $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \text{ et } \bar{q})$.

Correction

1)

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \text{ et } q$	$\overline{(p \text{ et } q)}$	$\bar{p} \text{ ou } \bar{q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Les colonnes $\overline{(p \text{ et } q)}$ et $\bar{p} \text{ ou } \bar{q}$ sont identiques : (1) est vraie. De la même manière on établit (2). Ces deux lois portent le nom de lois de Morgan.

2) a)

p	q	$\bar{p}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{p} \text{ ou } q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Les colonnes $p \Rightarrow q$ et $\bar{p} \text{ ou } q$ sont identiques : (3) est vraie.

b) D'après (3) et les lois de Morgan : $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \text{ ou } q)} \Leftrightarrow (p \text{ et } \bar{q})$.

Cette équivalence donne la négation d'une implication ; elle est très utile dans les raisonnements.

Exercice n° 9

Soient P, q et R des propositions. Étudier la vérité des propositions suivantes :

- 1) $(P \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{P})$
- 2) $\overline{(P \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \bar{q})$
- 3) $\overline{(P \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } q)$
- 4) $[(P \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Correction

On note X la proposition étudiée et on utilise les tables de vérité (1 : vrai, 0 : faux).

1)

P	q	$P \Rightarrow q$	$\bar{q}$	$\bar{P}$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{P}$	X
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

2)

P	q	$P \Rightarrow q$	$\overline{(P \Rightarrow q)}$	$P \text{ et } \bar{q}$	X
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1

3)

P	q	$\overline{(P \Rightarrow q)}$	$\bar{P} \text{ ou } q$	$\overline{(\bar{P} \text{ ou } q)}$	X
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1

4)

P	q	R	$P \Rightarrow q$	$q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	X
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Dans chaque cas, la colonne X ne contient que des 1 : les quatre propositions sont vraies (ce sont des lois logiques).

Exercice n° 10

Soient p et q deux propositions. Montrer, en utilisant les tables de vérité, que les propositions suivantes sont des lois logiques :

- 1) $p \Rightarrow (\bar{p} \Rightarrow q)$
- 2) $(p \text{ et } q) \Rightarrow (p \text{ ou } q)$
- 3) $(p \Rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow \overline{(p \text{ et } q)}$
- 4) $(p \text{ et } \bar{p}) \Rightarrow q$
- 5) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q})$

Note : dans l'énoncé source, la question 4 est imprimée « $(p \text{ et } \bar{q}) \Rightarrow q$ », qui n'est pas une loi logique ; la correction du document source traite $(p \text{ et } \bar{p}) \Rightarrow q$, retenue ici.

Correction

1)

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (\bar{p} \Rightarrow q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

2)

p	q	$p \text{ et } q$	$p \text{ ou } q$	$(p \text{ et } q) \Rightarrow (p \text{ ou } q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

3)

p	q	$\bar{q}$	$p \Rightarrow \bar{q}$	$p \text{ et } q$	$\overline{(p \text{ et } q)}$	(3)
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

4)

p	q	$\bar{p}$	$p \text{ et } \bar{p}$	$(p \text{ et } \bar{p}) \Rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

5)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$	(5)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Dans chaque cas, la dernière colonne ne contient que des « V » : chaque proposition est une loi logique.

Exercice n° 11

Soient p , q et r trois propositions. Montrer que :

- 1) $A : [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et } q) \Rightarrow r]$;
- 2) $B : [p \Rightarrow (q \text{ et } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ et } (p \Rightarrow r)]$.

Correction

On utilise $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ ou } q)$ et les lois de Morgan.

- 1) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [\bar{p} \text{ ou } (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [\bar{p} \text{ ou } (\bar{q} \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(\bar{p} \text{ ou } \bar{q}) \text{ ou } r] \Leftrightarrow [\overline{(p \text{ et } q)} \text{ ou } r] \Leftrightarrow [(p \text{ et } q) \Rightarrow r]$.
- 2) $[p \Rightarrow (q \text{ et } r)] \Leftrightarrow [\bar{p} \text{ ou } (q \text{ et } r)] \Leftrightarrow [(\bar{p} \text{ ou } q) \text{ et } (\bar{p} \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ et } (p \Rightarrow r)]$.

Exercice n° 12

Soient P, Q et R des propositions. Montrer les équivalences suivantes :

- 1) $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \Rightarrow R]$
- 2) $[(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)]$

Correction

- 1) $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [\bar{P} \text{ ou } (\bar{Q} \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(\bar{P} \text{ ou } \bar{Q}) \text{ ou } R] \Leftrightarrow [\overline{(P \text{ et } Q)} \text{ ou } R] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \Rightarrow R]$.
- 2) $[(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [\overline{(P \text{ ou } Q)} \text{ ou } R] \Leftrightarrow [(\bar{P} \text{ et } \bar{Q}) \text{ ou } R] \Leftrightarrow [(\bar{P} \text{ ou } R) \text{ et } (\bar{Q} \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)]$.

Exercice n° 13

Soient P et Q deux propositions. Montrer que :

- 1) $P \Leftrightarrow [P \text{ et } (P \text{ ou } Q)]$;
- 2) $P \Leftrightarrow [P \text{ ou } (P \text{ et } Q)]$.

Correction

1)

P	Q	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ et } (P \text{ ou } Q)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

vérité : elles sont équivalentes.

Les propositions P et $P \text{ et } (P \text{ ou } Q)$ ont la même valeur de

2)

P	Q	$P \text{ et } Q$	$P \text{ ou } (P \text{ et } Q)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

: elles sont équivalentes.

Les propositions P et $P \text{ ou } (P \text{ et } Q)$ ont la même valeur de vérité

Exercice n° 14

Soient P et Q deux propositions. Montrer que :

- 1) la proposition $\overline{(P \text{ ou } \overline{P})}$ est fausse ;
- 2) la proposition $(Q \text{ et } \overline{Q})$ ou $(P \text{ ou } \overline{P})$ est vraie ;
- 3) la proposition $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est vraie.

Correction

a)

P	$\overline{P}$	$P \text{ ou } \overline{P}$	$\overline{(P \text{ ou } \overline{P})}$
0	1	1	0
1	0	1	0

c)

P	Q	$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

b)

P	Q	$P \text{ ou } \overline{P}$	$Q \text{ et } \overline{Q}$	$(Q \text{ et } \overline{Q}) \text{ ou } (P \text{ ou } \overline{P})$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1

Donc a) est fausse, b) et c) sont vraies.

Exercice n° 15*Distributivité*

1) Soient p, q et r des propositions. Montrer que :

$$(1) \quad [p \text{ et } (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)]$$

$$(2) \quad [p \text{ ou } (q \text{ et } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r)]$$

2) a) Développer $(x - 1)(y - 2)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$(S) : \begin{cases} xy - y + 2 - 2x = 0 \\ yx^2 - (y^2 + 1)x + y = 0 \end{cases}$$

Correction

1)

p	q	r	$q \text{ ou } r$	$p \text{ et } q$	$p \text{ et } r$	$p \text{ et } (q \text{ ou } r)$	$(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Les deux dernières colonnes sont identiques, d'où (1). On établit (2) de la même manière ; (1) et (2) sont les lois de distributivité.

2) a) $(x - 1)(y - 2) = xy - 2x - y + 2$.

b) La première équation s'écrit $(x - 1)(y - 2) = 0$, soit $x = 1$ ou $y = 2$. D'après (1), (S)

$$\text{équivalent à } (S_1) \text{ ou } (S_2) \text{ avec } (S_1) \begin{cases} x = 1 \\ y - (y^2 + 1) + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} ;$$

$$(S_2) \begin{cases} y = 2 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ (2x - 1)(x - 2) = 0 \end{cases} .$$

$$\text{Donc } S = \left\{ (1, 1) ; \left(\frac{1}{2}, 2 \right) ; (2, 2) \right\}.$$

Exercice n° 16

1) Soient p, q et r des propositions. Montrer que :

$$[p \Rightarrow (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et } \bar{q}) \Rightarrow r].$$

2) Montrer que : $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) ; (ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0)$.

Correction

1) D'après l'exercice sur les lois de Morgan et l'implication $(A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \text{ ou } B) : [p \Rightarrow (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [\bar{p} \text{ ou } (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(\bar{p} \text{ ou } q) \text{ ou } r] \Leftrightarrow [\overline{(p \text{ et } \bar{q})} \text{ ou } r] \Leftrightarrow [(p \text{ et } \bar{q}) \Rightarrow r]$. (On peut aussi utiliser une table de vérité.)

2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors évidemment $ab = 0$.

Réciproquement, d'après 1), l'implication $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$ équivaut à $(ab = 0 \text{ et } a \neq 0) \Rightarrow b = 0$. Or si $ab = 0$ et $a \neq 0$, alors $\frac{1}{a}(ab) = 0$, soit $\left(\frac{1}{a}a\right)b = 0$, d'où $b = 0$. Ainsi $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) (ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0)$.

Exercice n° 17

Soient P et Q deux propositions. On note $P * Q$ la proposition $\overline{(P \text{ ou } Q)}$. Écrire les propositions suivantes sans utiliser le symbole $*$:

1) $(P * P) * (Q * Q)$

3) $(P * Q) * (P * Q)$

2) $P * (Q * Q)$

4) $(P * P) * (P * P)$

Correction

On a $P * P = \overline{(P \text{ ou } P)} = \bar{P}$ et $Q * Q = \bar{Q}$.

1) $(P * P) * (Q * Q) = \bar{P} * \bar{Q} = \overline{(\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})}$, c'est-à-dire P et Q .

2) $P * (Q * Q) = P * \bar{Q} = \overline{(P \text{ ou } \bar{Q})}$, c'est-à-dire $\bar{P}$ et Q .

3) $(P * Q) * (P * Q) = \overline{(P * Q)} = \overline{\overline{(P \text{ ou } Q)}}$, c'est-à-dire P ou Q .

4) $(P * P) * (P * P) = \bar{P} * \bar{P} = \overline{\bar{P}}$, c'est-à-dire P .

2

CHAPITRE

Fonctions propositionnelles et quantificateurs

Notions travaillées

- Fonction propositionnelle ; quantificateurs $\forall, \exists, \exists!$
- Traduction d'un énoncé en langage symbolique
- Négation d'une proposition quantifiée ; ordre des quantificateurs
- Valeur de vérité d'une proposition quantifiée (exemple, contre-exemple)

Dans ce chapitre

- Série 1 – Écriture symbolique et négation . . . 14
- Série 2 – Valeur de vérité des propositions quantifiées 20
- Série 3 – Approfondissement sur les quantificateurs 31

Série 1 Écriture symbolique et négation

Exercice n° 18

Écrire les propositions suivantes en utilisant les symboles logiques, écrire leur négation et déterminer leur valeur de vérité.

p : Il n'existe pas de nombre rationnel solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$.

q : Le polynôme $x^2 - 3x + 1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

r : Pour tout entier naturel n , il existe au moins un nombre réel x tel que $x > n$.

s : Si le carré d'un réel quelconque est strictement supérieur à 1, alors ce nombre est positif.

t : Tout entier naturel multiple de 2 et de 4 est multiple de 8.

Note : pour s , la correction du document source écrit $x^2 \geq 1$ au lieu de $x^2 > 1$.

Correction

- p : $(\forall x \in \mathbb{Q}) ; x^2 - 2 \neq 0$. On a $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, donc p est vraie.
 $\bar{p}$: $(\exists x \in \mathbb{Q}) / x^2 - 2 = 0$.
- q : $(\exists x \in \mathbb{R}) / x^2 - 3x + 1 = 0$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$, donc l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: q est vraie.
 $\bar{q}$: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 - 3x + 1 \neq 0$.
- r : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x > n$. $\bar{r}$: $(\exists n \in \mathbb{N}) / (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \leq n$.
Si $\bar{r}$ était vraie, $\mathbb{R}$ serait majoré par n , ce qui est impossible. Donc $\bar{r}$ est fausse et par suite r est vraie.
- s : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$. $\bar{s}$: $(\exists x \in \mathbb{R}) / x^2 \geq 1$ et $x < 0$.
Pour $x = -2$: $x^2 = 4 \geq 1$ et $-2 < 0$. Donc $\bar{s}$ est vraie et par suite s est fausse.
- t : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (n \in 2\mathbb{N} \text{ et } n \in 4\mathbb{N}) \Rightarrow n \in 8\mathbb{N}$. $\bar{t}$: $(\exists n \in \mathbb{N}) / n \in 2\mathbb{N} \text{ et } n \in 4\mathbb{N} \text{ et } n \notin 8\mathbb{N}$.
Pour $n = 12$: $12 \in 2\mathbb{N}$, $12 \in 4\mathbb{N}$ et $12 \notin 8\mathbb{N}$. Donc $\bar{t}$ est vraie, et t est fausse.

Exercice n° 19

Écrire chacune des propositions suivantes à l'aide des symboles logiques, puis dire si elle est vraie ou fausse.

- 1) Aucun nombre rationnel n'est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$.
- 2) Pour tous nombres rationnels x et y , il existe un nombre rationnel z tel que $x < z$ et $z < y$.

Correction

- 1) $P : (\forall x \in \mathbb{Q}) : x^2 - 3 \neq 0$; sa négation : $\bar{P} : (\exists x \in \mathbb{Q}) : x^2 - 3 = 0$. Les racines de $x^2 - 3 = 0$ sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$, qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$. Donc $\bar{P}$ est fausse et P est vraie.
- 2) $Q : (\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2) (\exists z \in \mathbb{Q}) : x < z \text{ et } z < y$; sa négation : $\bar{Q} : (\exists (x, y) \in \mathbb{Q}^2) (\forall z \in \mathbb{Q}) : x \geq z \text{ ou } z \geq y$.
 $\bar{Q}$ est vraie en prenant $x = y = 0$: pour tout $z \in \mathbb{Q}$, $0 \geq z$ ou $z \geq 0$. Donc Q est fausse.

Exercice n° 20

Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et des connecteurs logiques :

- p : il existe au moins un réel a tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a $a \leq x$;
- q : pour tous a et b de $\mathbb{R}$, on a $(a + b)^2 \geq 4ab$;
- r : pour tout x de $\mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif p tel que $p \leq x$;
- s : tout entier naturel divisible par 4 est pair ;
- t : pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, il existe au moins un α de $\mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$, si $|x - 1| < \alpha$ alors $\left| \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Correction

- $p : (\exists a \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}^+) : a \leq x$
- $q : (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : (a + b)^2 \geq 4ab$, qui s'écrit aussi $(\forall a \in \mathbb{R}) (\forall b \in \mathbb{R}) : (a + b)^2 \geq 4ab$
- $r : (\forall x \in \mathbb{R}) (\exists! p \in \mathbb{Z}) : p \leq x$
- $s : (\forall n \in \mathbb{N}) : [(\exists k \in \mathbb{N} : n = 4k) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k)]$
- $t : (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*) (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*) (\forall x \in \mathbb{R}) : |x - 1| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

Exercice n° 21

Écrire les propositions suivantes à l'aide des symboles et des connecteurs logiques, puis écrire leurs négations :

p : le carré de tout nombre réel est positif ;

q : l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ admet une solution réelle ;

r : il n'existe aucun entier relatif x tel que $x^2 = 2$;

s : il existe un nombre réel plus petit que tous les nombres réels ;

u : si un nombre réel est inférieur à -1 , alors il est strictement négatif ;

v : le produit de deux nombres réels est nul si et seulement si l'un de ces deux nombres est nul.

Correction

$$p : (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0$$

$$q : (\exists x \in \mathbb{R}); x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$r : (\forall x \in \mathbb{Z}); x^2 \neq 2$$

$$s : (\exists a \in \mathbb{R}); (\forall x \in \mathbb{R}) : a \leq x$$

$$u : (\forall a \in \mathbb{R}); (a \leq -1 \Rightarrow a < 0)$$

$$v : \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 (ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0), \text{ qui s'écrit}$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 (ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0) \text{ et } (a = 0 \text{ ou } b = 0 \Rightarrow ab = 0) ;$$

$$\bar{v} : (\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2) [ab = 0 \text{ et } (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)] \text{ ou } [(a = 0 \text{ ou } b = 0) \text{ et } ab \neq 0]$$

$$\bar{p} : (\exists x \in \mathbb{R}), x^2 < 0$$

$$\bar{q} : (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 3x + 1 \neq 0$$

$$\bar{r} : (\exists x \in \mathbb{Z}); x^2 = 2$$

$$\bar{s} : (\forall a \in \mathbb{R}); (\exists x \in \mathbb{R}); a > x$$

$$\bar{u} : (\exists a \in \mathbb{R}); (a \leq -1 \text{ et } a \geq 0)$$

Exercice n° 22

Écrire à l'aide des quantificateurs, puis déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) Il existe au moins deux nombres irrationnels dont le produit est nul.

2) La somme d'un nombre rationnel et de $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Correction

1) $(\exists x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) : xy = 0$. Cette proposition est fausse, car les nombres irrationnels sont tous non nuls.

2) $(\forall x \in \mathbb{Q}) : x + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Vraie : sinon il existerait un rationnel x_0 et un rationnel y_0 tels que $x_0 + \sqrt{3} = y_0$, d'où $\sqrt{3} = y_0 - x_0 \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.

Exercice n° 23

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs, puis écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

- | | |
|---------------------------|---|
| 1) f est paire ; | 5) f ne s'annule jamais ; |
| 2) f est impaire ; | 6) f est nulle ; |
| 3) f est croissante ; | 7) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{Z}$; |
| 4) f est décroissante ; | 8) f n'atteint aucune valeur de $\mathbb{Z}$. |

Correction

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(-x) = f(x)$; sa négation est $(\exists x \in \mathbb{R}) : f(-x) \neq f(x)$.
- 2) $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(-x) = -f(x)$; sa négation est $(\exists x \in \mathbb{R}) : f(-x) \neq -f(x)$.
- 3) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$; sa négation est $(\exists x, y \in \mathbb{R}) : x \leq y$ et $f(x) > f(y)$.
- 4) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$; sa négation est $(\exists x, y \in \mathbb{R}) : x \leq y$ et $f(x) < f(y)$.
- 5) $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \neq 0$; sa négation est $(\exists x \in \mathbb{R}) : f(x) = 0$.
- 6) $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = 0$; sa négation est $(\exists x \in \mathbb{R}) : f(x) \neq 0$.
- 7) $(\forall m \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{R}) : f(x) = m$; sa négation est $(\exists m \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \neq m$.
- 8) $(\forall m \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \neq m$; sa négation est $(\exists m \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{R}) : f(x) = m$.

Exercice n° 24

Traduire les propositions suivantes en langage courant, puis déterminer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses, en justifiant :

- | | |
|--|--|
| 1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), x > y$ | 3) $(\forall x \in \mathbb{R}), (x^2 \geq 4) \Rightarrow (x \geq 2)$ |
| 2) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), x > y$ | 4) $(\exists x \in \mathbb{R}^-), x^2 = 4$ |

Correction

- 1) « Pour tout nombre réel x , il existe un nombre réel y tel que x est strictement supérieur à y . » Vraie : il suffit de prendre $y = x - 1$.
- 2) « Il existe un nombre réel x tel que, pour tout nombre réel y , x est strictement supérieur à y . » Fausse : cela signifierait que $\mathbb{R} \subset]-\infty ; x[$, ce qui est impossible (prendre $y = x$).
- 3) « Pour tout nombre réel x , si le carré de x est supérieur ou égal à 4, alors x est supérieur ou égal à 2. » Fausse : pour $x = -3$, $(-3)^2 \geq 4$, cependant $-3 \geq 2$ est faux.
- 4) « Il existe un nombre réel négatif x dont le carré est égal à 4. » Vraie : il suffit de prendre $x = -2$.

Exercice n° 25

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$$

$$Q : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x < 2 \Rightarrow x^2 > 2006$$

$$R : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

Correction

La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et } \overline{Q})$.

- $\overline{P} : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x \neq 2 \text{ et } x^2 = 4.$
- $\overline{Q} : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x < 2 \text{ et } x^2 \leq 2006.$
- $\overline{R} : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \in \mathbb{Z} \text{ et } x \notin \mathbb{Z}.$

Exercice n° 26

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes (f désigne une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$) :

$$P : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq x < 1$$

$$Q : (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : xy = 0$$

$$R : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$H : (\forall x \in \mathbb{R}) : -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = f(x)$$

Correction

- $P : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq x \text{ et } x < 1 ; \overline{P} : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x < 0 \text{ ou } x \geq 1.$
- $\overline{Q} : (\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad xy \neq 0.$
- $R : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \neq 1 \text{ ou } x = 1 ; \overline{R} : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^2 = 1 \text{ et } x \neq 1.$
- $\overline{H} : (\exists x \in \mathbb{R}) : -x \notin \mathbb{R} \text{ ou } f(-x) \neq f(x).$

Exercice n° 27

1) Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$$p : (\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{x^2 + 1} > x$$

$$q : (\exists p \in \mathbb{Z}) ; p^2 = 2$$

$$r : (\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) ; 2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2$$

$$s : (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{N}) : x + y = 12$$

$$t : (\forall x \in \mathbb{Q})(\exists n \in \mathbb{Z}) : nx \in \mathbb{Z}$$

2) Déterminer la valeur de vérité de ces propositions.

Correction

1) $\bar{p} : (\exists x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{x^2 + 1} \leq x$; $\bar{q} : (\forall p \in \mathbb{Z}) ; p^2 \neq 2$; $\bar{r} : (\exists a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) ; 2a^2 + 2b^2 < (a + b)^2$;
 $\bar{s} : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{N}) ; x + y \neq 12$; $\bar{t} : (\exists x \in \mathbb{Q})(\forall n \in \mathbb{Z}) ; nx \notin \mathbb{Z}$.

2) • p est vraie : $x^2 + 1 > x^2$, donc $\sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq x$.

• q est fausse, car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.

• r est vraie, car $2a^2 + 2b^2 - (a + b)^2 = (a - b)^2 \geq 0$.

• s est vraie : par exemple $7 + 5 = 12$.

• t est vraie : si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$; d'où $qx = p \in \mathbb{Z}$.

Exercice n° 28

À l'aide des lois de Morgan et de la négation d'une implication (voir l'exercice sur les lois de Morgan du chapitre 1), déterminer la négation des propositions suivantes :

$$p : (\forall x \in \mathbb{R}) (x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0)$$

$$q : (\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 > 5 \text{ et } x \in \mathbb{Z})$$

$$r : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : |xy| = xy \Rightarrow (x + y)^2 \geq x^2 + y^2$$

$$s : (\forall a \in \mathbb{R}) : (a^2 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$$

$$t : (\forall \alpha > 0)(\exists \beta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) : |x| < \beta \Rightarrow \left| \frac{x}{x^2 + 2} \right| < \alpha$$

Correction

D'après les lois de Morgan et la négation d'une implication ($\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow A \text{ et } \bar{B}$) :

$$\bar{p} : (\exists x \in \mathbb{R}) (x < 0 \text{ et } x > 0)$$

$$\bar{q} : (\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 \leq 5 \text{ ou } x \notin \mathbb{Z})$$

$$\bar{r} : (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : |xy| = xy \text{ et } (x + y)^2 < x^2 + y^2$$

$$\bar{s} : (\exists a \in \mathbb{R}) : a^2 \in \mathbb{Z} \text{ et } a \notin \mathbb{Z}$$

$$\bar{t} : (\exists \alpha > 0)(\forall \beta > 0)(\exists x \in \mathbb{R}) : |x| < \beta \text{ et } \left| \frac{x}{x^2 + 2} \right| \geq \alpha$$

Exercice n° 29

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$$p : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x + y > 1$$

$$q : (\exists x \in \mathbb{R}), x - 1 < \frac{x}{x+1} \leq x$$

$$r : \forall (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2, \frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0$$

$$s : \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5}$$

Correction

- $\bar{p} : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), x + y \leq 1.$
- q s'écrit $(\exists x \in \mathbb{R}) : (x - 1 < \frac{x}{x+1} \text{ et } \frac{x}{x+1} \leq x)$; d'après les lois de Morgan : $\bar{q} : (\forall x \in \mathbb{R}) (x - 1 \geq \frac{x}{x+1} \text{ ou } \frac{x}{x+1} > x).$
- r s'écrit $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 (\frac{a}{b} > 0 \Rightarrow ab > 0 \text{ et } ab > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0)$; d'où $\bar{r} : \exists (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 ; (\frac{a}{b} > 0 \text{ et } ab \leq 0) \text{ ou } (ab > 0 \text{ et } \frac{a}{b} \leq 0).$
- s s'écrit $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left(\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} \text{ et } \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5} \right)$; d'où $\bar{s} : \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left(\frac{x-1}{2} \neq \frac{y+1}{3} \text{ ou } \frac{y+1}{3} \neq \frac{z-2}{5} \right).$

Série 2 Valeur de vérité des propositions quantifiées**Exercice n° 30**

Déterminer, parmi les deux propositions suivantes, celle qui est vraie :

$$P : (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) : y = 2x + 1$$

$$Q : (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) : x = 2y + 1$$

Correction

- P est vraie : pour tout $x \in \mathbb{N}, 2x + 1 \in \mathbb{N}$; il existe donc $y = 2x + 1 \in \mathbb{N}$.
- Q est fausse : pour $x = 2$, l'équation $2 = 2y + 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$ (2 est pair et $2y + 1$ est impair).

Exercice n° 31

Déterminer, parmi les deux propositions suivantes, celle qui est vraie :

$$P : (\exists x \in \mathbb{Q}) : x^2 = 9$$

$$Q : (\forall x \in \mathbb{N}) : x > 0$$

Correction

- P est vraie : les solutions de $x^2 = 9$ sont -3 et 3 , qui appartiennent à $\mathbb{Q}$.
- Q est fausse : $0 \in \mathbb{N}$ et $0 > 0$ est faux.

Exercice n° 32

Déterminer, parmi les deux propositions suivantes, celle qui est vraie :

$$P : (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x - y = 3$$

$$Q : (\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) : x - y = 3$$

Correction

- P est vraie : pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $y = x - 3 \in \mathbb{Z}$ vérifie $x - y = 3$.
- Q est fausse : supposons qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 3$ pour tout $y \in \mathbb{Z}$. Pour $y = 0$: $x = 3$; pour $y = 1$: $x = 4$; d'où $3 = 4$, impossible.

Exercice n° 33

Déterminer, parmi les deux propositions suivantes, celle qui est vraie :

$$P : (\exists x \in \mathbb{Q})(\exists y \in \mathbb{Q}) : y = \sqrt{x} \qquad Q : (\exists x \in \mathbb{Q}) : x^2 = 3$$

Correction

- P est vraie : $x = 4$ et $y = 2$ sont rationnels et $y = \sqrt{x}$.
- Q est fausse : les solutions de $x^2 = 3$ sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$, qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$.

Exercice n° 34

Montrer que la proposition $P : (\forall x \in]0; 1[) \frac{2x}{x^2(1-x^2)} < 1$ est fausse.

Correction

Pour $x = \frac{1}{2} \in]0; 1[$: $\frac{2 \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}} = \frac{16}{3} > 1$. Donc P est fausse.

Exercice n° 35

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes, puis dire si elle est vraie ou fausse :

$$P : (\exists x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) : 2x - 3y = \sqrt{2}$$

$$Q : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : \frac{2x}{1+x^2} > y$$

Correction

- $\bar{P} : (\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) : 2x - 3y \neq \sqrt{2}$. $\bar{P}$ est vraie, car la somme et le produit d'entiers relatifs sont des entiers relatifs, alors que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$. Donc P est fausse.
- $\bar{Q} : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{2x}{1+x^2} \leq y$. $\bar{Q}$ est vraie en prenant $y = 1$, car $(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ (en effet $1 + x^2 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$). Donc Q est fausse.

Exercice n° 36

On considère la proposition $P : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + xy + y^2 = 0$.

- 1) Déterminer la négation de la proposition P .
- 2) Montrer que la proposition P est fausse.

Correction

- 1) $\bar{P} : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + xy + y^2 \neq 0$.
- 2) Montrons que $\bar{P}$ est vraie : pour $y = 1$, on a $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + x + 1 \neq 0$, car le discriminant de $x^2 + x + 1$ est strictement négatif ($\Delta = -3$). Donc $\bar{P}$ est vraie et P est fausse.

Exercice n° 37

On considère la proposition $P : (\forall x \in [0; 2])(\exists y \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]) : xy - x + 2y - 1 = 0$.

- 1) Déterminer la négation de la proposition P .
- 2) Montrer que la proposition P est vraie.

Correction

- 1) $\bar{P} : (\exists x \in [0; 2])(\forall y \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]) : xy - x + 2y - 1 \neq 0$.
- 2) Soit $x \in [0; 2]$. Cherchons $y \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$ tel que $xy - x + 2y - 1 = 0$, c'est-à-dire $y(x + 2) = x + 1$, soit $y = \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$. Comme $2 \leq x+2 \leq 4$, on a $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2}$, donc $y \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$. Ainsi P est vraie.

Exercice n° 38

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes, puis écrire sa négation :

- 1) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \leq y$
- 2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}) \quad n \leq x < n + 1$
- 3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}) \quad n > x$
- 4) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$
- 5) $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad (n \text{ impair ou } n = 2) \Rightarrow n \text{ premier}$
- 6) $(\forall a \in \mathbb{Z})(\exists (p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0; 4 \rrbracket) \quad a = 5p + r$
- 7) $(\forall \varepsilon > 0) \left(\exists x \in \left\{ 1 + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\} \right) : \quad x < \varepsilon + 1$

Note : dans la question 7, l'énoncé source imprime « $\varepsilon + 10$ » ; la correction du document source traite $\varepsilon + 1$, retenu ici.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE]

Correction

- 1) On a $(\forall x \in \mathbb{R}), x - 1 < x$: la proposition est fausse. Sa négation : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : y < x$.
- 2) Vraie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'entier $n = E(x)$ (partie entière de x) convient. Négation : $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}) : n > x \text{ ou } x \geq n + 1$.
- 3) D'après b), vraie (prendre $n = E(x) + 1$). Négation : $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}) : n \leq x$.
- 4) Vraie : c'est une propriété de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Négation : $(\exists x, y \in \mathbb{R}) : xy = 0 \text{ et } (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$.
- 5) Fausse : 9 est impair, donc « 9 impair ou $9 = 2$ » est vraie, cependant 9 n'est pas premier. Négation : $(\exists n \in \mathbb{Z}) : (n \text{ impair ou } n = 2) \text{ et } n \text{ n'est pas premier}$.
- 6) Vraie : c'est exactement la division euclidienne par 5. Négation : $(\exists a \in \mathbb{Z})(\forall (p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0; 4 \rrbracket) : a \neq 5p + r$.
- 7) Vraie : si $\varepsilon > 0$, on a $1 + \frac{1}{n} < \varepsilon + 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$; il suffit de prendre $n = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. Négation : $(\exists \varepsilon > 0) \left(\exists x \in \left\{ 1 + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\} \right) : x \geq \varepsilon + 1$.

Exercice n° 39

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

- 1) $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : ax^2 + ax - 1 + a = 0$
- 2) $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : ax^2 + ax - 1 + a = 0$

Correction

- 1) Fausse : pour $a = 0$, il n'existe aucun réel x vérifiant $0x^2 + 0x - 1 + 0 = 0$. Sa négation, $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : ax^2 + ax - 1 + a \neq 0$, est vraie.
- 2) Fausse : s'il existait un réel a tel que $(\forall x \in \mathbb{R}), ax^2 + ax - 1 + a = 0$, le polynôme $P(x) = ax^2 + ax - 1 + a$ serait nul, d'où $a = 0$ et $a - 1 = 0$, ce qui est absurde. Négation : $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : ax^2 + ax - 1 + a \neq 0$.

Exercice n° 40

Distinguer, parmi les propositions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses ; justifier.

- | | |
|--|--|
| 1) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x \leq y$ | 4) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad y(x^2 + 1) = 1$ |
| 2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \leq y$ | 5) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad y(x^2 + 1) = 1$ |
| 3) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad y(x^2 + 1) = 1$ | 6) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad y(x^2 + 1) = 1$ |

Correction

- 1) Vraie : prenons par exemple $x = 0$ et $y = 1$.
- 2) Fausse : prenons par exemple $x = 1$ et $y = 0$.
- 3) Fausse : s'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall y \in \mathbb{R}), y(x^2 + 1) = 1$, on aurait $(\forall y \in \mathbb{R}), y = \frac{1}{x^2 + 1}$, et par suite (en prenant $y = 1$ puis $y = 0$) $1 = 0$: impossible.
- 4) Vraie : il suffit de prendre $x = 0$ et $y = 1$.
- 5) Fausse : il suffit de prendre $x = 0$ et $y = 0$.
- 6) Vraie : soit $x \in \mathbb{R}$; puisque $x^2 + 1 \neq 0$, le réel $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ convient.

Remarque : Pour démontrer qu'une proposition commençant par « $\exists$ » est vraie, il suffit de donner un exemple ; qu'une proposition commençant par « $\forall$ » est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.

Exercice n° 41

On considère les propositions suivantes :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}$$

$$Q : (\forall x \in]0; 1[) (\forall y \in]0; 1[) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 2$$

$$R : (\exists x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1$$

- 1) Donner la négation de chacune des propositions P , Q et R .
- 2) Montrer que chacune des propositions P , Q et R est vraie.

Correction

- 1) $\bar{P} : (\exists x \in \mathbb{R}^+) ; \frac{x+1}{2} < \sqrt{x}$; $\bar{Q} : (\exists x \in]0; 1[) (\exists y \in]0; 1[) ; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 2$; $\bar{R} : (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \neq 1$.
- 2) • Soit $x \in \mathbb{R}^+ : x + 1 - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$, d'où $x + 1 \geq 2\sqrt{x}$ et $\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}$. Donc P est vraie.
- Soient $0 < x < 1$ et $0 < y < 1 : \frac{1}{x} > 1$ et $\frac{1}{y} > 1$, donc $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 2$. Donc Q est vraie.
- Il suffit de prendre $x = 0 : \frac{1}{1 + \sqrt{0}} = 1$. Donc R est vraie.

Exercice n° 42

On considère les propositions suivantes :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \neq 1$$

$$Q : (\exists x \in]0; 1[) \quad \frac{2x}{1 + x^2} > 1$$

$$R : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad \frac{2y}{1 + y^2} > x$$

- 1) Donner la négation de chacune des propositions P , Q et R .
- 2) Montrer que chacune des propositions P , Q et R est fausse.

Correction

$$1) \bar{P} : (\exists x \in \mathbb{R}^+), \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1; \quad \bar{Q} : (\forall x \in]0; 1[), \frac{2x}{1 + x^2} \leq 1; \quad \bar{R} : (\exists x \in \mathbb{R}), (\forall y \in \mathbb{R}), \frac{2y}{1 + y^2} \leq x.$$

$$2) \bullet x = 0 \text{ vérifie } \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 \text{ et } 0 \in \mathbb{R}^+ : \bar{P} \text{ est vraie, donc } P \text{ est fausse.}$$

$$\bullet \text{ Pour } x \in]0; 1[: 1 + x^2 > 0, \text{ donc } \frac{2x}{1 + x^2} < 1 \Leftrightarrow 2x < 1 + x^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 > 0, \text{ ce qui est vrai car } x \neq 1. \text{ Donc } \bar{Q} \text{ est vraie et } Q \text{ est fausse.}$$

$$\bullet \text{ Pour tout réel } y : (y - 1)^2 \geq 0, \text{ donc } y^2 + 1 \geq 2y, \text{ d'où } \frac{2y}{1 + y^2} \leq 1 \text{ (car } 1 + y^2 > 0). \text{ Il suffit de prendre } x = 1 \text{ pour affirmer que } \bar{R} \text{ est vraie ; par suite } R \text{ est fausse.}$$

Exercice n° 43

On considère les propositions suivantes :

$$A : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x^2 \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \in \mathbb{Z})$$

$$B : (\exists x \in \mathbb{R}^+) \quad (x > 1) \Rightarrow (x^2 < 1)$$

$$C : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x \leq 0) \Rightarrow (x^2 \geq 2)$$

- 1) Donner la négation de chacune des propositions A , B et C .
- 2) Montrer que chacune des propositions A , B et C est fausse.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] La correction du document source conclut que B est vraie (par exemple pour $x \leq 1$), ce qui contredit la consigne 2.

Correction

$$1) A : (\forall x \in \mathbb{R}), (x^2 \notin \mathbb{N}) \text{ ou } (x \in \mathbb{Z}), \text{ donc } \bar{A} : (\exists x \in \mathbb{R}), (x^2 \in \mathbb{N}) \text{ et } (x \notin \mathbb{Z}).$$

$$B : (\exists x \in \mathbb{R}^+), (x \leq 1) \text{ ou } (x^2 < 1), \text{ donc } \bar{B} : (\forall x \in \mathbb{R}^+), (x > 1) \text{ et } (x^2 \geq 1).$$

$$C : (\forall x \in \mathbb{R}), (x > 0) \text{ ou } (x^2 \geq 2), \text{ donc } \bar{C} : (\exists x \in \mathbb{R}), (x \leq 0) \text{ et } (x^2 < 2).$$

$$2) \bullet \text{ Pour } x = \sqrt{2} : (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{N} \text{ et } \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}. \text{ Donc } \bar{A} \text{ est vraie et } A \text{ est fausse.}$$

$$\bullet x^2 \geq 1 \text{ signifie } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1; \bar{B} \text{ devient } (\forall x \in \mathbb{R}^+), x > 1, \text{ qui est fausse (prendre } x = \frac{1}{2}). \text{ Donc } B \text{ est vraie.}$$

$$\bullet \text{ Pour } x = -1 : -1 \leq 0 \text{ et } (-1)^2 < 2. \text{ Donc } \bar{C} \text{ est vraie et } C \text{ est fausse.}$$

Note : conformément au corrigé du document source, la proposition B est vraie : la consigne 2 ne s'applique donc qu'à A et C .

Exercice n° 44

On considère les propositions suivantes :

$$A : (\forall x \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{x-1} + |x^2 - 1| \neq 0$$

$$B : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$C : (\forall x \in]1; +\infty[) \quad \frac{x}{\sqrt{x-1}} < 2$$

1) Donner la négation de chacune des propositions A , B et C .

2) Montrer que chacune des propositions A , B et C est fausse.

Correction

1) $\bar{A} : (\exists x \in \mathbb{N}), \sqrt{x-1} + |x^2 - 1| = 0$; $\bar{B} : (\exists x \in \mathbb{R}), x^2 \in \mathbb{Z}$ et $x \notin \mathbb{Z}$; $\bar{C} : (\exists x \in]1; +\infty[), \frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$.

2) • Pour $x = 1$: $\sqrt{1-1} + |1^2 - 1| = 0$. Donc $\bar{A}$ est vraie et A est fausse.

• Pour $x = \sqrt{2}$: $(\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Z}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$. Donc $\bar{B}$ est vraie et B est fausse.

• $x = 3$ vérifie $\frac{3}{\sqrt{3-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \geq 2$ et $3 \in]1; +\infty[$. Donc $\bar{C}$ est vraie et C est fausse.

Exercice n° 45

Étudier la vérité des propositions suivantes :

$$P_1 : (\exists x \in]0; +\infty[) \quad \sqrt{x} > x$$

$$P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + 4x - 5 > 0$$

$$P_3 : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - x > 0 \text{ et } x^2 + x < 0$$

$$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + 2x - 3 \geq 0 \text{ ou } \frac{x+1}{2} \leq \frac{x}{3}$$

$$P_5 : (\exists x \in \mathbb{N}) \quad |x^2 + 6x - 7| + (x-1)^2 = 0$$

$$P_6 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x + 2y = 8$$

$$P_7 : (\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = \sqrt{3}$$

$$P_8 : (\forall x \in \mathbb{Q}) \quad x^2 - 13 \neq 0$$

$$P_9 : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$$

$$P_{10} : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$P_{11} : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x \leq 0$$

$$P_{12} : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$P_{13} : (\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad x^2 - y^2 - 4x + 6y + 14 = 0$$

$$P_{14} : (\forall x \in [-1; 2])(\exists y \in [\frac{1}{7}; 16]) \quad / 2xy - 5y - 5x - 6 = 0$$

$$P_{15} : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x + 5y = 7$$

Correction

• P_1 vraie : $x = \frac{1}{4} \in]0; +\infty[$ et $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

• P_2 fausse : pour $x = 0$, $0^2 + 4 \times 0 - 5 = -5 < 0$.

• P_3 vraie : $x = -\frac{1}{2}$ donne $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} > 0$ et $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0$.

- P_4 fausse : pour $x = 0$, $0^2 + 2 \times 0 - 3 = -3 < 0$ et $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} > \frac{0}{3}$; les deux membres de la disjonction sont faux.
- P_5 vraie : $x = 1 \in \mathbb{N}$ vérifie $|1 + 6 - 7| + (1 - 1)^2 = 0$.
- P_6 vraie : pour tout x , $y = \frac{8-x}{2}$ convient.
- P_7 fausse : si $x, y \in \mathbb{Z}$, alors $x + y \in \mathbb{Z}$, or $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$.
- P_8 vraie : $\overline{P_8}$: $(\exists x \in \mathbb{Q}) x^2 = 13$; or $x^2 = 13 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$, donc $\overline{P_8}$ est fausse.
- P_9 fausse : $\overline{P_9}$: $(\exists x \in \mathbb{R}) x^2 \in \mathbb{N}$ et $x \notin \mathbb{N}$; $x = -3$ convient.
- P_{10} fausse : pour $x = 2$, $2^2 - 10 + 6 = 0$, qui n'est pas > 0 .
- P_{11} fausse : $x = 4$ vérifie $16 - 4 \geq 0$ et $16 - 8 = 8 > 0$.
- P_{12} fausse : $x = 0$ vérifie $0 - 0 = 0$ et $0 + 0 - 2 = -2 < 0$.
- P_{13} : $x^2 - y^2 - 4x + 6y + 14 = (x - 2)^2 - (y - 3)^2 + 19$; pour $x = 2$ et $y = 3 + \sqrt{19}$, l'expression est nulle. Donc P_{13} est vraie.
- P_{14} fausse : $2xy - 5y - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5x+6}{2x-5}$. Pour $x \in [-1; 2]$: $1 \leq 5x + 6 \leq 16$ et $-7 \leq 2x - 5 \leq -1$, donc $y \in \left[-16; -\frac{1}{7}\right]$, qui ne rencontre pas $\left[\frac{1}{7}; 16\right]$.
- P_{15} fausse : $x = y = 0$ donne $0 \neq 7$.

Note : le corrigé du document source déclare P_4 vraie (en ne testant que $x = 2$) et traite P_{13} avec $+y^2$ (il conclut alors qu'elle est fausse) ; les réponses ci-dessus correspondent à l'énoncé tel qu'il est imprimé.

Exercice n° 46

On considère la propriété $A(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, où $A(n) = n^2 + n + 41$.

- 1) Calculer $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$ et $A(40)$.
- 2) Montrer que la proposition $[(\forall n \in \mathbb{N}^*) : A(n) \text{ est un nombre premier}]$ est fausse.

Correction

- 1) $A(0) = 41$, $A(1) = 43$, $A(2) = 47$ et $A(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 2 \times 40 + 1 = (40 + 1)^2 = 41^2 = 1681$.
- 2) D'après 1), $A(40) = 41^2$: 41 divise $A(40)$, donc $A(40)$ n'est pas premier. Ainsi $(\exists n \in \mathbb{N}^*) : A(n)$ n'est pas premier (par exemple $n = 40$), et la proposition $[(\forall n \in \mathbb{N}^*) : A(n) \text{ est premier}]$ est fausse.

Exercice n° 47

- 1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x^2 + x - 1 < 0$.
- 2) On considère la proposition $p : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : -x^2 + x - 1 \geq y$.
 - a) Déterminer la négation de la proposition p .
 - b) En déduire que la proposition p est fausse.

Correction

- 1) Le trinôme $-x^2 + x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et son coefficient dominant est $-1 < 0$; il est donc du signe de -1 pour tout x : $(\forall x \in \mathbb{R}) -x^2 + x - 1 < 0$.
- 2) a) $\overline{p} : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : -x^2 + x - 1 < y$.
 b) D'après 1), $y = 0$ convient : $(\forall x \in \mathbb{R}) -x^2 + x - 1 < 0$. Donc $\overline{p}$ est vraie, et p est fausse.

Exercice n° 48

On considère la proposition $p : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : y^2 - 3xy + 2x^2 = 1$.

- 1) La proposition p est-elle vraie ? Justifier.
- 2) Déterminer la négation de la proposition p .

Note : l'énoncé source imprime « $y^2 - 3xy^2 + 2x^2 = 1$ » ; la correction du document source traite $y^2 - 3xy + 2x^2 = 1$, retenu ici.

Correction

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation d'inconnue $y : y^2 - 3xy + 2x^2 - 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 9x^2 - 4(2x^2 - 1) = x^2 + 4 > 0$; elle admet donc (deux) solutions réelles. Ainsi p est vraie.
- 2) $\bar{p} : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : y^2 - 3xy + 2x^2 \neq 1$.

Exercice n° 49

On considère les deux propositions suivantes :

$$(p) : (\exists x \in \mathbb{R}^+) ; \sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$(q) : (\forall y \in \mathbb{R}) ; (\exists x \in \mathbb{R}) ; \frac{x}{1+x^2} < y$$

- 1) Donner la négation de chacune des propositions (p) et (q) .
- 2) a) Montrer que la proposition (p) est vraie et que la proposition (q) est fausse.
b) Quelle est la valeur de vérité de la proposition

$$(r) : \left[(\exists y \in \mathbb{R}) ; (\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{x}{1+x^2} \geq y \right] \Rightarrow \left[(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sqrt{1+x} \neq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right] ?$$

- 3) On considère la proposition $(s) : (p \Rightarrow q) \Rightarrow \bar{q}$.
a) Donner la négation de la proposition (s) .
b) Quelle est la valeur de vérité de la proposition (s) ?

Correction

- 1) $\bar{p} : (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sqrt{1+x} \neq \frac{1}{\sqrt{1+x}} ; \quad \bar{q} : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{x}{1+x^2} \geq y$.
- 2) a) Pour $x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Leftrightarrow 1+x = 1 \Leftrightarrow x = 0 ; x = 0$ convient, donc p est vraie.
Pour tout $x \in \mathbb{R} : \frac{x}{1+x^2} + 1 = \frac{x^2 + x + 1}{1+x^2} > 0$ (car $x^2 + x + 1$ a un discriminant $-3 < 0$), donc $\frac{x}{1+x^2} \geq -1$. Ainsi $\bar{q}$ est vraie (avec $y = -1$) et q est fausse.
b) (r) s'écrit $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$. Or $\bar{q}$ est vraie et $\bar{p}$ est fausse : (r) est fausse.
- 3) a) Comme $\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} : \bar{s} \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge q \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge q$.
b) p est vraie et q est fausse, donc $p \Rightarrow q$ est fausse ; par suite (s) est vraie (le faux implique tout).

Exercice n° 50

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$, et les propositions suivantes :

$$p : \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$$

$$q : (\forall y \in \mathbb{R}) ; (\exists x \in \mathbb{R}) : y = f(x)$$

$$r : (\forall \alpha \in \mathbb{R}^+) ; (\exists \beta \in \mathbb{R}) ; \alpha = f(\beta)$$

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.
b) Donner la négation de la proposition p .
c) La proposition p est-elle vraie ? Justifier.
- 2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = a$, où a est un réel de l'intervalle $]-\infty ; -1]$.
b) Donner la négation de la proposition q .
c) Déterminer la valeur de vérité des propositions q et r .

Correction

- 1) a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 3$. Donc $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.
b) $\bar{p} : \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; f(a) = f(b) \text{ et } a \neq b$.
c) D'après a), $f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = 1$ et $\sqrt{3} \neq -\sqrt{3}$: $\bar{p}$ est vraie, donc p est fausse.
- 2) a) $f(x) = a \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = a + 1$. Or $a \leq -1$, donc $a + 1 \leq 0$, alors que $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1 > 0$: l'équation n'a pas de solution, $S = \emptyset$.
b) $\bar{q} : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : y \neq f(x)$.
c) D'après a), pour $y = -2 \leq -1$ l'équation $f(x) = y$ n'a pas de solution : $\bar{q}$ est vraie et q est fausse.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$; posons $\beta = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}$. Alors $f(\beta) = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 1} - 1 = |\alpha + 1| - 1 = \alpha$. Donc r est vraie.

Exercice n° 51*Contre-exemple*

- 1) Montrer que la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 5x + 4 > 0$ est fausse.
- 2) On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Montrer que la fonction f n'est ni paire ni impaire.

Correction

- 1) Pour $x = 2 : 2^2 - 5 \times 2 + 4 = -2 < 0$. On a trouvé un contre-exemple : la proposition est fausse.
- 2) $f(1) = 2$ et $f(-1) = 4$. Comme $f(-1) \neq f(1)$, f n'est pas paire ; comme $f(-1) \neq -f(1)$, f n'est pas impaire.

Exercice n° 52*Contre-exemple*

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2 \cos x - 1 = 0$.
- 2) Montrer que la proposition $p : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad 3 \cos x \neq 2 \sin^2 x$ est fausse.

Correction

- 1) $2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

- 2) $3 \cos x = 2 \sin^2 x \Leftrightarrow 3 \cos x = 2 - 2 \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 = 0$ (car $\cos x + 2 > 0$). D'après 1), pour $x = \frac{\pi}{3}$: $3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{3}$. Donc p est fausse.

Exercice n° 53

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2x$.

- 1) Déterminer la valeur de vérité de chacune des deux propositions suivantes :

$$P : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : y = f(x)$$

$$Q : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists! x \in \mathbb{R}) : y = f(x)$$

- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 1$.

Correction

$$1) \text{ Soit } y \in \mathbb{R}. \quad f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = y - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = (y - 2x)^2 \\ y - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0 (*) \\ y - 2x \geq 0 \end{cases}$$

Le discriminant réduit de (*) est $\Delta' = y^2 + 3 > 0$: (*) admet deux racines $x_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{y^2 + 3}}{3}$. On

a $y - 2x_1 = \frac{-y - 2\sqrt{y^2 + 3}}{3} < 0$ et $y - 2x_2 = \frac{-y + 2\sqrt{y^2 + 3}}{3} > 0$ (car $2\sqrt{y^2 + 3} > |y|$). L'équation $f(x) = y$ admet donc une solution, et une seule.

Donc P est vraie, et Q est vraie.

- 2) $f(x) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > 1 - 2x$.

- Si $1 - 2x \leq 0$, c'est-à-dire $x \geq \frac{1}{2}$, l'inéquation est vérifiée : $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\subset S$.
- Si $x < \frac{1}{2}$: $x^2 + 1 > (1 - 2x)^2 \Leftrightarrow x(3x - 4) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{4}{3}\right[$; avec $x < \frac{1}{2}$: $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$.

$$\text{Donc } S = \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[= \left]0; +\infty\right[.$$

Note : le corrigé du document source n'impose pas la condition $y - 2x \geq 0$ et conclut que Q est fausse ; en tenant compte de cette condition, chaque réel y a exactement un antécédent, donc Q est vraie.

Exercice n° 54

Soit (P) la proposition suivante :

$$(P) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \quad \text{avec } f(x) = x^2 - 6x - 16.$$

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2) Donner la négation de la proposition (P) , puis en déduire la vérité de (P) .

Correction

1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$; $\Delta = 100$, d'où $x = -2$ ou $x = 8$: $S = \{-2; 8\}$.

2) $\bar{P} : (\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y$. On a $f(-2) = f(8) = 0$ et $-2 \neq 8$: $\bar{P}$ est vraie, d'où P est fausse.

Exercice n° 55

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - x - 2}$.

- 1) Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : f(x) = \frac{1}{2}$.
- 3) On considère la proposition $p : (\forall x \in D_f)(\forall y \in D_f) \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
 - a) Écrire la négation de p .
 - b) En déduire que p est fausse.

Correction

- 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \neq 0\}$; $x^2 - x - 2 = 0$ a pour solutions 2 et -1. Donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$.
- 2) Pour $x \in D_f : f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 2 = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 1$. Donc $S = \{1; 4\}$.
- 3) a) $\bar{p} : (\exists x \in D_f)(\exists y \in D_f) / f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y$.
 b) D'après 2), $f(4) = f(1) = \frac{1}{2}$ avec $1 \neq 4$. Donc $\bar{p}$ est vraie, et par suite p est fausse.

Série 3 Approfondissement sur les quantificateurs

Exercice n° 56

Soient E et F deux ensembles non vides, A et B deux fonctions propositionnelles définies sur E , et P une fonction propositionnelle définie sur $E \times F$. Étudier la vérité des propositions suivantes :

- 1) $[(\forall x \in E) : A(x) \text{ ou } B(x)] \Rightarrow [(\forall x \in E) : A(x) \text{ ou } (\forall x \in E) : B(x)]$
- 2) $[(\forall x \in E) : A(x) \text{ ou } B(x)] \Rightarrow [(\forall x \in E) : A(x) \text{ ou } (\exists x \in E) : B(x)]$
- 3) $[(\exists x \in E) A(x) \text{ et } (\exists x \in E) B(x)] \Rightarrow [(\exists x \in E) : A(x) \text{ et } B(x)]$
- 4) $[(\forall x \in E)(\exists y \in F) P(x; y)] \Rightarrow [(\forall y \in F)(\exists x \in E) P(x; y)]$

Correction

- 1) L'énoncé peut être vrai et peut aussi être faux.

Exemple 1 : $E = \mathbb{N}$, $A(n) : « n \text{ est pair } », B(n) : « n \text{ est impair } »$. La proposition $(\forall n \in \mathbb{N}) : A(n) \text{ ou } B(n)$ est vraie, mais $(\forall n \in \mathbb{N}) : A(n) \text{ ou } (\forall n \in \mathbb{N}) : B(n)$ est fausse : l'énoncé est faux.

Exemple 2 : $E = \mathbb{Z}$, $A(n) : « n^2 \geq 0 », B(n) : « n \text{ est impair } »$. Les deux propositions sont vraies : l'énoncé est vrai.

- 2) L'énoncé est vrai. Supposons $(\forall x \in E) : A(x) \text{ ou } B(x)$.

- 1^{er} cas : $(\exists x \in E) : B(x)$ est vraie ; alors la conclusion est vraie.
- 2^e cas : $(\exists x \in E) : B(x)$ est fausse ; alors $(\forall x \in E) : \overline{B(x)}$, et par suite $(\forall x \in E) : A(x)$; la conclusion est vraie.

- 3) L'énoncé peut être vrai et peut aussi être faux.

Exemple 1 : $E = \mathbb{N}$, $A(n) : « n \text{ est pair } », B(n) : « n \text{ est impair } »$: $(\exists n)A(n)$ et $(\exists n)B(n)$ est vraie, mais $(\exists n) : A(n) \text{ et } B(n)$ est fausse.

Exemple 2 : $E = \mathbb{N}$, $A(n) : « n^2 \geq 4 », B(n) : « n \text{ est impair } »$: les deux propositions sont vraies (prendre $n = 5$).

- 4) L'énoncé peut être vrai et peut aussi être faux.

Exemple 1 : $E = F = \mathbb{R}$ et $P(x, y) : « x > y »$: $(\forall x)(\exists y) x > y$ et $(\forall y)(\exists x) x > y$ sont vraies.

Exemple 2 : $E = F = \mathbb{R}$ et $P(x, y) : « (1 + |x|)y = 0 »$: $(\forall x)(\exists y)$ est vraie (prendre $y = 0$), mais $(\forall y)(\exists x)$ est fausse (pour $y = 1$, aucun réel x ne convient).

Exercice n° 57

Démontrer que la proposition suivante est fausse :

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) 2x - 3y = 1 \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) 2x - 3y = 1.$$

Correction

La première proposition est vraie : quel que soit $y \in \mathbb{R}$, l'équation d'inconnue $x : 2x - 3y = 1$ admet la solution $x = \frac{3y + 1}{2}$.

La deuxième est fausse : s'il existait x tel que $2x - 3y = 1$ pour tout réel y , on aurait pour $y = 0 : x = \frac{1}{2}$, et pour $y = 1 : x = 2$, ce qui est impossible.

Une implication dont la prémisse est vraie et la conclusion fausse est fausse : la proposition proposée est donc fausse.

Remarque : Autre méthode : le polynôme $P(y) = -3y + 2x - 1$ serait nul, d'où $2x = 1$ et $-3 = 0$, ce qui est impossible.

Exercice n° 58

Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la proposition $(x = 0) \Leftrightarrow (x = 1)$ est vraie.

Correction

La proposition $(x = 0) \Leftrightarrow (x = 1)$ est vraie si, et seulement si, $(x = 0)$ et $(x = 1)$ sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. Elles ne peuvent pas être vraies simultanément ; elles sont toutes deux fausses si, et seulement si, $x \notin \{0; 1\}$. L'ensemble cherché est donc $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Exercice n° 59

Soient a et b deux réels. Montrer que les propositions suivantes sont vraies :

- 1) $[(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) |a| \leq x] \Rightarrow [a = 0]$
- 2) $[(\forall x \in \mathbb{R}) a \leq x \Rightarrow b < x] \Rightarrow [b < a]$

Correction

- 1) *1^{re} méthode (absurde).* Supposons que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) |a| \leq x$ et que $a \neq 0$. En donnant à x la valeur $\frac{|a|}{2} \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient $|a| \leq \frac{|a|}{2}$, ce qui est absurde. Donc $a = 0$.
2^e méthode (contraposée). Il suffit de montrer : $a \neq 0 \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}_+^*) |a| > x$. Si $a \neq 0$, on peut prendre $x = \frac{|a|}{2}$, car $|a| > \frac{|a|}{2}$.
- 2) Supposons que $[(\forall x \in \mathbb{R}) a \leq x \Rightarrow b < x]$ est vraie. En prenant $x = a : a \leq a$, donc $b < a$.
Autre méthode (contraposée). Si $b \geq a$, alors $x = \frac{a+b}{2}$ vérifie $a \leq x$ et $b \geq x$: la prémisse est fausse.

PARTIE II

Raisonnements mathématiques

Raisonnement déductif, par équivalences successives, par contraposée, par l'absurde, par disjonction des cas et par récurrence.

3

CHAPITRE

Raisonnement déductif et raisonnement par équivalence

Notions travaillées

- Démontrer une implication (raisonnement direct, déductif)
- Démontrer une équivalence par équivalences successives
- Inégalités et égalités usuelles ; moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique

Dans ce chapitre

Série 1 – Raisonnement déductif	34
Série 2 – Raisonnement par équivalences successives	48
Série 3 – Inégalités classiques et moyennes . .	57

Série 1 Raisonnement déductif

Exercice n° 60

Soient a et b deux réels. Montrer que :

- 1) $ab + a - b = 1 \Rightarrow a = 1$ ou $b = -1$;
- 2) $(a - 1)(b + 1) = (a + 1)(b - 1) \Rightarrow a = b$.

Correction

Soient a et b deux réels.

- 1) $ab + a - b = 1 \Rightarrow ab - b + a - 1 = 0 \Rightarrow b(a - 1) + (a - 1) = 0 \Rightarrow (a - 1)(b + 1) = 0 \Rightarrow a = 1$ ou $b = -1$.
- 2) $(a - 1)(b + 1) = (a + 1)(b - 1) \Rightarrow ab + a - b - 1 = ab - a + b - 1 \Rightarrow 2a - 2b = 0 \Rightarrow a = b$.

Exercice n° 61

Soient a et b deux réels. Montrer que :

$$[(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ax + b = 0] \Rightarrow a = b = 0.$$

Correction

Supposons $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ax + b = 0$. Pour $x = -1$: $-a + b = 0$; pour $x = 1$: $a + b = 0$. Donc $\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $2a = 0$ et $2b = 0$, soit $a = b = 0$.

Exercice n° 62

Soient a et b deux rationnels positifs. Montrer que si $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est rationnel, alors $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont aussi rationnels.

Correction

Supposons que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Alors $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, donc $\sqrt{a}\sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (a + b)}{2} \in \mathbb{Q}_+$, car $\mathbb{Q}$ est stable pour l'addition et la multiplication. Par conséquent :

$$b\sqrt{a} + a\sqrt{b} = \sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in \mathbb{Q}_+ \quad (1),$$

$$a\sqrt{a} + a\sqrt{b} = a(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in \mathbb{Q}_+ \quad (2), \quad b\sqrt{a} + b\sqrt{b} \in \mathbb{Q}_+ \quad (3).$$

- 1^{er} cas : $a = b$; alors $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \in \mathbb{Q}_+$.
- 2^e cas : $a \neq b$; (2)–(1) donne $(a - b)\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, d'où $\sqrt{a} = \frac{a(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b} \in \mathbb{Q}_+$. De même, (3)–(1) donne $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}_+$.

Exercice n° 63

Soient x et y deux réels non nuls. On considère les deux propositions :

$$P : \text{« } 2x + 4y = 1 \text{ »} \quad \text{et} \quad Q : \text{« } \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20 \text{ »}.$$

Montrer que $P \Rightarrow Q$.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Énoncé manuscrit peu lisible : la relation P peut aussi se lire « $2x + y = 1$ » ; la correction du document source utilise $2x + 4y = 1$.

Correction

Supposons P vraie : $2x + 4y = 1$, d'où $x = \frac{1}{2} - 2y$. Alors

$$\frac{1}{x^2 + y^2} - 20 = \frac{1 - 20(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{1 - 20\left[\left(\frac{1}{2} - 2y\right)^2 + y^2\right]}{x^2 + y^2} = \frac{-(100y^2 - 40y + 4)}{x^2 + y^2} = -\frac{(10y - 2)^2}{x^2 + y^2} \leq 0.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20 : P \Rightarrow Q.$$

Exercice n° 64

Soient a, b et c des réels. Montrer l'implication suivante :

$$[|a - b| \leq c \text{ et } |a + b| \leq c] \Rightarrow |ab| \leq \frac{c^2}{2}.$$

Correction

Supposons $|a - b| \leq c$ et $|a + b| \leq c$. On a $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$, donc $|4ab| \leq (a + b)^2 + (a - b)^2 \leq c^2 + c^2 = 2c^2$, d'où $|ab| \leq \frac{c^2}{2}$.

Exercice n° 65

Soient a, b et c des réels. On considère les deux propositions :

$$P : \ll a > 0, b > 0, c > 0 \gg \quad \text{et} \quad Q : \ll \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c \gg.$$

Montrer que $P \Rightarrow Q$.

Correction

Supposons $a > 0, b > 0, c > 0$. On a

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right).$$

Comme $\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{uv}$ pour $u, v > 0$: $\frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \right) \geq \sqrt{b^2} = b$, $\frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \right) \geq a$ et $\frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) \geq c$.

Donc $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c : P \Rightarrow Q$.

Exercice n° 66

Soient a, b et x des réels. On considère les deux propositions :

$$P : \ll -2 \leq x \leq 2 \gg \quad \text{et} \quad Q : \ll a^2 + abx + b^2 \geq 0 \gg.$$

Montrer que $P \Rightarrow Q$.

Correction

On a $a^2 + abx + b^2 = \left(a + \frac{xb}{2} \right)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right)$. Or $-2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{4} \geq 0$, d'où $a^2 + abx + b^2 \geq 0$. Donc $P \Rightarrow Q$.

Exercice n° 67

Soit x un réel. On considère les deux propositions :

$$H : \left\langle x^2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right\rangle \quad \text{et} \quad G : \left\langle \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{2(1+x)^4} + \frac{1}{2(1-x)^4} = 4 \right\rangle.$$

Montrer que $H \Rightarrow G$.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Contrôle numérique : lorsque $x^2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$, le membre de gauche de G vaut $\frac{9}{2}$ et non 4. L'énoncé (et la correction) du document source indiquent bien 4.

Correction

$$\text{Posons } F(x) = \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{2(1+x)^4} + \frac{1}{2(1-x)^4} = \frac{(1+x)^3 + (1-x)^3}{(1-x^2)^3} + \frac{(1+x)^4 + (1-x)^4}{2(1-x^2)^4}.$$

$$\text{Après réduction : } F(x) = \frac{-5x^4 + 10x^2 + 3}{(1-x^2)^4}.$$

$$\text{Si } H \text{ est vraie : } x^2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, x^4 = \frac{17}{9} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ et } 1 - x^2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ d'où}$$

$$F(x) = \frac{-5 \left(\frac{17}{9} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) + 10 \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) + 3}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^4} = \frac{\frac{32}{9}}{\frac{64}{81}} = \frac{9}{2}.$$

Note : le corrigé du document source écrit « $F(x) = \frac{32}{8} = 4$ », ce qui est une erreur de calcul : on obtient $\frac{9}{2}$. L'implication $H \Rightarrow G$ n'est donc pas vraie telle qu'elle est énoncée ; elle le devient si l'on remplace 4 par $\frac{9}{2}$ dans G .

Exercice n° 68

Soient a, b et c des réels. Montrer que :

$$(a > 3, b > 3 \text{ et } c > 3) \Rightarrow ab + bc + ca < abc.$$

Correction

$$a > 3, b > 3, c > 3 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{3}, \frac{1}{b} < \frac{1}{3}, \frac{1}{c} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) < abc \text{ (car } abc > 0) \\ \Rightarrow bc + ac + ab < abc.$$

Exercice n° 69

Soient x et y deux réels. On considère les propositions :

$$P_1 : \langle xy = \sqrt{6} \rangle, \quad P_2 : \langle x + \sqrt{2} = y + \sqrt{3} \rangle, \quad P_3 : \langle x = \sqrt{3} \text{ et } y = \sqrt{2} \rangle.$$

Montrer que $(P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow P_3$.

Correction

$$\text{Si } xy = \sqrt{6} \text{ et } x + \sqrt{2} = y + \sqrt{3}, \text{ alors } \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{y} \text{ (car } xy = \sqrt{3}\sqrt{2}, \text{ avec } x, y \neq 0). \text{ Si } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \text{ alors}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b}; \text{ d'où}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{y} = \frac{x + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + y} = 1 \text{ (car } x + \sqrt{2} = y + \sqrt{3}).$$

$$\text{Donc } x = \sqrt{3} \text{ et } y = \sqrt{2} : (P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow P_3.$$

Exercice n° 70

Soient a, b et c des réels. On considère les propositions :

$$P_1 : « a \geq 0 », \quad P_2 : « b \geq 0 », \quad P_3 : « c \geq 0 », \quad P_4 : « (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc ».$$

Montrer que $(P_1 \text{ et } P_2 \text{ et } P_3) \Rightarrow P_4$.

Correction

Pour $u, v \geq 0 : u + v \geq 2\sqrt{uv}$. Si $a, b, c \geq 0 : a + b \geq 2\sqrt{ab}, a + c \geq 2\sqrt{ac}, b + c \geq 2\sqrt{bc}$. En multipliant ces inégalités (à termes positifs) : $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8|abc| = 8abc$ (car $abc \geq 0$).

Exercice n° 71

Soient a, b, x et y des réels. On considère les propositions :

$$P_1 : « xy = ab \neq 0 », \quad P_2 : « x + b = y + a », \quad P_3 : « x = a \text{ et } y = b ».$$

Montrer que $(P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow P_3$.

Correction

Si $xy = ab \neq 0$ et $x + b = y + a$, alors $\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$, d'où $\frac{x}{a} = \frac{b}{y} = \frac{x+b}{a+y} = 1$ (car $x + b = y + a$). Donc $x = a$ et $y = b$.

Exercice n° 72

Soient x, y, a et b des réels. On considère les propositions :

$$P : « ax = by \neq 0 », \quad Q : « ay = bx \neq 0 », \quad R : « a^2 = b^2 \text{ et } x^2 = y^2 ».$$

Montrer que $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.

Correction

Si $ax = by \neq 0$ et $ay = bx \neq 0$, alors a, b, x, y sont non nuls. En multipliant membre à membre : $a^2xy = b^2xy$, d'où $a^2 = b^2$. De même $(ax)(bx) = (by)(ay)$ donne $abx^2 = aby^2$, d'où $x^2 = y^2$. Donc $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.

Exercice n° 73

Soient a et b deux réels. On considère les deux propositions :

$$P : « a^3 + b^3 < 1 < a + b » \quad \text{et} \quad Q : « 0 < a < 1 \text{ et } 0 < b < 1 ».$$

Montrer que $P \Rightarrow Q$.

Correction

Si $a^3 + b^3 < 1 < a + b$, alors $a^3 < 1 - b^3$ et $1 - b < a$, d'où $(1 - b)^3 < a^3 < 1 - b^3$ (la fonction cube est croissante). Ainsi $1 - 3b + 3b^2 - b^3 < 1 - b^3$, soit $3b(b - 1) < 0$, donc $0 < b < 1$. De même, $0 < a < 1$. Donc $P \Rightarrow Q$.

Exercice n° 74

Soient x, y et z des réels. On considère les deux propositions :

$$P : « x^2 + y^2 + z^2 = 1 » \quad \text{et} \quad Q : « -\sqrt{3} \leq x + y + z \leq \sqrt{3} ».$$

- 1) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
- 2) En déduire que $P \Rightarrow Q$.

Correction

- 1) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2}$; or $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$, $\frac{x^2 + z^2}{2} \geq xz$, $\frac{y^2 + z^2}{2} \geq yz$. Donc $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
- 2) D'après 1) : $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2xy + 2yz + 2zx$, d'où $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$. Si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, alors $(x + y + z)^2 \leq 3$, donc $|x + y + z| \leq \sqrt{3}$, soit $-\sqrt{3} \leq x + y + z \leq \sqrt{3}$.

Exercice n° 75

Soient x, y, z et a des réels. On considère les propositions :

$$P_1 : « x + y \neq 0, x + z \neq 0 \text{ et } y + z \neq 0 »$$

$$P_2 : « x + y + z = a »$$

$$P_3 : « x^2 + y^2 + z^2 = a^2 »$$

$$P_4 : « \frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} + a = 0 »$$

- 1) Montrer que $(P_2 \text{ et } P_3) \Rightarrow xy + yz + zx = 0$.
- 2) En déduire que $(P_1 \text{ et } P_2 \text{ et } P_3) \Rightarrow P_4$.

Correction

- 1) Si $x + y + z = a$ et $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, alors $(x + y + z)^2 = a^2$, soit $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = a^2$, d'où $a^2 + 2(xy + yz + zx) = a^2$ et $xy + yz + zx = 0$.
- 2) Si P_1, P_2 et P_3 sont vraies : $xy + yz + zx = 0$, donc $x(y + z) = -yz, y(x + z) = -xz, z(x + y) = -xy$, d'où $x = -\frac{yz}{y+z}, y = -\frac{xz}{x+z}, z = -\frac{xy}{x+y}$. En sommant : $a = x + y + z = -\left(\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y}\right)$, c'est-à-dire P_4 .

Exercice n° 76

Soient a et b deux réels. On considère les propositions :

$$P_1 : \ll a \geq 1 \text{ et } b \geq 1 \gg, \quad P_2 : \ll \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{ab} \gg, \quad P_3 : \ll a^5 b^5 \geq 2^{20} \gg, \quad P_4 : \ll a^5 + b^5 \geq 2^{11} \gg.$$

1) Montrer que $(P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow P_3$.

2) Montrer que $(P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow P_4$.

Correction

1) Supposons $a \geq 1, b \geq 1$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Comme $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}$, on a $\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab}}$, soit $\sqrt{\sqrt{ab}}(\sqrt{\sqrt{ab}} - 2) \geq 0$. Comme $\sqrt{\sqrt{ab}} > 0$, on obtient $\sqrt{\sqrt{ab}} \geq 2$, donc $\sqrt{ab} \geq 4$ et $ab \geq 2^4$. Ainsi $a^5 b^5 \geq 2^{20}$.

2) On a $a^5 + b^5 \geq 2\sqrt{a^5 b^5} \geq 2\sqrt{2^{20}} = 2 \times 2^{10} = 2^{11}$.

Exercice n° 77

Soient a, b, c, x, y et z des réels non nuls. On considère les propositions :

$$P : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad Q : \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0, \quad R : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1) Montrer que $Q \Rightarrow \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} = 0$.

2) Montrer que $P \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\right) = 1$.

3) En déduire que $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.

Correction

1) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{xyz}{abc} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} = 0$.

2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\right) = 1$.

3) Si P et Q sont vraies, d'après 1) la parenthèse est nulle, et d'après 2) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Donc $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.

Exercice n° 78

Soient a, b et c des réels positifs tels que

$$a + \sqrt{2} = b + \sqrt{3} = c + \sqrt{5} = k.$$

Montrer que $a\sqrt{3} + b\sqrt{5} + c\sqrt{2} \leq k^2$.

Correction

On a $k^3 = (a + \sqrt{2})(b + \sqrt{3})(c + \sqrt{5})$. En développant et en utilisant $a = k - \sqrt{2}, b = k - \sqrt{3}, c = k - \sqrt{5}$, on vérifie que

$$k^3 = abc + \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5} + k(\sqrt{3}a + \sqrt{5}b + \sqrt{2}c).$$

Comme $abc \geq 0$ et $\sqrt{30} > 0 : k^3 \geq k(\sqrt{3}a + \sqrt{5}b + \sqrt{2}c)$, et puisque $k > 0 : a\sqrt{3} + b\sqrt{5} + c\sqrt{2} \leq k^2$.

Exercice n° 79

Montrer que les implications suivantes sont vraies :

- 1) $(\forall x \in [0; +\infty[) \quad \sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow x = 0$
- 2) $(\forall x \in [1; +\infty[) (\forall y \in [1; +\infty[) \quad \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ et } y = 8$
- 3) $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+4} = 4 \Rightarrow x = y = 0$
- 4) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) \quad \frac{x+y+2}{2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$
- 5) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) \quad |x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \Rightarrow \left| \frac{x+y}{1+xy} \right| < 1$
- 6) $(\forall x \geq 1) (\forall y \geq 1) \quad x = y - 2\sqrt{y} \Rightarrow y = (\sqrt{x+1} + 1)^2$
- 7) $(\forall x \in [0; +\infty[) (\forall y \in [1; +\infty[) (\forall z \in [2; +\infty[)$
 $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z) \Rightarrow x = 1 \text{ et } y = 2 \text{ et } z = 3$
- 8) $(\forall a \in \mathbb{R}) (\forall b \in \mathbb{R}) \quad \left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| < 1 \Rightarrow |a| < 1 \text{ et } |b| < 1$

Note : question 2 : l'énoncé source indique $y \in [1; +\infty[$; l'expression $\sqrt{y-4}$ impose en fait $y \geq 4$.

Correction

- 1) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow 1+x = 1+x + \frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = 0.$
- 2) $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow (x-1-2\sqrt{x-1}+1) + (y-4-4\sqrt{y-4}+4) = 0 \Rightarrow (\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-4}-2)^2 = 0$
 $\Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \text{ et } \sqrt{y-4} = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ et } y = 8.$
- 3) $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+4} = 4 \Rightarrow (\sqrt{x^2+4}-2) + (\sqrt{y^2+4}-2) = 0$; les deux termes sont positifs, donc nuls : $x^2+4 = 4$ et $y^2+4 = 4$, d'où $x = y = 0$.
- 4) $\frac{x+y+2}{2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow (x-2\sqrt{x}+1) + (y-2\sqrt{y}+1) = 0 \Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y}-1)^2 = 0 \Rightarrow x = y = 1.$
- 5) $|x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \Rightarrow (x^2-1)(y^2-1) > 0 \Rightarrow x^2y^2+1 > x^2+y^2 \Rightarrow x^2y^2+1+2xy > x^2+y^2+2xy$
 $\Rightarrow (xy+1)^2 > (x+y)^2 \Rightarrow |xy+1| > |x+y| \Rightarrow \left| \frac{x+y}{1+xy} \right| < 1.$
- 6) $x = y - 2\sqrt{y} \Rightarrow y - 2\sqrt{y} + 1 = x + 1 \Rightarrow (\sqrt{y}-1)^2 = x+1 \Rightarrow \sqrt{y}-1 = \sqrt{x+1} \text{ (car } \sqrt{y} \geq 1)$
 $\Rightarrow y = (\sqrt{x+1} + 1)^2.$
- 7) $\frac{1}{2}(x+y+z) = \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} \Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y-1}-1)^2 + (\sqrt{z-2}-1)^2 = 0$
 $\Rightarrow \sqrt{x} = 1 \text{ et } \sqrt{y-1} = 1 \text{ et } \sqrt{z-2} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ et } y = 2 \text{ et } z = 3.$
- 8) $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \text{ et } b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$; d'après l'inégalité triangulaire : $|a| \leq \left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| < 1$ et $|b| \leq \left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| < 1.$

Exercice n° 80

Soient a et b deux nombres réels positifs.

- 1) Montrer que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
- 2) Montrer que $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ et $ab \leq \frac{1}{4}$.
- 3) Montrer que $a+b=1 \Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Question 2 : l'énoncé source est imprimé « $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2 \geq ab \leq \frac{1}{4}$ » ; la correction du document source établit $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ puis $ab \leq \frac{1}{4}$.

Correction

Soient $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

- 1) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2}{4} = -\frac{(a-b)^2}{4} \leq 0$. Donc $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
- 2) Si $a+b=1$: d'après 1), $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{1}{4}$, d'où $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$.
De plus $(a+b)^2=1$, soit $a^2+b^2+2ab=1$; comme $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$, on a $2ab \leq \frac{1}{2}$, d'où $ab \leq \frac{1}{4}$.
- 3) D'après 1), pour tous $x, y \geq 0$: $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. On pose $x = a + \frac{1}{a}$ et $y = b + \frac{1}{b}$ ($a, b > 0$) :

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(a + b + \frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2.$$

Or $ab \leq \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{ab} \geq 4$, d'où $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}(1+4)^2 = \frac{25}{2}$.

Exercice n° 81

Soient a, b et c trois réels tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |ax^2 + bx + c| \leq 1 \quad (*)$$

- 1) Montrer que $|c| \leq 1$.
- 2) Montrer que $-1 \leq a + c \leq 1$.
- 3) En déduire que $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

Note : question 2 : l'énoncé source imprime des inégalités strictes ; la correction du document source établit des inégalités larges.

Correction

- 1) Pour $x = 0$, (*) donne $|c| \leq 1$.
- 2) Pour $x = 1$: $|a + b + c| \leq 1$; pour $x = -1$: $|a - b + c| \leq 1$. Donc $-1 \leq a + b + c \leq 1$ et $-1 \leq a - b + c \leq 1$; en ajoutant : $-2 \leq 2(a + c) \leq 2$, d'où $-1 \leq a + c \leq 1$.
- 3) Posons $s = a + c$. Les inégalités $|s + b| \leq 1$ et $|s - b| \leq 1$ donnent $|s| + |b| \leq 1$ (car $\max(|s + b|, |s - b|) = |s| + |b|$), donc $|b| \leq 1 - |s|$. De plus $|a| = |s - c| \leq |s| + 1$ et $c^2 \leq 1$. D'où

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq (1 + |s|)^2 + (1 - |s|)^2 + 1 = 2s^2 + 3 \leq 5.$$

Note : le raisonnement du document source pour la question 3 est incomplet ; il a été remplacé par la déduction ci-dessus, qui utilise les mêmes inégalités.

Exercice n° 82

Soient x et y deux réels non nuls et non opposés.

- 1) Montrer que : $\left((x + y) \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \right) \Rightarrow (x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q})$.
- 2) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout $b \in \mathbb{Z}$ tels que $a^2 - 2b^2 = 1$:

$$\frac{|b|}{a} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow a \geq 3 \Leftrightarrow |b| \geq 2.$$

Note : question 2 : l'énoncé source imprime « $a > 3$ » ; la correction du document source traite $a \geq 3$.

Correction

- 1) Soient x, y non nuls tels que $x \neq -y$, $(x + y) \in \mathbb{Q}$ et $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Alors $\frac{y}{x} \in \mathbb{Q}$ et $(x + y)\frac{y}{x} = y\left(1 + \frac{y}{x}\right) \in \mathbb{Q}$.
Comme $1 + \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}$ est non nul (car $x \neq -y$), on obtient $y = \frac{y\left(1 + \frac{y}{x}\right)}{1 + \frac{y}{x}} \in \mathbb{Q}$. Enfin $x = (x + y) - y \in \mathbb{Q}$.
- 2) Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $a^2 - 2b^2 = 1$; alors $a^2 = 1 + 2b^2$ et $a \geq 1$.

$$a \geq 3 \Leftrightarrow a^2 \geq 9 \Leftrightarrow 1 + 2b^2 \geq 9 \Leftrightarrow b^2 \geq 4 \Leftrightarrow |b| \geq 2.$$

$$\frac{|b|}{a} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow b^2 \geq \frac{4}{9}a^2 \Leftrightarrow b^2 \geq \frac{4}{9}(1 + 2b^2) \Leftrightarrow \frac{b^2}{9} \geq \frac{4}{9} \Leftrightarrow b^2 \geq 4 \Leftrightarrow |b| \geq 2.$$

$$\text{D'où } \frac{|b|}{a} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow |b| \geq 2 \Leftrightarrow a \geq 3.$$

Exercice n° 83

Soient a, b, c des nombres réels et a', b', c' des nombres réels strictement positifs.

- 1) Montrer que : $\frac{a}{a'} \leq \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} \leq \frac{a+b}{a'+b'} \leq \frac{b}{b'}$.
- 2) Montrer que : $\frac{a}{a'} \leq \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{a'} \leq \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \leq \frac{c}{c'}$.

Note : l'énoncé source mêle inégalités strictes et larges et place mal une parenthèse au dénominateur ; la version retenue est celle de la correction du document source.

Correction

- 1) Si $\frac{a}{a'} \leq \frac{b}{b'}$ (avec $a' > 0, b' > 0$), alors $ab' \leq a'b$.
 D'où $ab' + aa' \leq a'b + aa'$, soit $a(a' + b') \leq a'(a + b)$, donc $\frac{a}{a'} \leq \frac{a+b}{a'+b'}$ (1).
 De même $ab' + bb' \leq a'b + bb'$, soit $b'(a + b) \leq b(a' + b')$, donc $\frac{a+b}{a'+b'} \leq \frac{b}{b'}$ (2).
 De (1) et (2) : $\frac{a}{a'} \leq \frac{a+b}{a'+b'} \leq \frac{b}{b'}$.
- 2) On a $\frac{a}{a'} \leq \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'}$. D'après 1) : $\frac{a}{a'} \leq \frac{a+b}{a'+b'} \leq \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'}$. En appliquant de nouveau 1) à $\frac{a+b}{a'+b'} \leq \frac{c}{c'}$:
 $\frac{a+b}{a'+b'} \leq \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \leq \frac{c}{c'}$. D'où $\frac{a}{a'} \leq \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \leq \frac{c}{c'}$.

Exercice n° 84

Soit a un réel strictement positif tel que $a^5 - a^3 + a = 2$.

- 1) Montrer que $a^6 + 1 = 2 \left(a + \frac{1}{a} \right)$.
- 2) En déduire que $a^6 \geq 3$.
- 3) Montrer que $\frac{2}{a^3} + 1 = a^2 + \frac{1}{a^2}$.
- 4) En déduire que $a^6 \leq 4$.

Correction

- 1) $a^6 + 1 = (a^2)^3 + 1 = (a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1) = \frac{a^2 + 1}{a}(a^5 - a^3 + a) = 2 \left(a + \frac{1}{a} \right)$.
- 2) Comme $a + \frac{1}{a} \geq 2$, on a $a^6 + 1 \geq 4$, donc $a^6 \geq 3$.
- 3) $a^5 + a = 2 + a^3$; en divisant par a^3 : $a^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^3} + 1$.
- 4) Comme $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$: $\frac{2}{a^3} + 1 \geq 2$, d'où $\frac{2}{a^3} \geq 1$, $a^3 \leq 2$ et $a^6 \leq 4$.

Exercice n° 85

1) Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R}_+^*), a + \frac{1}{a} \geq 2$.

2) Soient x et p deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$x^5 - x^3 + x = p \Rightarrow x^6 \geq 2p - 1.$$

Correction

1) Pour $a > 0$: $a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$, donc $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

2) Supposons $x^5 - x^3 + x = p$; montrons que $x^6 + 1 \geq 2p$. Comme $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$:
 $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = \frac{x^2 + 1}{x} (x^5 - x^3 + x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) p$ (car $x > 0$). D'après 1), $x + \frac{1}{x} \geq 2$,
 et $p > 0$, donc $x^6 + 1 \geq 2p$, soit $x^6 \geq 2p - 1$.

Exercice n° 86

Soient a, b et c des réels de l'intervalle $]0; 1[$. On pose $A = (ab - 1)(bc - 1)(ac - 1)$.

1) Vérifier que $\frac{A}{abc} = \left(a - \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{c}\right) \left(c - \frac{1}{a}\right)$.

2) Montrer que $A < 0$.

3) En déduire que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc \leq a + b + c + \frac{1}{abc}$.

Correction

1) $\frac{A}{abc} = \frac{ab-1}{b} \times \frac{bc-1}{c} \times \frac{ac-1}{a} = \left(a - \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{c}\right) \left(c - \frac{1}{a}\right)$.

2) Comme $a, b, c \in]0; 1[$: $ab < 1$, $bc < 1$ et $ac < 1$; les trois facteurs de A sont strictement négatifs, donc $A < 0$.

3) $abc > 0$ et $A < 0$, donc $\left(a - \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{c}\right) \left(c - \frac{1}{a}\right) < 0$. Or, en développant, $\left(a - \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{c}\right) \left(c - \frac{1}{a}\right) = abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \left(a + b + c + \frac{1}{abc}\right)$. Donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc < a + b + c + \frac{1}{abc}$ (a fortiori $\leq$).

Exercice n° 87

Soient x et y deux réels tels que $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $|y| < 1$. Montrer que

$$|4x^2y - y - x| \leq \frac{17}{16}.$$

Correction

On rappelle : $|ab| = |a||b|$ et $|a - b| \leq |a| + |b|$.

$|4x^2y - y - x| = |y(4x^2 - 1) - x| \leq |y||4x^2 - 1| + |x| \leq |4x^2 - 1| + |x|$ (car $|y| < 1$). Comme $|x| \leq \frac{1}{2}$, $x^2 \leq \frac{1}{4}$ et $|4x^2 - 1| = 1 - 4x^2$; donc (1) : $|4x^2y - y - x| \leq -4x^2 + |x| + 1$.

Or $-4x^2 + |x| + 1 = -4\left(|x|^2 - \frac{1}{4}|x| - \frac{1}{4}\right) = -4\left(|x| - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{17}{16} \leq \frac{17}{16}$ (2).

De (1) et (2) : $|4x^2y - y - x| \leq \frac{17}{16}$.

Exercice n° 88

Soient a, b, c et d des entiers naturels tels que $1 < a < b < c < d$. Montrer que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a \cdot b \cdot c \cdot d} \leq \frac{31}{24}.$$

Correction

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$: $n > p \Leftrightarrow n - p \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow n - p \geq 1 \Leftrightarrow n \geq p + 1$ (1).

D'après (1), $1 < a < b < c < d$ donne $a \geq 2, b \geq 3, c \geq 4, d \geq 5$, donc $abcd \geq 120$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{120} = \frac{155}{120} = \frac{31}{24}$.

Exercice n° 89

Soient x et y deux réels tels que $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. Montrer que

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.$$

Correction

Comme $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$: $1-x^2 \geq 0$ et $1-y^2 \geq 0$. D'après $m \leq q$ (exercice sur les moyennes, valable pour des réels positifs) : $\frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{1-x^2+1-y^2}{2}} = \sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Or $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

(car $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$), donc $1-\frac{x^2+y^2}{2} \leq 1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ et $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$.

Exercice n° 90

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a+b=1$, et n un entier naturel. Montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{a^n}\right) \left(1 + \frac{1}{b^n}\right) \geq (1+2^n)^2.$$

Correction

D'après $h \leq m$: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$, donc $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$; avec $a+b=1$: $ab \leq \frac{1}{4}$, soit $\frac{1}{ab} \geq 4$, et donc

$\frac{1}{a^n b^n} \geq 4^n$, d'où $\sqrt{\frac{1}{a^n b^n}} \geq 2^n$.

D'autre part $\left(1 + \frac{1}{a^n}\right) \left(1 + \frac{1}{b^n}\right) = 1 + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{a^n b^n}$ et, d'après $m \geq g$, $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^n b^n}}$. Donc $\left(1 + \frac{1}{a^n}\right) \left(1 + \frac{1}{b^n}\right) \geq 1 + 2\sqrt{\frac{1}{a^n b^n}} + \frac{1}{a^n b^n} \geq 1 + 2 \times 2^n + (2^n)^2 = (1+2^n)^2$.

Série 2 Raisonnement par équivalences successives

Exercice n° 91

Soient x et y deux réels. Démontrer que : $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

Correction

Méthode 1 (équivalences successives). Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ ou $x + y = 0 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

Méthode 2 (deux implications). Si $x^2 = y^2$, alors $(x - y)(x + y) = 0$, donc $x = y$ ou $x = -y$. Réciproquement, si $x = y$ alors $x^2 = y^2$, et si $x = -y$ alors $x^2 = (-y)^2 = y^2$.

Conclusion : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

Exercice n° 92

Montrer que :

1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (xy - 2 = y - 2x) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } y = -2) ;$

2) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{a^2 + b^2}{2} = a + b - 1 \Leftrightarrow (a = 1 \text{ et } b = 1) ;$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^+), (\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1) \Leftrightarrow (x = 1).$

Correction

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $xy - 2 = y - 2x \Leftrightarrow xy - y + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow y(x - 1) + 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $y = -2$.

2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{a^2 + b^2}{2} = a + b - 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2a + 2b - 2 \Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) = 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ et $b = 1$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+2} = \sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow 2x + 2 = x + 2\sqrt{x} + 1$ (les deux membres étant positifs)
 $\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Exercice n° 93

Montrer que :

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+), \quad \frac{x+y+2}{2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow (x=1 \text{ et } y=1) ;$
- 2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad xy+6=3x+2y \Leftrightarrow (x=2 \text{ ou } y=3) ;$
- 3) $(\forall x \in [1; +\infty[) (\forall y \in [2; +\infty[), \quad \left(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-2} = \frac{x+y+2}{2} \right) \Leftrightarrow (x=2 \text{ et } y=6).$

Correction

- 1) Soient $x, y \in [0; +\infty[: \frac{x+y+2}{2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow (x-2\sqrt{x}+1) + (y-2\sqrt{y}+1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y}-1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \text{ et } \sqrt{y}=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=1.$
- 2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy+6=3x+2y \Leftrightarrow xy-3x-2y+6=0 \Leftrightarrow x(y-3)-2(y-3)=0 \Leftrightarrow (x-2)(y-3)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ou } y=3.$
- 3) Soient $x \in [1; +\infty[\text{ et } y \in [2; +\infty[:$

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-2} = \frac{x+y+2}{2} &\Leftrightarrow (x-1-2\sqrt{x-1}+1) + (y-2-4\sqrt{y-2}+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-2}-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1 \text{ et } \sqrt{y-2}=2 \Leftrightarrow x=2 \text{ et } y=6. \end{aligned}$$

Exercice n° 94

Soit x un réel. On considère les propositions :

$$A : \cos^3 x + \sin^3 x = 1, \quad B : \sin x = 1 \text{ et } \cos x = 0, \quad C : \sin x = 0 \text{ et } \cos x = 1.$$

Montrer que $A \Leftrightarrow (B \text{ ou } C).$

Correction

$$A \Leftrightarrow \cos^3 x + \sin^3 x = \cos^2 x + \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x(1 - \cos x) + \sin^2 x(1 - \sin x) = 0.$$

Or, pour tout réel x , $\cos^2 x(1 - \cos x) \geq 0$ et $\sin^2 x(1 - \sin x) \geq 0$. Donc

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow \cos^2 x(1 - \cos x) = 0 \text{ et } \sin^2 x(1 - \sin x) = 0 \\ &\Rightarrow (\cos^2 x = 0 \text{ ou } \cos x = 1) \text{ et } (\sin^2 x = 0 \text{ ou } \sin x = 1). \end{aligned}$$

Les cas $\cos x = \sin x = 0$ et $\cos x = \sin x = 1$ sont impossibles (car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). Il reste $(\cos x = 0 \text{ et } \sin x = 1)$ ou $(\cos x = 1 \text{ et } \sin x = 0)$, c'est-à-dire B ou C . Donc $A \Rightarrow (B \text{ ou } C).$

Réciproquement, il est évident que $(B \text{ ou } C) \Rightarrow A$. Donc $A \Leftrightarrow (B \text{ ou } C).$

Exercice n° 95

Soient x et y deux réels. On considère les propositions :

$$p : (x + \sqrt{x^2 + 1}) (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \quad \text{et} \quad q : x + y = 0.$$

Montrer que $p \Leftrightarrow q$.

Correction

$q \Rightarrow p$: si $x + y = 0$, alors $y = -x$ et $(x + \sqrt{x^2 + 1}) (-x + \sqrt{x^2 + 1}) = x^2 + 1 - x^2 = 1$. Donc $q \Rightarrow p$.

$p \Rightarrow q$: si p , alors $x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} = \sqrt{y^2 + 1} - y$, donc

$$x + y = \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{y^2 - x^2}{\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}},$$

d'où $(x + y) (\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}) = (x + y)(y - x)$, soit $(x + y) (\sqrt{y^2 + 1} - y + \sqrt{x^2 + 1} + x) = 0$.

Or, pour tout réel a , $\sqrt{a^2 + 1} > |a|$, donc $\sqrt{a^2 + 1} - a > 0$ et $\sqrt{a^2 + 1} + a > 0$. Le second facteur est donc non nul, d'où $x + y = 0$. Ainsi $p \Rightarrow q$.

Conclusion : $p \Leftrightarrow q$.

Exercice n° 96

Déterminer les réels x et y tels que : $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2}$.

Correction

L'égalité n'a de sens que pour $x \geq 1$ et $y \geq 4$. On a :

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x - 2\sqrt{x-1} + y - 4\sqrt{y-4} = 0$$

$$\Rightarrow [(x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1] + [(y-4) - 4\sqrt{y-4} + 4] = 0 \Rightarrow (\sqrt{x-1} - 1)^2 + (\sqrt{y-4} - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \text{ et } \sqrt{y-4} = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ et } y = 8.$$

Réciproquement, $(2; 8)$ vérifie l'égalité : $1 + 2 \times 2 = 5 = \frac{2+8}{2}$. Les réels cherchés sont $x = 2$ et $y = 8$.

Exercice n° 97

Soient a et b deux réels. Montrer que :

$$|a| < 1 \text{ et } |b| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1.$$

Correction

On a $-1 < a < 1$ et $-1 < b < 1$, donc $-1 < ab < 1$ et $0 < 1 + ab < 2$.

$$\frac{a+b}{1+ab} - 1 = \frac{a+b-1-ab}{1+ab} = \frac{(a-1)(1-b)}{1+ab}.$$

Or $a-1 < 0$, $1-b > 0$ et $1+ab > 0$, donc $\frac{a+b}{1+ab} < 1$ (*). D'autre part :

$$\frac{a+b}{1+ab} + 1 = \frac{a+b+1+ab}{1+ab} = \frac{(a+1)(1+b)}{1+ab} > 0,$$

donc $\frac{a+b}{1+ab} > -1$ (**). D'après (*) et (**): $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$.

Exercice n° 98

Montrer que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} < c \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < c \\ |b| < c \end{cases}$$

Correction

Soient a, b, c des réels.

Sens direct. $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$, donc $|a| \leq \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} < c$. De même $b = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}$, d'où $|b| \leq \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} < c$.

Réciproque. Supposons $|a| < c$ et $|b| < c$. On a $\frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \max(|a|, |b|)$; en effet, par disjonction des cas :

- si $|b| \leq |a|$: $a+b \geq 0$ et $a-b \geq 0$, la somme vaut $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a = |a|$;
- si $a \leq -|b|$: la somme vaut $\frac{-a-b}{2} + \frac{b-a}{2} = -a = |a|$;
- si $|a| \leq |b|$: de même la somme vaut $|b|$.

Dans tous les cas, $\frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} < c$. D'où l'équivalence demandée.

Exercice n° 99

En utilisant le raisonnement par équivalence, montrer que :

- 1) $(\forall x \in [1; +\infty[) (\forall y \in [1; +\infty[) \quad \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy}$;
- 2) $\forall a, b \in \mathbb{R}^* \quad \frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+1}} \Rightarrow |a| = |b|$.

Correction

- 1) Pour $x \geq 1$ et $y \geq 1$: $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y - 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} \leq xy \Leftrightarrow (x-1)(y-1) - 2\sqrt{(x-1)(y-1)} + 1 \geq 0$
 $\Leftrightarrow \left[\sqrt{(x-1)(y-1)} - 1 \right]^2 \geq 0$, ce qui est vrai.
- 2) $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+1}} \Leftrightarrow a^4(b^2+1) = b^4(a^2+1) \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2) + (a^2-b^2)(a^2+b^2) = 0$
 $\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a^2b^2+a^2+b^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2$ (car le second facteur est > 0) $\Leftrightarrow |a| = |b|$.

Exercice n° 100

Soient a et b deux réels.

- 1) Montrer que si $|a| < 1$ et $|b| < 1$, alors $|a+b| < |1+ab|$.
- 2) Montrer que $(a = 18 \text{ et } b = 8) \Leftrightarrow 3\sqrt{a-9} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2}$.
- 3) Soit c un réel strictement positif. Montrer que si $3 < c^4 + 8c^3 + 18c^2 + 8c$, alors $\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{2}}} < c + 2$.

Correction

- 1) Supposons $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Par équivalences successives : $|a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2-1)(1-b^2) < 0$,
ce qui est vrai car $a^2-1 < 0$ et $1-b^2 > 0$.
- 2) L'expression est définie si, et seulement si, $a \geq 9$ et $b \geq 4$. On a alors :

$$3\sqrt{a-9} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow (a-9-6\sqrt{a-9}+9) + (b-4-4\sqrt{b-4}+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a-9}-3)^2 + (\sqrt{b-4}-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a-9} = 3 \text{ et } \sqrt{b-4} = 2 \Leftrightarrow a = 18 \text{ et } b = 8.$$
- 3) $\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{2}}} < c + 2 \Leftrightarrow \sqrt{5 - \sqrt{2}} < c^2 + 4c + 1 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{2} < c^4 + 8c^3 + 18c^2 + 8c$,
ce qui est vrai car $3 < c^4 + 8c^3 + 18c^2 + 8c$ et $4 - \sqrt{2} < 3$.

Exercice n° 101

Soient $(a; r)$ et $(b; s)$ deux éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$]a - r; a + r[=]b - s; b + s[\Leftrightarrow (a; r) = (b; s).$$

Correction

Il est clair que si $(a; r) = (b; s)$, alors $]a - r; a + r[=]b - s; b + s[$.

Inversement, supposons $]a - r; a + r[=]b - s; b + s[$. Deux intervalles bornés de même nature sont égaux si, et seulement si, ils ont le même centre et le même rayon. Or $]a - r; a + r[$ a pour centre a et pour rayon r , et $]b - s; b + s[$ a pour centre b et pour rayon s . D'où $(a; r) = (b; s)$.

Exercice n° 102

Soient a, b, x et y des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{x}{y} < \frac{ax + by}{bx + ay} < \frac{y}{x} \Leftrightarrow x < y.$$

Correction

Par équivalences successives (tous les nombres étant strictement positifs) :

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} < \frac{ax + by}{bx + ay} < \frac{y}{x} &\Leftrightarrow \begin{cases} x(bx + ay) < y(ax + by) \\ x(ax + by) < y(bx + ay) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} axy + bx^2 < axy + by^2 \\ ax^2 + bxy < ay^2 + bxy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < y^2 \\ x^2 < y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x < y. \end{aligned}$$

Exercice n° 103

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$.

Correction

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1 \Leftrightarrow \frac{(n^2 - 1)(n + 1)}{n^3} > 1 \Leftrightarrow n^3 + n^2 - n - 1 > n^3 \Leftrightarrow n^2 - n - 1 > 0.$$

L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a pour solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; donc l'inégalité équivaut à $n > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire $n \geq 2$, ce qui est vrai.

Exercice n° 104

Montrer que $(\forall a \in [0; +\infty[), a < \sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 \Rightarrow a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a < 3$.

Correction

Soit $a \in [0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} a < \sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 &\Rightarrow a + 2 < \sqrt{3} + \sqrt{3} \Rightarrow (a + 2)^2 < 3 + \sqrt{3} \Rightarrow a^2 + 4a + 1 < \sqrt{3} \\ &\Rightarrow (a^2 + 4a + 1)^2 < 3 \quad (\text{car } a^2 + 4a + 1 > 0) \Rightarrow a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a + 1 < 3 \\ &\Rightarrow a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a < 2 < 3. \end{aligned}$$

Conclusion : $(\forall a \geq 0), a < \sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 \Rightarrow a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a < 3$.

Exercice n° 105

Montrer que $(\forall x \in [-2; 2]) \quad \sqrt{4 - x^2} - x \leq 2\sqrt{2}$.

Correction

Soit $x \in [-2; 2]$; les deux membres de $\sqrt{4 - x^2} \leq x + 2\sqrt{2}$ sont positifs, donc :

$$\sqrt{4 - x^2} - x \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 - x^2 \leq (x + 2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{2})^2 \geq 0,$$

ce qui est vrai. Donc $(\forall x \in [-2; 2]) \quad \sqrt{4 - x^2} - x \leq 2\sqrt{2}$.

Exercice n° 106

Soient a et b deux réels. On considère les deux propositions :

$$P : \text{« } a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \text{ »} \quad \text{et} \quad Q : \text{« } (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0 \text{ »}.$$

1) Montrer que $P \Leftrightarrow Q$.

2) En déduire que la proposition P est vraie.

Correction

$$1) P \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) \geq 2(ab + a + b) \Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow Q.$$

2) Q est vraie (somme de carrés) et $P \Leftrightarrow Q$, donc P est vraie.

Exercice n° 107

Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x}.$$

Correction

Soient $x, y > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x} &\Leftrightarrow x^2(5x+2y) < xy(2x+5y) < y^2(5x+2y) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3 + 2x^2y < 2x^2y + 5xy^2 \\ 2x^2y + 5xy^2 < 5xy^2 + 2y^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3 < 5xy^2 \\ 2x^2y < 2y^3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 < y^2 \Leftrightarrow x < y \quad (\text{car } x > 0, y > 0). \end{aligned}$$

Exercice n° 108

Montrer que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Correction

$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} - 1) + (\sqrt{y^2+1} - 1) = 0$. Les deux termes sont positifs, donc

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 1 \text{ et } \sqrt{y^2+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Exercice n° 109

Soient a et b deux réels. Montrer que la proposition P : « $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$ » est vraie.

Correction

$$P \Leftrightarrow a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 \geq 0 \Leftrightarrow a^3(a-b) - b^3(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^3 - b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \right] \geq 0. \text{ Cette dernière inégalité est vraie, donc } P \text{ est vraie.}$$

Exercice n° 110

Soient x et y deux réels. Montrer que : $x + y = 0 \Leftrightarrow (|x| = |y| \text{ et } xy \leq 0)$.

Correction

Si $x + y = 0$, alors $x = -y$, donc $x^2 = y^2$ et $xy = -y^2 \leq 0$; ainsi $|x| = |y|$ et $xy \leq 0$.

Réciproquement, si $|x| = |y|$ et $xy \leq 0$, alors $x = y$ ou $x = -y$. Si $x = y$, $xy = x^2 \leq 0$ impose $x = y = 0$ et $x + y = 0$; sinon $x = -y$. Dans les deux cas $x + y = 0$.

Exercice n° 111

- 1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$.
- 2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+), \sqrt{\frac{x^2+3x+1}{5}} \geq \sqrt{x}$.

Correction

- 1) $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1 \Leftrightarrow 1+x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$, ce qui est vrai.
- 2) Pour $x \geq 0$: $\sqrt{\frac{x^2+3x+1}{5}} \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+1}{5} \geq x \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, ce qui est vrai.

Exercice n° 112

- 1) Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\forall b \in \mathbb{R}^+) ; \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
- 2) En déduire que $(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{15}) \geq 8\sqrt{15}$.

Correction

- 1) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Méthode 1 : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, ce qui est vrai.
Méthode 2 : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$.
- 2) D'après 1) appliqué à 1 et $\sqrt{3}$, à 1 et $\sqrt{5}$, puis à 1 et $\sqrt{15}$: $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{3}}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{5}}$, $\frac{1+\sqrt{15}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{15}}$. Ces nombres sont positifs ; en multipliant membre à membre : $\frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{15})}{8} \geq \sqrt{\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{15}} = \sqrt{\sqrt{15}\sqrt{15}} = \sqrt{15}$. Donc $(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{15}) \geq 8\sqrt{15}$.

Exercice n° 113

- 1) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{2\pi}{3} + k\pi \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right] \Leftrightarrow k \in \{-1; 0; 1\}$.
- 2) Soit a un réel tel que $|a-2| \leq \frac{2}{3}$. Montrer que $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{3a+2} \leq \frac{1}{6}$.

Correction

- 1) $\frac{2\pi}{3} + k\pi \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \leq k\pi \leq \frac{5\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\pi \leq k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -1 \leq k \leq 1$. Comme $k \in \mathbb{Z} : \Leftrightarrow k \in \{-1; 0; 1\}$.
- 2) $|a-2| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq a-2 \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq a \leq \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4 \leq 3a \leq 8 \Leftrightarrow 6 \leq 3a+2 \leq 10 \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{3a+2} \leq \frac{1}{6}$.

Exercice n° 114

- 1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) ; (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.
- 2) Soient a et b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 2$. Montrer que $|a + b| \leq 2$.

Correction

- 1) $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x - y)^2$, ce qui est vrai.
- 2) D'après 1) : $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 4$, donc $|a + b| = \sqrt{(a + b)^2} \leq 2$.

Série 3 Inégalités classiques et moyennes**Exercice n° 115***Les moyennes*

Soient a et b deux réels strictement positifs. On appelle :

- $m = \frac{a + b}{2}$ la moyenne arithmétique des nombres a et b ;
- $g = \sqrt{ab}$ la moyenne géométrique des nombres a et b ;
- $h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ la moyenne harmonique des nombres a et b ;
- $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ la moyenne quadratique des nombres a et b .

- 1) Montrer que $h \leq g \leq m \leq q$.
- 2) Soient a, b et c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(1) a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$(6) (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

$$(2) \frac{ab}{a + b} \leq \frac{a + b}{4}$$

$$(7) \frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2ab}$$

$$(3) (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$$

$$(8) \frac{a + b}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$(4) (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

$$(9) \frac{a + b}{a^2 + b^2} + \frac{b + c}{b^2 + c^2} + \frac{c + a}{c^2 + a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$(5) \frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ac}{c + a} \leq \frac{a + b + c}{2}$$

$$(10) \frac{a^2 + 1}{b} + \frac{b^2 + 1}{a} \geq 4$$

Correction

- 1) $g \leq m : \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, ce qui est vrai (et reste vrai pour $a, b \geq 0$).

$$h \leq g : \text{en appliquant } g \leq m \text{ à } \frac{1}{a} \text{ et } \frac{1}{b} : \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}}, \text{ d'où } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

$$m \leq q : \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$$

Donc $h \leq g \leq m \leq q$.

- 2) (1) $m \geq g$ appliqué à a et $\frac{1}{a} : \frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 1$, donc $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

$$(2) \quad h \leq m : \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ donc } \frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}.$$

$$(3) \quad \text{De même } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2} \text{ donne } 4 \leq (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

$$(4) \quad (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9, \text{ d'après (1)} \\ (x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ pour } x > 0).$$

$$(5) \quad \text{On écrit (2) pour } (a,b), (b,c) \text{ et } (a,c), \text{ puis on additionne : } \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{c+a} \leq \frac{2(a+b+c)}{4} = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$(6) \quad m \geq g : a+b \geq 2\sqrt{ab}, b+c \geq 2\sqrt{bc}, c+a \geq 2\sqrt{ac}; \text{ ces nombres sont positifs, on multiplie :} \\ (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

$$(7) \quad a^2 + b^2 \geq 2ab > 0 \text{ (car } (a-b)^2 \geq 0), \text{ donc } \frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2ab}.$$

$$(8) \quad \text{D'après (7) et } a+b > 0 : \frac{a+b}{a^2 + b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

$$(9) \quad \text{On écrit (8) pour } (a,b), (b,c) \text{ et } (c,a), \text{ puis on additionne : la somme est } \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

$$(10) \quad m \geq g : \frac{1}{2} \left(\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \right) \geq \sqrt{\frac{a^2+1}{a} \times \frac{b^2+1}{b}} = \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right)} \geq \sqrt{2 \times 2} = 2, \text{ d'après} \\ (1). \text{ Donc } \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4.$$

Exercice n° 116

$$1) \quad \text{Montrer que } (\forall a \in]1; +\infty[); \quad \frac{a^2}{a-1} \geq 4.$$

$$2) \quad \text{Montrer que } \forall (a; b) \in (]1; +\infty[)^2; \quad \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8.$$

Correction

$$1) \quad \text{Pour } a > 1, a-1 > 0; \text{ donc } \frac{a^2}{a-1} \geq 4 \Leftrightarrow a^2 \geq 4a-4 \Leftrightarrow a^2-4a+4 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 \geq 0, \text{ ce qui est vrai.}$$

$$2) \quad \text{Pour } x, y \geq 0 : x+y \geq 2\sqrt{xy} \text{ (voir l'exercice sur les moyennes). Comme } \frac{a^2}{b-1} > 0 \text{ et } \frac{b^2}{a-1} > 0 :$$

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1} \times \frac{b^2}{a-1}} = 2\sqrt{\frac{a^2}{a-1} \times \frac{b^2}{b-1}} \geq 2\sqrt{4 \times 4} = 8, \text{ d'après 1).}$$

4

CHAPITRE

Raisonnement par contraposée et raisonnement par l'absurde

Notions travaillées

- Loi de la contraposée : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
- Démontrer qu'une fonction prend des valeurs distinctes
- Raisonnement par l'absurde : $[\bar{p} \Rightarrow (q \text{ et } \bar{q})] \Rightarrow p$
- Irrationalité, non-existence d'une solution, d'un objet ou d'une fonction

Dans ce chapitre

Série 1 – Raisonnement par contraposée 59

Série 2 – Raisonnement par l'absurde 65

Série 1 Raisonnement par contraposée

Exercice n° 117

En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que :

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \left(x \neq y \text{ et } x \neq \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$;
- 2) $\forall x \geq 1, \forall y \geq 1, x \neq y \Rightarrow \frac{x+1}{x^2+1} \neq \frac{y+1}{y^2+1}$.

Correction

- 1) Par contraposée, montrons que $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow x = y \text{ ou } x = \frac{1}{y}$. On a :

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow x(y^2+y+1) = y(x^2+x+1) \Rightarrow xy^2+x-x^2y-y=0$$

$$\Rightarrow xy(y-x) + (x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(1-xy) = 0 \Rightarrow x = y \text{ ou } xy = 1 \Rightarrow x = y \text{ ou } x = \frac{1}{y}.$$

- 2) Montrons que $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{y+1}{y^2+1} \Rightarrow x = y$. On a :

$$(x+1)(y^2+1) = (x^2+1)(y+1) \Rightarrow xy^2 - x^2y + x - y + y^2 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow xy(y-x) + (x-y) + (y-x)(y+x) = 0 \Rightarrow (y-x)(xy-1+x+y) = 0 \Rightarrow x = y \text{ ou } xy+x+y = 1.$$

Or $x \geq 1$ et $y \geq 1$, donc $xy \geq 1$ et $xy+x+y \geq 3$: l'égalité $xy+x+y = 1$ est impossible. Donc $x = y$.

Par contraposée, les deux implications demandées sont vraies.

Exercice n° 118

En utilisant la contraposée, montrer que pour tous x et y de $\mathbb{R}$:

$$(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}.$$

Correction

Par contraposée : $\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{y}{y^2 + y + 1} \Rightarrow xy^2 + xy + x = yx^2 + xy + y \Rightarrow (x - y) - xy(x - y) = 0$
 $\Rightarrow (x - y)(1 - xy) = 0 \Rightarrow x = y \text{ ou } xy = 1.$

Exercice n° 119

En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que :

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x \neq -\sqrt{7} \text{ et } x \neq \sqrt{7}) \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2}} \neq 1 ;$
- 2) $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) \quad (a \neq b \text{ et } ab \neq 1) \Rightarrow \frac{a}{a^2 + 1} \neq \frac{b}{b^2 + 1}.$

Correction

- 1) Par contraposée, il suffit de montrer : $(\forall x \in \mathbb{R}), \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2}} = 1 \Rightarrow x = -\sqrt{7} \text{ ou } x = \sqrt{7}.$

$$\frac{3}{\sqrt{x^2 + 2}} = 1 \Rightarrow 3 = \sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow 9 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7} \text{ ou } x = -\sqrt{7}.$$

- 2) Il suffit de montrer : $\frac{a}{a^2 + 1} = \frac{b}{b^2 + 1} \Rightarrow (a = b \text{ ou } ab = 1).$

$$\frac{a}{a^2 + 1} = \frac{b}{b^2 + 1} \Rightarrow a(b^2 + 1) = b(a^2 + 1) \Rightarrow ab^2 - a^2b + a - b = 0 \Rightarrow -ab(a - b) + (a - b) = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)(1 - ab) = 0 \Rightarrow a = b \text{ ou } ab = 1.$$

Par contraposée, les deux implications demandées sont vraies.

Exercice n° 120

Montrer que :

- 1) $(\forall x \in [1; +\infty[) (\forall y \in [1; +\infty[) \quad x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y ;$
- 2) $(\forall x \in]1; +\infty[) (\forall y \in]1; +\infty[) \quad x \neq y \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} \neq \frac{y}{y^2 - 1}.$

Correction

- 1) Il suffit de montrer : $x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow x = y$, pour $x, y \in [1; +\infty[.$

$$x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow (x - 1)^2 = (y - 1)^2 \Rightarrow |x - 1| = |y - 1| \Rightarrow x - 1 = y - 1 \text{ (car } x - 1 \geq 0 \text{ et } y - 1 \geq 0) \Rightarrow x = y.$$

- 2) Il suffit de montrer : $\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{y}{y^2 - 1} \Rightarrow x = y$, pour $x > 1$ et $y > 1.$

$$x(y^2 - 1) = y(x^2 - 1) \Rightarrow xy^2 - yx^2 - x + y = 0 \Rightarrow xy(y - x) + (y - x) = 0 \Rightarrow (y - x)(xy + 1) = 0 \Rightarrow y = x \text{ ou } xy = -1.$$

Or $x > 1$ et $y > 1$, donc $xy > 1$: $xy = -1$ est impossible. Donc $x = y$.

Exercice n° 121

En utilisant la contraposée, montrer que pour tous x et y de $]1; +\infty[$:

$$x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y.$$

Correction

Par contraposée, il suffit de montrer : $x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow x = y$. $x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow (x - y)(x + y) - 2(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y - 2) = 0 \Rightarrow x = y$ ou $x + y = 2$.

Comme $x > 1$ et $y > 1$, on a $x + y > 2$, donc $x + y \neq 2$ et $x = y$.

Exercice n° 122

Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$a \neq b \Rightarrow \frac{a+1}{a^2+2a+2} \neq \frac{b+1}{b^2+2b+2}.$$

Correction

Par contraposée, il suffit de montrer : $\frac{a+1}{a^2+2a+2} = \frac{b+1}{b^2+2b+2} \Rightarrow a = b$, pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

$$(a+1)(b^2+2b+2) = (b+1)(a^2+2a+2) \Rightarrow ab^2 + b^2 = a^2b + a^2 \Rightarrow ab(b-a) + (b-a)(b+a) = 0$$

$$\Rightarrow (b-a)(ab+a+b) = 0 \Rightarrow b = a \text{ ou } ab+a+b = 0.$$

Or $a > 0$ et $b > 0$, donc $ab+a+b > 0$: le second cas est impossible. Donc $a = b$.

Exercice n° 123

Montrer que, pour tous réels x et y :

$$(xy \neq -1 \text{ et } 2x + y \neq 1) \Rightarrow (2x^2y + xy^2 + 2x \neq xy - y + 1).$$

Correction

Par contraposée, il suffit de montrer : $2x^2y + xy^2 + 2x = xy - y + 1 \Rightarrow (xy = -1 \text{ ou } 2x + y = 1)$.

$$2x^2y + xy^2 + 2x = xy - y + 1 \Rightarrow xy(2x + y) + 2x - xy + y - 1 = 0 \Rightarrow xy(2x + y - 1) + (2x + y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2x + y - 1)(xy + 1) = 0 \Rightarrow 2x + y = 1 \text{ ou } xy = -1.$$

Exercice n° 124

Montrer que $(\forall a \in [1; +\infty[) (\forall b \in [4; +\infty[)$:

$$(a \neq 2 \text{ ou } b \neq 8) \Rightarrow \sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} \neq \frac{a+b}{2}.$$

Correction

Par contraposée, il suffit de montrer : $\sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow (a = 2 \text{ et } b = 8).$

$$\sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a - 2\sqrt{a-1} + b - 4\sqrt{b-4} = 0$$

$$\Rightarrow (a - 1 - 2\sqrt{a-1} + 1) + (b - 4 - 4\sqrt{b-4} + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a-1} - 1)^2 + (\sqrt{b-4} - 2)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{a-1} = 1 \text{ et } \sqrt{b-4} = 2 \Rightarrow a = 2 \text{ et } b = 8.$$

Exercice n° 125

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$:

$$(|x| \neq |y| \text{ et } |xy| \neq 1) \Rightarrow (y^2|x| - |y| \neq x^2|y| - |x|).$$

Correction

Il suffit de montrer : $y^2|x| - |y| = x^2|y| - |x| \Rightarrow (|x| = |y| \text{ ou } |xy| = 1).$

$$y^2|x| - |y| - x^2|y| + |x| = 0 \Rightarrow |x||y|(|y| - |x|) + (|x| - |y|) = 0 \Rightarrow (|x| - |y|)(1 - |xy|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| = |y| \text{ ou } |xy| = 1.$$

Exercice n° 126

En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que :

- 1) $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$;
- 2) $x \neq y$ et $xy \neq 4 \Rightarrow \frac{x}{x^2+4} \neq \frac{y}{y^2+4}$;
- 3) $x \neq 14 \Rightarrow \frac{17}{x+3} \notin \mathbb{N}$ ($x \in \mathbb{N}$) ;
- 4) $x \neq \frac{2y-1}{5-y} \Rightarrow y \neq \frac{5x+1}{x+2}$, où $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ et $y \in \mathbb{R} - \{5\}$;
- 5) $x \neq 1 \Rightarrow x^2 - x - 2\sqrt{x} + 2 \neq 0$ ($x \geq 0$) ;
- 6) $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 2 < 0 \Rightarrow \sqrt{3 + \sqrt{3}} - 2 > x$ ($x \geq -2$) ;
- 7) $x \neq 2 \Rightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{x-2}} \neq 1 - \sqrt{x-2}$ ($x \geq 2$).

Correction

On démontre chaque fois la contraposée.

- 1) $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \Rightarrow -2x = -2y \Rightarrow x = y$.
- 2) $\frac{x}{x^2+4} = \frac{y}{y^2+4} \Rightarrow xy^2 + 4x = yx^2 + 4y \Rightarrow xy(y-x) + 4(x-y) = 0 \Rightarrow (y-x)(xy-4) = 0 \Rightarrow y = x$ ou $xy = 4$.
- 3) $\frac{17}{x+3} \in \mathbb{N} \Rightarrow x+3 = 1$ ou $x+3 = 17 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 14 \Rightarrow x = 14$ (car $x \in \mathbb{N}$).
- 4) $y = \frac{5x+1}{x+2} \Rightarrow yx + 2y = 5x + 1 \Rightarrow x(y-5) = 1 - 2y \Rightarrow x(5-y) = 2y - 1 \Rightarrow x = \frac{2y-1}{5-y}$.
- 5) $x^2 - x - 2\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (x - 2\sqrt{x} + 1) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$.
- 6) $\sqrt{3 + \sqrt{3}} - 2 \leq x \Rightarrow \sqrt{3 + \sqrt{3}} \leq x + 2 \Rightarrow 3 + \sqrt{3} \leq x^2 + 4x + 4 \Rightarrow \sqrt{3} \leq x^2 + 4x + 1$
 $\Rightarrow 3 \leq (x^2 + 4x + 1)^2 \Rightarrow x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 2 \geq 0$ (ici $x + 2 \geq 0$ et $x^2 + 4x + 1 \geq \sqrt{3} > 0$).
- 7) $\frac{1}{1 + \sqrt{x-2}} = 1 - \sqrt{x-2} \Rightarrow 1 = (1 - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x-2}) \Rightarrow 1 = 1 - (x-2) \Rightarrow x = 2$.

Exercice n° 127

Soient a et b deux réels. Montrer que : $((\forall \varepsilon > 0) |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow (a = b)$.

Correction

1^{re} méthode (contraposée). Montrons que $a \neq b \Rightarrow ((\exists \varepsilon > 0) |a - b| \geq \varepsilon)$: si $a \neq b$, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2} > 0$.

2^e méthode (absurde). Supposons $(\forall \varepsilon > 0) |a - b| < \varepsilon$ et $a \neq b$. Pour $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2} > 0$, il vient $|a - b| < \frac{|a - b|}{2}$, ce qui est absurde.

Exercice n° 128

Soit n un entier relatif. Montrer que si 8 ne divise pas $n^2 - 1$, alors n est pair.

Correction

Raisonnons par contraposée : supposons n impair, $n = 2k + 1$. Alors $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$; comme k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs, $k(k + 1)$ est pair, donc 8 divise $n^2 - 1$. D'où le résultat.

Exercice n° 129

Montrer que, pour tous x et y de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$(x \neq y) \Rightarrow \frac{3x+2}{x-2} \neq \frac{3y+2}{y-2}.$$

Correction

Par contraposée : soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tels que $\frac{3x+2}{x-2} = \frac{3y+2}{y-2}$. Alors $(3x+2)(y-2) = (3y+2)(x-2)$, ce qui donne $2y - 6x = 2x - 6y$, donc $8y = 8x$ et $y = x$. D'où le résultat.

Exercice n° 130

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; \left(x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1\right)$.

2) Soient a et b deux réels non nuls tels que $b \neq 2a$. Montrer que :

$$b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}.$$

Correction

On raisonne par contraposée.

1) Soit $x \neq -1$. $\frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow 3x = x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Par contraposée : $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1$.

2) $\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3a+6b = 4a-2b \Rightarrow a = 8b \Rightarrow b = \frac{1}{8}a$. Par contraposée : $b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}$.

Exercice n° 131

Soient x, y et z des réels. Montrer que :

$$(x + y \leq z) \Rightarrow \left(x \leq \frac{1}{2}z\right) \text{ ou } \left(y \leq \frac{1}{2}z\right).$$

Correction

Par contraposée, il suffit de montrer : $\left(x > \frac{1}{2}z \text{ et } y > \frac{1}{2}z\right) \Rightarrow x + y > z$.

Si $x > \frac{1}{2}z$ et $y > \frac{1}{2}z$, en ajoutant membre à membre : $x + y > \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z = z$. D'où le résultat.

Exercice n° 132

- 1) Montrer que $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; (x \neq y \Rightarrow x^3 + x \neq y^3 + y)$.
- 2) a) Montrer que $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2; (|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0)$.
b) En déduire que $\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3; (|a - b| = |a - c| + |b - c| \Leftrightarrow a \leq c \leq b \text{ ou } b \leq c \leq a)$.
- 3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $((\forall \varepsilon > 0); |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Correction

- 1) Par contraposée, montrons $x^3 + x = y^3 + y \Rightarrow x = y$: $x^3 + x = y^3 + y \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0 \Rightarrow (x - y) \left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 \right] = 0 \Rightarrow x = y$, car le crochet est > 0 .
- 2) a) Comme $|x|^2 = x^2$ et que les deux membres sont positifs : $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow (a + b)^2 = (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2|ab| + b^2 \Leftrightarrow |ab| = ab \Leftrightarrow ab \geq 0$.
b) Posons $x = a - c$ et $y = c - b$, de sorte que $x + y = a - b$. D'après a) : $|a - b| = |a - c| + |c - b| \Leftrightarrow (a - c)(c - b) \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq c \text{ et } c \geq b) \text{ ou } (a \leq c \text{ et } c \leq b) \Leftrightarrow b \leq c \leq a \text{ ou } a \leq c \leq b$.
- 3) Par l'absurde : supposons $(\forall \varepsilon > 0) |a| < \varepsilon$ et $a \neq 0$. Alors $\frac{|a|}{2} > 0$; en prenant $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$, on obtient $|a| < \frac{|a|}{2}$, soit $1 < \frac{1}{2}$: contradiction. Donc $a = 0$.

Série 2 Raisonnement par l'absurde**Exercice n° 133**

En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que :

- 1) il n'existe pas de triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont $3a, 4a$ et $6a$ ($a > 0$) ;
- 2) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (a + b) \notin \mathbb{Q}$.

Correction

- 1) Supposons qu'il existe un triangle ABC rectangle (en A par exemple) de côtés $3a, 4a$ et $6a$. Le plus grand côté est l'hypoténuse, donc d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, c'est-à-dire $(6a)^2 = (4a)^2 + (3a)^2$, soit $36a^2 = 25a^2$, d'où ($a > 0$) $36 = 25$, ce qui est impossible. Donc il n'existe pas de tel triangle.
- 2) Supposons que $a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}$ et $a + b \in \mathbb{Q}$. Alors $(a + b) - a \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire $b \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit $b \notin \mathbb{Q}$. Donc $(a + b) \notin \mathbb{Q}$.

Exercice n° 134

Montrer qu'il n'existe aucun triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont 5, 6 et 7.

Correction

Supposons qu'il existe un tel triangle. Son plus grand côté, de longueur 7, serait l'hypoténuse ; d'après le théorème de Pythagore, on devrait avoir $7^2 = 6^2 + 5^2$, c'est-à-dire $49 = 61$, ce qui est absurde. D'où le résultat.

Exercice n° 135

Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, et en déduire que $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}$.

Correction

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, d'où $a^2 = 2b^2$. Donc a^2 est pair et par suite a est pair : $a = 2a'$ avec $a' \in \mathbb{N}$. Alors $4a'^2 = 2b^2$, soit $b^2 = 2a'^2$: b^2 est pair, donc b est pair. Ainsi a et b sont tous deux pairs, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Déduction. Supposons que $\sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, donc $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d'où $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux. Donc $\sqrt{3} + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice n° 136

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n^2 \text{ pair}) \Rightarrow (n \text{ pair})$.
- 2) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Correction

- 1) Par contraposée, il suffit de montrer : si n est impair, alors n^2 est impair. Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$; alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ avec $k' \in \mathbb{N}$: n^2 est impair.
- 2) Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ irréductible. Alors $a^2 = 2b^2$, donc a^2 est pair, et d'après 1) a est pair : $a = 2k$. Ainsi $4k^2 = 2b^2$, soit $b^2 = 2k^2$: b^2 est pair, donc b est pair : $b = 2k'$. Alors $\frac{a}{b} = \frac{2k}{2k'}$ n'est pas irréductible : contradiction. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice n° 137

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que 3 divise n si, et seulement si, 3 divise n^2 .
- 2) Démontrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Correction

- 1) Il est clair que si 3 divise n , alors 3 divise n^2 . Réciproquement, supposons que 3 divise n^2 et, par l'absurde, que 3 ne divise pas n . Deux cas se présentent :
 - $n = 3k + 1$: $n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, donc 3 ne divise pas n^2 : absurde ;
 - $n = 3k + 2$: $n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$, donc 3 ne divise pas n^2 : absurde.
 Conclusion : 3 divise n si, et seulement si, 3 divise n^2 .
- 2) Supposons $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$: $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors $a^2 = 3b^2$: 3 divise a^2 , donc 3 divise a d'après 1). En écrivant $a = 3k$, on obtient $3k^2 = b^2$, donc 3 divise b . Ainsi 3 est un diviseur commun de a et b , ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux. Donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice n° 138

En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$;
- 2) $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a > b$: $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \notin \mathbb{N}$.

Correction

- 1) Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{\frac{n}{n+2}} \in \mathbb{Q}$: il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que $\sqrt{\frac{n}{n+2}} = \frac{a}{b}$ (avec $a < b$). Alors $\frac{n}{n+2} = \frac{a^2}{b^2}$. Comme $\frac{a}{b}$ est irréductible, $\frac{a^2}{b^2}$ l'est aussi ; il existe donc un entier $k \geq 1$ tel que $n = ka^2$ et $n+2 = kb^2$. D'où $k(b-a)(b+a) = 2$.

Or $b-a \geq 1$ et $b+a \geq b-a$, avec $a \geq 1$ (car $n \neq 0$), donc $b+a \geq 3$: impossible. Donc $\sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$.

- 2) Supposons que $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = k \in \mathbb{N}$, avec $a > b \geq 1$; nécessairement $k \geq 2$. Alors $a^2 + b^2 = k(a^2 - b^2)$, d'où $b^2(1+k) = a^2(k-1)$, soit

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{k-1}{k+1} = \frac{n}{n+2} \quad \text{en posant } n = k-1 \in \mathbb{N}^*.$$

Donc $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{n}{n+2}} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux d'après 1). Donc $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \notin \mathbb{N}$.

Note : pour $b = 0$, le quotient vaut $1 \in \mathbb{N}$: la propriété 2) suppose donc $b \neq 0$. Le raisonnement de la question 1 a été complété (cas où la fraction $\frac{n}{n+2}$ n'est pas irréductible).

Exercice n° 139

En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$;
- 2) $\forall a \in]0; +\infty[\quad \sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} \neq \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$;
- 3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \neq \frac{1}{abc}$ avec $a > 0, b > 0, c > 0$ et $a^2 + b^2 + c^2 < 2$;
- 4) $b > \frac{c}{2}$ ou $a > \frac{c}{2}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a + b > c$.

Correction

- 1) Supposons $\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Comme n et $n+1$ sont premiers entre eux, $\frac{n}{n+1}$ est irréductible et $\frac{a^2}{b^2}$ aussi, donc $n = a^2$ et $n+1 = b^2$. Alors $(b-a)(b+a) = 1$, d'où $b-a = b+a = 1$, soit $a = 0$ et $n = 0$: contradiction avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Supposons $\sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$. Alors $\sqrt{a+2} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a+1}$, d'où $2a+2 + 2\sqrt{a(a+2)} = 4(a+1)$, $\sqrt{a(a+2)} = a+1$, puis $a^2 + 2a = a^2 + 2a + 1$, soit $0 = 1$: contradiction.
- 3) Supposons $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$; alors $bc + ac - ab = 1$. On a $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ac + bc - ab) = a^2 + b^2 + c^2 - 2$.
Or $(a+b-c)^2 \geq 0$, d'où $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2$: contradiction avec $a^2 + b^2 + c^2 < 2$.
- 4) Supposons $b \leq \frac{c}{2}$ et $a \leq \frac{c}{2}$; alors $a+b \leq c$: contradiction avec $a+b > c$.

Exercice n° 140

Montrer par l'absurde que $(\forall a \in [0; +\infty[), \sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} \neq \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$.

Correction

Supposons qu'il existe $a \geq 0$ tel que $\sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$. Alors $\sqrt{a+2} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a+1}$, d'où, en élevant au carré : $a+2 + 2\sqrt{a(a+2)} + a = 4(a+1)$, soit $2\sqrt{a^2+2a} = 2a+2$, puis $\sqrt{a^2+2a} = a+1$ et $a^2+2a = a^2+2a+1$, c'est-à-dire $0 = 1$: absurde.

Conclusion : $(\forall a \in [0; +\infty[), \sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} \neq \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$.

Exercice n° 141

Soient a, b et c trois réels. On considère les équations :

$$(E_1) : x^2 - 2ax + bc = 0 \quad (E_2) : x^2 - 2bx + ac = 0 \quad (E_3) : x^2 - 2cx + ab = 0$$

Montrer par l'absurde qu'au moins l'une de ces équations admet une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction

Supposons qu'aucune de ces équations n'admette de solution dans $\mathbb{R}$. Alors leurs discriminants sont strictement négatifs :

$$\Delta_1 = 4a^2 - 4bc < 0 \quad (1), \quad \Delta_2 = 4b^2 - 4ac < 0 \quad (2), \quad \Delta_3 = 4c^2 - 4ab < 0 \quad (3).$$

Ainsi $a^2 < bc$, $b^2 < ac$ et $c^2 < ab$. Les inégalités (1) et (2) donnent $0 \leq a^2 < bc$ et $0 \leq b^2 < ac$; en les multipliant membre à membre : $a^2b^2 < abc^2$. Comme $ab > 0$ (car $ab > c^2 \geq 0$ d'après (3)), on obtient $ab < c^2$, ce qui contredit (3).

Donc notre supposition est fautive : au moins l'une des équations (E_1) , (E_2) , (E_3) admet une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice n° 142

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2x - y^2}{x^2 + 2} \neq 1$.

Correction

Par l'absurde : supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{2x - y^2}{x^2 + 2} = 1$. Alors $2x - y^2 = x^2 + 2$, d'où $(x^2 - 2x + 1) + y^2 + 1 = 0$, soit $(x - 1)^2 + y^2 = -1$, ce qui est absurde car $(x - 1)^2 + y^2 \geq 0$.

Conclusion : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{2x - y^2}{x^2 + 2} \neq 1$.

Exercice n° 143

Montrer par l'absurde que l'équation $(E) : x^3 + x - 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Correction

Supposons que (E) admette une solution $k \in \mathbb{Z} : k^3 + k - 1 = 0$, d'où $k(k^2 + 1) = 1$. Comme $k^2 + 1 > 0$, on a $k > 0$, donc $k \in \mathbb{N}$; or le produit de deux entiers naturels vaut 1 si, et seulement si, les deux valent 1 : $k = 1$ et $k^2 + 1 = 1$, d'où $k = 0$. Ainsi $k = 1$ et $k = 0$, ce qui est absurde.

Conclusion : l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Exercice n° 144

Montrer que le système

$$(S) : \begin{cases} 2x - 3z > 3 \\ 3y - 2x > 3 \\ y - z < 2 \end{cases}$$

n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.

Correction

Supposons que le système admette une solution $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - 3c > 3$ (1), $3b - 2a > 3$ (2) et $b - c < 2$ (3).

En additionnant membre à membre (1) et (2) : $3b - 3c > 6$, d'où $b - c > 2$, ce qui contredit (3).

Conclusion : le système (S) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice n° 145

En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que le système

$$\begin{cases} 2x - 3z > 3 \\ 3y - 2x \geq 3 \\ y - z \leq 2 \end{cases}$$

n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.

Correction

Supposons qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant le système. En ajoutant membre à membre $2x - 3z > 3$ et $3y - 2x \geq 3$ (si $a > b$ et $c \geq d$, alors $a + c > b + d$), on obtient $3y - 3z > 6$, soit $y - z > 2$, ce qui contredit $y - z \leq 2$. Le système n'a donc pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice n° 146

On considère la proposition

$$P : (\forall x \in [0; +\infty[) (\forall y \in [0; +\infty[), \quad (xy \leq 1) \Rightarrow (x \leq 1 \text{ ou } y \leq 1).$$

- 1) Donner la négation de P .
- 2) Montrer par l'absurde que P est vraie.

Correction

- 1) La négation de $(A \Rightarrow B)$ est $(A \text{ et } \bar{B})$. Donc $\bar{P} : (\exists x \in [0; +\infty[) (\exists y \in [0; +\infty[), (xy \leq 1) \text{ et } (x > 1 \text{ et } y > 1)$.
- 2) Supposons que $\bar{P}$ soit vraie : il existe deux réels positifs x et y tels que $xy \leq 1$, $x > 1$ et $y > 1$. Mais $x > 1$ et $y > 1$ entraînent $xy > 1$, ce qui contredit $xy \leq 1$. Donc P est vraie.

Exercice n° 147

Montrer par l'absurde que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0), \quad |x| < \varepsilon \Rightarrow x = 0$.

Note : énoncé reproduit tel qu'il figure dans le document source ; il se lit : si $|x| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x = 0$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Supposons que $x \neq 0$ et posons $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$: on a $\varepsilon > 0$, donc $|x| < \frac{|x|}{2}$, d'où $1 < \frac{1}{2}$ (car $|x| > 0$), ce qui est absurde. Donc $x = 0$.

Exercice n° 148

Montrer par l'absurde que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$;
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{4n+2014} \notin \mathbb{N}$;
- 3) $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \frac{8n+2013}{10} \notin \mathbb{Z}$;
- 4) $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \frac{4n+3}{6} \notin \left\{ \frac{3m+2}{7} / m \in \mathbb{Z} \right\}$.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE]

Question 2 : la correction du document source traite $\sqrt{4n+2}$.

Correction

- 1) Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{4n_0+3}{6} \in \mathbb{N}$: il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $4n_0+3 = 6m$. C'est absurde car $4n_0+3$ est impair et $6m$ est pair.
- 2) Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $\sqrt{4n_0+2014} = m$. Alors $4n_0+2014 = m^2$; comme $4n_0+2014$ est pair, m^2 est pair, donc m est pair (sinon m^2 serait impair) : $m = 2k$. Il vient $4n_0+2014 = 4k^2$, soit $2n_0+1007 = 2k^2$: absurde, car $2n_0+1007$ est impair et $2k^2$ est pair.
- 3) Supposons qu'il existe $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{8n_0+2013}{10} = m_0$. Alors $8n_0+2013 = 10m_0$: absurde, car $10m_0$ est pair et $8n_0+2013$ est impair.
- 4) Supposons qu'il existe $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{4n_0+3}{6} = \frac{3m_0+2}{7}$. On en déduit $28n_0+21 = 18m_0+12$: absurde, car $28n_0+21$ est impair et $18m_0+12$ est pair.

Note : question 2 : le corrigé du document source traite $\sqrt{4n+2}$; le même raisonnement est appliqué ici à $\sqrt{4n+2014}$.

Exercice n° 149

Soit x un réel tel que $\cos^3(x) - \sin^3(x) = 1$.

- 1) En raisonnant par l'absurde, montrer que $0 \leq \cos(x)$ et $\sin(x) \leq 0$.
- 2) Montrer que $\cos^3 x - \sin^3 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x$.
- 3) En raisonnant par l'absurde, montrer que

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

Correction

- 1) Si $\cos x < 0$, alors de $\cos^3 x - \sin^3 x = 1$ on déduit $\sin^3 x = -1 + \cos^3 x < -1$, ce qui est absurde car $-1 \leq \sin x \leq 1$. Donc $0 \leq \cos x$. De même, si $\sin x > 0$, on aboutit à $\cos^3 x = \sin^3 x + 1 > 1$: contradiction. Donc $\sin x \leq 0$.
- 2) Pour tout $t \in [-1; 1]$, $-1 \leq t^3 \leq t^2 \leq 1$. Comme $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin(-x) \leq 1$: $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos^3 x + \sin^3(-x) \leq \cos^2 x + \sin^2(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$.
- 3) Supposons ($\cos x \neq 0$ ou $\sin x \neq -1$) et ($\cos x \neq 1$ ou $\sin x \neq 0$). D'après 1), on obtient alors $0 < \cos x < 1$ ou $-1 < \sin x < 0$; dans ces deux cas, l'inégalité de 2) est stricte : $\cos^3 x - \sin^3 x < \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ce qui est absurde. D'où le résultat.

Remarque : Autre méthode : $\cos^3 x - \sin^3 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x(1 - \cos x) + \sin^2 x(1 + \sin x) = 0$; les deux termes étant positifs, ils sont nuls, d'où $\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$.

Exercice n° 150

Soient n un entier naturel impair et $x_1, x_2, \dots, x_n$ les éléments de l'intervalle d'entiers $\llbracket 1; n \rrbracket$, rangés dans un ordre quelconque. Montrer qu'il existe au moins un entier k de $\llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x_k - k$ soit pair.

Correction

Raisonnons par l'absurde : supposons que, pour tout entier k de $\llbracket 1; n \rrbracket$, le nombre $x_k - k$ est impair. On utilise les résultats suivants : la somme de n nombres impairs est impaire si, et seulement si, n est impair.

Comme n est impair, le nombre $\sum_{k=1}^n (x_k - k)$ est impair. Mais les x_k sont les éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans un certain ordre, donc $\sum_{k=1}^n (x_k - k) = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n k = 0$, qui est pair : contradiction. D'où le résultat.

Exercice n° 151

Montrer que l'équation $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solution rationnelle.

Rappel : Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, ils n'ont aucun diviseur premier commun.

Correction

Raisonnons par l'absurde : supposons que l'équation admette une solution rationnelle $r = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et a, b premiers entre eux. Alors $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = 0$, d'où $b(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = -a^4$: b divise a^4 .

Par conséquent $b = 1$; sinon b admettrait un diviseur premier qui diviserait aussi a (la divisibilité est transitive), ce qui contredit le fait que a et b sont premiers entre eux.

Alors $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$, ce qui montre que a divise 1, donc $a \in \{-1; 1\}$. Mais ni 1 ni -1 ne sont solutions de l'équation ($1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ et $1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$).

Conclusion : l'équation $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ n'admet aucune racine rationnelle.

Exercice n° 152

Montrer qu'il n'existe aucune fonction f définie sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall m \in \mathbb{N}^*) \quad f(n)^{f(m)} = m^n.$$

Correction

Supposons qu'il existe une fonction f de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même vérifiant $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall m \in \mathbb{N}^*) f(n)^{f(m)} = m^n$. En particulier, pour $n = m = 1$: $f(1)^{f(1)} = 1^1 = 1$, donc nécessairement $f(1) = 1$. Par conséquent, pour $n = 1$: $(\forall m \in \mathbb{N}^*) 1^{f(m)} = m^1$, c'est-à-dire $(\forall m \in \mathbb{N}^*) m = 1$: $\mathbb{N}^*$ se réduirait à $\{1\}$, ce qui est absurde.

Conclusion : il n'existe aucune telle fonction.

Exercice n° 153

Montrer qu'il n'existe pas de fonction f définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{N}^2) \quad (f(x))^{f(y)} = y^x.$$

Correction

Par l'absurde : supposons qu'une telle fonction existe. Pour $y = 1$: $(\forall x \in \mathbb{N}) (f(x))^{f(1)} = 1^1$ (1). Pour $x = 1$: $(\forall y \in \mathbb{N}) (f(1))^{f(y)} = y^1$ (2).

- Si $f(1) = 0$: (2) avec $y = 2$ donne $0^{f(2)} = 2$, impossible.
- Si $f(1) \neq 0$: (1) donne $(\forall x \in \mathbb{N}) f(x) = 1$; alors (2) avec $y = 2$ donne $1^{f(2)} = 2$, c'est-à-dire $1 = 2$, impossible.

Il n'existe donc pas de telle fonction.

Exercice n° 154

Montrer qu'il n'existe pas de fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions :

a- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}$;

b- $(\forall (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2) \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Correction

Par l'absurde : supposons qu'il existe une fonction f vérifiant les deux conditions.

Pour $x = 0$: $f(0) - f(0)^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4f(0)^2 - 4f(0) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2f(0) - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2}$.

Pour $x = 1$: $f(1) - f(1)^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow (2f(1) - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi $f(0) = f(1)$, et d'après la condition b) : $0 = 1$, contradiction. Il n'existe donc pas de telle fonction.

Exercice n° 155

Soit a un réel tel que $1 < a < 2$. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + ax + 1 \neq 0$.

Correction

Par l'absurde : supposons que l'équation $x^2 + ax + 1 = 0$ admette une solution réelle. Son discriminant $\Delta = a^2 - 4$ est alors positif, donc $a \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$, ce qui contredit $1 < a < 2$. Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + ax + 1 \neq 0$.

Exercice n° 156

Soient a, b et c trois réels strictement positifs vérifiant

$$abc > 1 \quad \text{et} \quad a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Montrer que :

- 1) aucun de ces nombres n'est égal à 1 ;
- 2) l'un de ces nombres est strictement inférieur à 1.

Correction

1) Supposons, par exemple, $a = 1$. Alors $bc > 1$ et $1 + b + c < 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, soit $b + c < \frac{b+c}{bc}$, d'où $bc < 1$ (car $b + c > 0$) : contradiction. De même pour b et c . Donc aucun de ces nombres n'est égal à 1.

2) Supposons $a \geq 1, b \geq 1$ et $c \geq 1$; d'après 1), $a > 1, b > 1, c > 1$. Alors $a + b + c > 3$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 3$, donc $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$: contradiction. Donc l'un des nombres est strictement inférieur à 1.

Note : pour la question 2, le raisonnement du document source est incomplet ; il a été remplacé par celui ci-dessus.

Exercice n° 157

Soit n un entier naturel.

1) Déterminer les restes de la division euclidienne de n^2 par 5.

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$.

Correction

1) Selon le reste de la division de n par 5 : $n = 5k \Rightarrow n^2 = 5(5k^2)$; $n = 5k + 1 \Rightarrow n^2 = 5(5k^2 + 2k) + 1$;
 $n = 5k + 2 \Rightarrow n^2 = 5(5k^2 + 4k) + 4$;
 $n = 5k + 3 \Rightarrow n^2 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4$; $n = 5k + 4 \Rightarrow n^2 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$.
 Les restes possibles de la division de n^2 par 5 sont donc 0, 1 et 4.

2) Par l'absurde : supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\sqrt{5n_0+7} = N_0$. Alors $N_0^2 = 5n_0 + 7 = 5(n_0 + 1) + 2$: le reste de la division de N_0^2 par 5 serait 2, ce qui est impossible d'après 1). Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$.

Exercice n° 158

Montrer que l'équation (*) : $3 \cos x = 7x^2 + 2x + 5$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Correction

Par l'absurde : supposons que (*) admette une solution x_0 . Alors $3 \cos x_0 = 7x_0^2 + 2x_0 + 5 = (x_0 + 1)^2 + 6x_0^2 + 4 \geq 4$, donc $\cos x_0 \geq \frac{4}{3} > 1$: contradiction avec $\cos x \leq 1$. Donc (*) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice n° 159

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont des entiers relatifs, vérifiant $P(1) = 1$ et $P(2007) = 2$.

Correction

Par l'absurde : supposons qu'un tel polynôme existe. Alors

$$P(2007) - P(1) = a(2007^3 - 1) + b(2007^2 - 1) + c(2007 - 1) = 2006 \left[a(2007^2 + 2008) + 2008b + c \right].$$

Or $P(2007) - P(1) = 2 - 1 = 1$; donc 2006 divise 1 : impossible. Il n'existe donc pas de tel polynôme.

Exercice n° 160

Montrer que :

$$\left(\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[\right) \quad \tan^4 x + (x^2 + 2|x| - 1) \tan^2 x + 1 \neq 0.$$

Correction

Par l'absurde : supposons qu'il existe $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\tan^4 \alpha + (\alpha^2 + 2|\alpha| - 1) \tan^2 \alpha + 1 = 0$. On a $\alpha \neq 0$ (sinon $1 = 0$), donc $\tan \alpha \neq 0$ et

$$\tan^2 \alpha + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = -(\alpha^2 + 2|\alpha| - 1) = -(|\alpha| + 1)^2 + 2 < 2.$$

Or $\tan^2 \alpha + \frac{1}{\tan^2 \alpha} \geq 2$: contradiction. D'où le résultat.

5

CHAPITRE

Raisonnement par disjonction des cas

Notions travaillées

- Loi : $[(p \Rightarrow r) \text{ et } (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \text{ ou } q) \Rightarrow r]$
- Partition d'un ensemble en cas (signe, parité, restes d'une division)
- Équations, inéquations et systèmes comportant des valeurs absolues

Dans ce chapitre

- Série 1 – Démontrer par disjonction des cas . . . 75
- Série 2 – Valeurs absolues : équations, inéquations, systèmes 79

Série 1 Démontrer par disjonction des cas

Exercice n° 161

En utilisant le raisonnement par disjonction des cas :

- 1) montrer que 6 divise $n^3 - n$ pour tout entier naturel n ;
- 2) montrer que 3 ne divise pas $n^2 + 1$ pour tout entier naturel n .

Correction

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}) n^3 - n = n(n-1)(n+1)$. D'après la division euclidienne par 6, tout entier naturel n s'écrit $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4$ ou $6k+5$.

- Si $n = 6k, n = 6k+1$ ou $n = 6k+5$: l'un des facteurs $n, n-1, n+1$ est multiple de 6.
- Si $n = 6k+2$: $n^3 - n = (6k+1)(6k+2)(6k+3) = 6(3k+1)(6k+1)(2k+1)$.
- De la même façon pour $n = 6k+3$ et $n = 6k+4$ (un facteur est pair, un autre multiple de 3).

Conclusion : 6 divise $n^3 - n$ pour tout entier naturel n .

- 2) D'après la division euclidienne par 3, $n = 3k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$. Alors $n^2 + 1 = 3(3k^2 + 2kr) + r^2 + 1$, donc 3 divise $n^2 + 1$ si, et seulement si, 3 divise $r^2 + 1$. Or $r^2 + 1$ vaut 1, 2 ou 5 selon que $r = 0, 1$ ou 2 : aucun n'est multiple de 3. Donc 3 ne divise pas $n^2 + 1$.

Note : dans le cas $n = 6k + 2$, le corrigé du document source comporte une coquille ; l'égalité a été rectifiée.

Exercice n° 162

Montrer que le produit de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 6.

Correction

Soit n un entier ; montrons que 6 divise $n(n+1)(n+2)$.

Méthode 1 : on applique l'exercice précédent, car $n(n+1)(n+2) = (n+1)^3 - (n+1)$.

Méthode 2 (disjonction des cas, $n = 6k + r, r \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$) :

- si $n = 6k, 6k+4$ ou $6k+5$: 6 divise respectivement $n, n+2$ ou $n+1$;
- si $n = 6k+1$: 2 divise $n+1$ et 3 divise $n+2$;
- si $n = 6k+2$: 2 divise n et 3 divise $n+1$;
- si $n = 6k+3$: 2 divise $n+1$ et 3 divise n .

Dans tous les cas, 6 divise $n(n+1)(n+2)$.

Exercice n° 163

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Correction

Méthode 1 (disjonction des cas).

- Si $x \geq 0$: $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ et $x \geq 0$, donc $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
- Si $x < 0$: $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ et $\sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} > 0$.

Méthode 2. Pour $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + 1 > x^2$, donc $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, d'où $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$.

Exercice n° 164

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x - 1) > 0$.

Correction

Méthode 1 (disjonction des cas).

- Si $x < 1$: $-(x - 1) > 0$ et $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x - 1)^2 + 1} > 0$; en additionnant : $\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x - 1) > 0$.
- Si $x \geq 1$: $\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x - 1) = \frac{x^2 - 2x + 2 - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x - 1} > 0$.

Méthode 2. $(x - 1)^2 + 1 > (x - 1)^2$, donc $\sqrt{(x - 1)^2 + 1} > |x - 1| \geq x - 1$, d'où $\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x - 1) > 0$.

Exercice n° 165

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}(x + 2) > 0$.

Correction

On raisonne par disjonction des cas.

- Si $x \geq -2$: $\frac{1}{2}(x + 2) \geq 0$ et $\sqrt{x^2 + 1} > 0$, donc la somme est strictement positive.
- Si $x < -2$: on utilise l'expression conjuguée : $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}(x + 2) = \frac{(x^2 + 1) - \frac{1}{4}(x + 2)^2}{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2}(x + 2)} = \frac{\frac{x}{4}(3x - 4)}{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2}(x + 2)}$.

Pour $x < -2$: $x < 0$ et $3x - 4 < 0$, donc $\frac{x}{4}(3x - 4) > 0$; de plus $\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2}(x + 2) > 0$. Donc l'expression est strictement positive.

Exercice n° 166

- 1) Étudier le signe de l'expression $u(x) = 2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x}$, où $x \in]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$.
 2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2 + 2x + 2} > x + 1$.

Correction

Méthode. Pour $B \geq 0$: si $A \geq 0$, $A + \sqrt{B} \geq 0$; si $A < 0$, $\sqrt{B} + A = \frac{B - A^2}{\sqrt{B} - A}$ a le signe de $B - A^2$ (de même, si $A > 0$, $\sqrt{B} - A = \frac{B - A^2}{\sqrt{B} + A}$).

- 1) Si $x \in [0; +\infty[$: $2x + 1 > 0$, donc $u(x) > 0$.

$$\text{Si } x \in]-\infty; -1] : 2x + 1 \leq -1 < 0 \text{ et, avec l'expression conjuguée, } u(x) = \frac{4(x^2 + x) - (2x + 1)^2}{2\sqrt{x^2 + x} - (2x + 1)} = \frac{-1}{2\sqrt{x^2 + x} - (2x + 1)} < 0, \text{ car le dénominateur est } > 0.$$

Bilan : $u(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$ et $u(x) < 0$ sur $]-\infty; -1]$.

- 2) On utilise la même méthode avec $B = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ et $A = x + 1$. Si $x + 1 \leq 0$: $\sqrt{x^2 + 2x + 2} > 0 \geq x + 1$. Si $x + 1 > 0$: $\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (x + 1) = \frac{x^2 + 2x + 2 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1} > 0$. Dans les deux cas, $\sqrt{x^2 + 2x + 2} > x + 1$.

Exercice n° 167

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si $3n + 1$ est un carré parfait, alors $n + 1$ est la somme de trois carrés parfaits.

Correction

Supposons $3n + 1 = a^2$ avec $a \in \mathbb{N}^*$. Par division euclidienne, $a = 3q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0; 1; 2\}$. Comme $3n = a^2 - 1$, 3 divise $a^2 - 1$; or si $r = 0$, $a^2 - 1 = 9q^2 - 1$ n'est pas divisible par 3. Donc $r = 1$ ou $r = 2$.

- $r = 1$: $a^2 = 9q^2 + 6q + 1$, donc $3n + 3 = 9q^2 + 6q + 3$, soit $n + 1 = 3q^2 + 2q + 1 = q^2 + q^2 + (q + 1)^2$.
- $r = 2$: $a^2 = 9q^2 + 12q + 4$, donc $3n + 3 = 9q^2 + 12q + 6$, soit $n + 1 = 3q^2 + 4q + 2 = q^2 + (q + 1)^2 + (q + 1)^2$.

Dans les deux cas, $n + 1$ est la somme de trois carrés parfaits.

Exercice n° 168

1) Montrer que l'équation $|x - 1| + |x + 1| - |x| = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $-2 < \frac{1}{x} < 1$.

Note : dans le document source, la question 2 est numérotée 3).

Correction

1) Quatre cas se présentent :

- $x \leq -1$: l'équation équivaut à $-x + 1 - x - 1 + x = 0$, soit $x = 0$: absurde ;
- $-1 \leq x \leq 0$: elle équivaut à $-x + 1 + x + 1 + x = 0$, soit $x = -2$: absurde ;
- $0 \leq x \leq 1$: elle équivaut à $-x + 1 + x + 1 - x = 0$, soit $x = 2$: absurde ;
- $x \geq 1$: elle équivaut à $x - 1 + x + 1 - x = 0$, soit $x = 0$: absurde.

L'équation n'a donc pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2) (I) est définie sur $\mathbb{R}^*$. Dans $\mathbb{R}^*$: $(I) \Leftrightarrow -2 < \frac{1}{x} < 0$ ou $0 < \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 1$.

Donc $S =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$.

Exercice n° 169

Soient x, y et z trois réels tels que l'un d'eux est strictement positif, un autre est nul et le dernier est strictement négatif, et qui vérifient les implications suivantes :

$$x = 0 \Rightarrow y > 0 \qquad x > 0 \Rightarrow y < 0 \qquad y \neq 0 \Rightarrow z > 0$$

Déterminer, parmi ces nombres, celui qui est nul, celui qui est strictement positif et celui qui est strictement négatif.

Correction

On sait que l'un des nombres x, y, z est nul.

- Supposons $x = 0$: d'après la première implication $y > 0$, donc $y \neq 0$, et d'après la troisième $z > 0$. Ainsi $y > 0$ et $z > 0$, ce qui contredit les données. Donc $x \neq 0$.
- Si $x > 0$: d'après la deuxième implication $y < 0$, donc $y \neq 0$ et, d'après la troisième, $z > 0$: contradiction (aucun nombre nul). Donc $x < 0$.
- Alors l'un des nombres y, z est nul et l'autre strictement positif. Si $y > 0$, alors $y \neq 0$ et $z > 0$: contradiction. Donc $y = 0$ et $z > 0$.

Conclusion : $x < 0, y = 0$ et $z > 0$.

Série 2 Valeurs absolues : équations, inéquations, systèmes**Exercice n° 170**

En utilisant la disjonction des cas, résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(E_1) : x^2 - 5|x - 3| - 21 = 0 \quad (E_2) : |x^2 - x - 6| - 2x + 4 = 0$$

Correction

$$(E_1) : x^2 - 5|x - 3| - 21 = 0.$$

- 1^{er} cas : $x \geq 3$. $|x - 3| = x - 3$ et $(E_1) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$; $\Delta = 49$, $x_1 = 6$ (convient), $x_2 = -1$ (ne convient pas). $S_1 = \{6\}$.
- 2^e cas : $x \leq 3$. $|x - 3| = -x + 3$ et $(E_1) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$; $\Delta = 169$, $x_1 = 4$ (ne convient pas), $x_2 = -9$ (convient). $S_2 = \{-9\}$.

$$\text{Donc } S = S_1 \cup S_2 = \{6; -9\}.$$

$(E_2) : |x^2 - x - 6| - 2x + 4 = 0$. Le trinôme $x^2 - x - 6$ a pour racines -2 et 3 ; il est positif sur $]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$ et négatif sur $[-2; 3]$.

- 1^{er} cas : $x \in]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$. $(E_2) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$; $\Delta = 17$, $x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$ (convient), $x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ (ne convient pas). $S_1 = \left\{ \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right\}$.
- 2^e cas : $x \in [-2; 3]$. $(E_2) \Leftrightarrow -x^2 + x + 6 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 10 = 0$; $\Delta = 41$, $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2}$ (convient), $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{2}$ (ne convient pas). $S_2 = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{41}}{2} \right\}$.

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{41} - 1}{2} \right\}.$$

Exercice n° 171

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2|x - 3| - 3|x - 2| = 4x - 5$.

Correction

On écrit l'équation sans valeur absolue :

x	$]-\infty; 2[$	$[2; 3[$	$[3; +\infty[$
$2 x - 3 - 3 x - 2 $	x	$-5x + 12$	$-x$

- $x < 2$: $x = 4x - 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$, et $\frac{5}{3} < 2$: $S_1 = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$.
- $2 \leq x < 3$: $-5x + 12 = 4x - 5 \Leftrightarrow x = \frac{17}{9} \notin [2; 3[$: $S_2 = \emptyset$.
- $x \geq 3$: $-x = 4x - 5 \Leftrightarrow x = 1 \notin [3; +\infty[$: $S_3 = \emptyset$.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ \frac{5}{3} \right\}.$$

Exercice n° 172

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x^2 - 2x| \geq 2x - 3$.

Correction

- 1^{er} cas : $2x - 3 < 0$, c'est-à-dire $x < \frac{3}{2}$. Comme $|x^2 - 2x| \geq 0 > 2x - 3$, l'inéquation est vérifiée : $S_1 =]-\infty; \frac{3}{2}[$.
- 2^e cas : $x \geq \frac{3}{2}$. Comme $|A| \geq r \Leftrightarrow (A \leq -r \text{ ou } A \geq r)$ pour $r \geq 0$: $|x^2 - 2x| \geq 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq -2x + 3$ ou $x^2 - 2x \geq 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 \leq 3$ ou $(x - 1)(x - 3) \geq 0$
 $\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ ou $(x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3)$. Avec $x \geq \frac{3}{2}$: $S_2 = [\frac{3}{2}; \sqrt{3}] \cup [3; +\infty[$.

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty; \sqrt{3}] \cup [3; +\infty[.$$

Exercice n° 173

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $3 - 2|x - 4| = 2x + 5$.

Correction

- Si $x \leq 4$: (E) devient $3 - 2(-x + 4) = 2x + 5$, soit $-5 = 5$: impossible.
- Si $x \geq 4$: (E) devient $3 - 2(x - 4) = 2x + 5$, soit $x = \frac{3}{2}$; or $\frac{3}{2} \notin [4; +\infty[$.

Donc $S = \emptyset$.

Exercice n° 174

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (*) : $|x - 2| + |x - 3| = x + 2$.

Correction

Posons $A(x) = |x - 2| + |x - 3| - x - 2$:

x	$] -\infty; 2]$	$[2; 3]$	$[3; +\infty[$
$A(x)$	$-3x + 3$	$-x - 1$	$x - 7$

- $x \leq 2$: $-3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in]-\infty; 2]$: $S_1 = \{1\}$.
- $2 \leq x \leq 3$: $-x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [2; 3]$: $S_2 = \emptyset$.
- $x \geq 3$: $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7 \in [3; +\infty[$: $S_3 = \{7\}$.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{1; 7\}.$$

Exercice n° 175

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x + 1 - |4x - 3| < 3x - 4$.

Correction

- Si $4x - 3 \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq \frac{3}{4}$: l'inéquation devient $2x + 1 + 4x - 3 < 3x - 4$, soit $x < -\frac{2}{3}$. D'où $x \in]-\infty; -\frac{2}{3}[$.
- Si $x \geq \frac{3}{4}$: elle devient $2x + 1 - 4x + 3 < 3x - 4$, soit $x > \frac{8}{5}$. D'où $x \in]\frac{8}{5}; +\infty[$.

$$S =]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]\frac{8}{5}; +\infty[.$$

Exercice n° 176

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$$(1) |2x - 1| < \frac{x}{2}$$

$$(2) |x + 1| \leq |x - 1|$$

$$(3) |3x - 1| - |2x + 1| > -x$$

Correction

$$(1) |2x - 1| < \frac{x}{2} :$$

- si $x \leq 0$: pas de solution ;
- si $0 < x \leq \frac{1}{2}$: $1 - 2x < \frac{x}{2} \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$, d'où $x \in]\frac{2}{5}; \frac{1}{2}]$;
- si $x \geq \frac{1}{2}$: $2x - 1 < \frac{x}{2} \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$, d'où $x \in [\frac{1}{2}; \frac{2}{3}[$.

$$S_1 =]\frac{2}{5}; \frac{2}{3}[.$$

$$(2) |x + 1| \leq |x - 1| \Leftrightarrow (x + 1)^2 \leq (x - 1)^2 \Leftrightarrow 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 : S_2 =]-\infty; 0].$$

$$(3) |3x - 1| - |2x + 1| > -x :$$

- si $x \leq -\frac{1}{2}$: $-3x + 1 + 2x + 1 > -x \Leftrightarrow 2 > 0$, vrai : $S'_3 =]-\infty; -\frac{1}{2}]$;
- si $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$: $1 - 3x - 2x - 1 > -x \Leftrightarrow x < 0$: $S''_3 = [-\frac{1}{2}; 0[$;
- si $x \geq \frac{1}{3}$: $3x - 1 - 2x - 1 > -x \Leftrightarrow x > 1$: $S'''_3 =]1; +\infty[$.

$$S_3 =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[.$$

Exercice n° 177

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x^2 - |x + 2| - 13 = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S) :
$$\begin{cases} 2|x - 1| + y = 3 \\ |x - 2| + 2y = 4 \end{cases}$$

Correction

1) (E) : $2x^2 - |x + 2| - 13 = 0$.

• 1^{er} cas : $x \geq -2$. (E) $\Leftrightarrow 2x^2 - x - 15 = 0$; $\Delta = 121$, $x_1 = 3$ (convient), $x_2 = -\frac{5}{2}$ (ne convient pas). $S_1 = \{3\}$.

• 2^e cas : $x \leq -2$. (E) $\Leftrightarrow 2x^2 + x - 11 = 0$; $\Delta = 89$, $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{89}}{4}$ (ne convient pas), $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{89}}{4}$ (convient). $S_2 = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{89}}{4} \right\}$.

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ 3; \frac{-1 - \sqrt{89}}{4} \right\}.$$

2) Système (S). On a $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; d'où trois cas.

• $x \leq 1$: (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 1 \\ -x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 1$ ($0 \leq 1$ convient). $S_1 = \{(0; 1)\}$.

• $1 \leq x \leq 2$: (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{8}{5} \text{ et } y = \frac{9}{5}$ ($1 \leq \frac{8}{5} \leq 2$ convient). $S_2 = \left\{ \left(\frac{8}{5}; \frac{9}{5} \right) \right\}$.

• $x \geq 2$: (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ et } y = \frac{7}{3}$, mais $\frac{4}{3} < 2$: $S_3 = \emptyset$.

$$S = \{(0; 1); \left(\frac{8}{5}; \frac{9}{5} \right)\}.$$

Note : le corrigé du document source donne $x_2 = \frac{1 - \sqrt{89}}{4}$, coquille corrigée.

Exercice n° 178

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - |x - 3| - 4 = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système
$$\begin{cases} 2|x + 1| - y = 4 \\ |x + 2| + 2y = 6 \end{cases}$$

Correction

1) Cas $x \geq 3$: $|x - 3| = x - 3$ et l'équation devient $2x^2 - x - 1 = 0$; $\Delta = 9$, racines 1 et $-\frac{1}{2}$, toutes deux < 3 : pas de solution dans ce cas.

Cas $x \leq 3$: $|x - 3| = -x + 3$ et l'équation devient $2x^2 + x - 7 = 0$; $\Delta = 57$, racines $\frac{-1 \pm \sqrt{57}}{4}$, toutes deux < 3 .

Donc $S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{57}}{4} ; \frac{-1 + \sqrt{57}}{4} \right\}$.

2) On distingue trois cas.

- $x \geq -1$: le système devient
$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases} ; \Delta = 5, \Delta_x = 8, \Delta_y = 6, \text{ d'où } (x, y) = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right), \text{ qui convient car } \frac{8}{5} \geq -1.$$

- $-2 \leq x \leq -1$:
$$\begin{cases} -2x - y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} ; \Delta = -3, \Delta_x = 16, \text{ d'où } x = -\frac{16}{3} \notin [-2 ; -1] : \text{ pas de solution.}$$

- $x \leq -2$:
$$\begin{cases} -2x - y = 6 \\ -x + 2y = 8 \end{cases} ; \Delta = -5, \Delta_x = 20, \Delta_y = -10, \text{ d'où } (x, y) = (-4, 2), \text{ qui convient.}$$

$S = \left\{ \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right) ; (-4, 2) \right\}$.

6

CHAPITRE

Applications : équations, inéquations et systèmes

Notions travaillées

- Équivalences et implications dans la résolution d'une équation
- Équations et inéquations irrationnelles (racines carrées)
- Changement de variable ; équations réciproques
- Systèmes ; discussion suivant un paramètre

Dans ce chapitre

Série 1 – Équations et inéquations irrationnelles	84
Série 2 – Changement de variable.	87
Série 3 – Systèmes et équations à paramètre.	90

Série 1 Équations et inéquations irrationnelles

Exercice n° 179

Analyse d'une erreur

Un professeur a proposé à ses élèves de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Un élève a donné la solution suivante :

Solution de l'élève : Comme $x^2 + x + 1 = 0$, alors $-x^2 = x + 1$ (1) et $x(x + 1) + 1 = 0$ (2). En remplaçant $x + 1$ par sa valeur dans (2), on trouve $x(-x^2) + 1 = 0$, c'est-à-dire $x^3 = 1$. Cette équation admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x = 1$, d'où $S = \{1\}$.

Un autre élève a remarqué que 1 n'est pas solution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Quelle est l'erreur commise par le premier élève ?

Correction

Notons $S = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\}$. Si, pour tout x , $P(x) \Rightarrow Q(x)$, alors l'ensemble des x vérifiant $P(x)$ est *inclus* dans celui des x vérifiant $Q(x)$. Ici :

$$x \in S \Leftrightarrow (-x^2 = x + 1 \text{ et } x(x + 1) + 1 = 0) \Rightarrow x(-x^2) + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Cela signifie seulement que $S \subset \{1\}$: l'élève a raisonné par implications et a conclu comme s'il s'agissait d'équivalences. Comme $1 \notin S$ ($1 + 1 + 1 \neq 0$), on obtient $S = \emptyset$.

Remarque : Quand on résout une équation par implications successives, on doit vérifier que les valeurs trouvées sont bien des solutions.

Exercice n° 180

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$$(I_1) : \sqrt{x-1} \geq x-4$$

$$(I_2) : \sqrt{x^2-5x+6} \leq 2x-3$$

Correction

$(I_1) : \sqrt{x-1} \geq x-4$. L'inéquation est définie si, et seulement si, $x \geq 1$.

- Si $1 \leq x \leq 4$: $x-4 \leq 0 \leq \sqrt{x-1}$, donc tout x de $[1; 4]$ est solution : $S_1 = [1; 4]$.
- Si $x \geq 4$: les deux membres sont positifs, donc $(I_1) \Leftrightarrow x-1 \geq (x-4)^2 \Leftrightarrow x-1 \geq x^2-8x+16 \Leftrightarrow x^2-9x+17 \leq 0$.

$\Delta = 81 - 68 = 13$, $x_1 = \frac{9+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{9-\sqrt{13}}{2}$; le trinôme est négatif entre les racines, et $x_2 < 4 < x_1$.

$$\text{Donc } S_2 = \left[4; \frac{9+\sqrt{13}}{2} \right].$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \left[1; \frac{9+\sqrt{13}}{2} \right].$$

$(I_2) : \sqrt{x^2-5x+6} \leq 2x-3$. Elle est définie si $x^2-5x+6 \geq 0$, c'est-à-dire $x \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$.

- Si $2x-3 < 0$: (I_2) n'a pas de solution.
- Si $x \geq \frac{3}{2}$: $(I_2) \Leftrightarrow x^2-5x+6 \leq (2x-3)^2 \Leftrightarrow x^2-5x+6 \leq 4x^2-12x+9 \Leftrightarrow 3x^2-7x+3 \geq 0$.

$\Delta = 49 - 36 = 13$; racines $\frac{7-\sqrt{13}}{6} < \frac{3}{2} < \frac{7+\sqrt{13}}{6}$. Donc, pour $x \geq \frac{3}{2}$: $x \geq \frac{7+\sqrt{13}}{6}$.

En tenant compte de l'ensemble de définition : $S = \left[\frac{7+\sqrt{13}}{6}; 2 \right] \cup [3; +\infty[$.

Note : le corrigé du document source comporte une erreur de signe pour (I_1) (il obtient $\left[\frac{9+\sqrt{13}}{2}; +\infty \right]$ et oublie l'ensemble de définition pour (I_2) ; la résolution ci-dessus suit la même méthode, corrigée.

Exercice n° 181

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x+4 = \sqrt{x^2+3x+2}$.

Correction

1^{re} méthode. Si x est solution, en élevant au carré : $(x+4)^2 = x^2+3x+2$, d'où $5x = -14$ et $x = -\frac{14}{5}$.

Réciproquement, pour $x = -\frac{14}{5}$: $x+4 = \frac{6}{5}$ et $\sqrt{\frac{196}{25} - \frac{42}{5} + 2} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$. Donc $-\frac{14}{5}$ est la seule solution.

2^e méthode. $x^2+3x+2 = 0$ a pour racines -1 et -2 ; l'ensemble de définition est $]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$, et

sur cet ensemble : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 = x^2+3x+2 \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{14}{5} \\ x \geq -4 \end{cases}$. Donc $S = \left\{ -\frac{14}{5} \right\}$.

Exercice n° 182

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x = \sqrt{x+6}$.

Correction

1^{re} méthode. Si x est solution, en élevant au carré : $x^2 - x - 6 = 0$, donc $x = 3$ ou $x = -2$. Pour $x = 3$: $3 = \sqrt{9}$, donc 3 est solution. Pour $x = -2$: $-2 = \sqrt{4} = 2$, absurde. Donc $S = \{3\}$.

2^e méthode. Sur $[-6; +\infty[: (E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = -2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Exercice n° 183

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : 2x + 1 \leq \sqrt{x^2 + 3}$.

Correction

L'ensemble de définition de (I) est $\mathbb{R}$. L'intervalle $]-\infty; -\frac{1}{2}]$, où $2x + 1 \leq 0$, est inclus dans l'ensemble des solutions.

Sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[: (I) \Leftrightarrow (2x + 1)^2 \leq x^2 + 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-2 - \sqrt{10}}{3}; \frac{-2 + \sqrt{10}}{3} \right]$.

Comme $-\frac{1}{2}$ appartient à cet intervalle, on obtient dans $]-\frac{1}{2}; +\infty[: x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{-2 + \sqrt{10}}{3} \right]$.

Conclusion : $S = \left] -\infty; \frac{-2 + \sqrt{10}}{3} \right]$.

Exercice n° 184

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : x + 3 \geq \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

Correction

$x^2 + 3x + 2 = 0$ a pour racines -1 et -2 ; l'ensemble de définition de (I) est $]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$. Sur cet ensemble :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 9 \geq x^2 + 3x + 2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{7}{3} \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{3}.$$

Conclusion : $S = \left[-\frac{7}{3}; -2 \right] \cup [-1; +\infty[$.

Exercice n° 185

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x+4}$.

Correction

L'équation est définie sur $D = [4; +\infty[$. Pour $x \in D$:

$$(E) \Leftrightarrow x - 1 + x - 4 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4} = x + 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4} = 9 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-1)(x-4) = (9-x)^2 \\ 4 \leq x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 65 = 0 \\ 4 \leq x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ ou } x = -\frac{13}{3} \\ 4 \leq x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Donc $S = \{5\}$.

Exercice n° 186

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\sqrt{5-x} + 3x - 2 > 0$.

Correction

L'inéquation est définie sur $D =]-\infty; 5]$ et s'écrit $\sqrt{5-x} > 2 - 3x$.

- Si $2 - 3x < 0$, c'est-à-dire $x > \frac{2}{3}$: elle est vérifiée, d'où $S_1 =]\frac{2}{3}; 5]$.
- Si $x \leq \frac{2}{3}$: (I) $\Leftrightarrow 5 - x > (2 - 3x)^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 11x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{11-\sqrt{157}}{18}; \frac{11+\sqrt{157}}{18}[$, d'où $S_2 =]\frac{11-\sqrt{157}}{18}; \frac{2}{3}]$.

$$S = S_1 \cup S_2 = \left] \frac{11 - \sqrt{157}}{18}; 5 \right].$$

Série 2 Changement de variable**Exercice n° 187**

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$, et on note S_E l'ensemble de ses solutions.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 + 2t - 24 = 0$.
- 2) On pose $t = x^2 + 3x$.
 - a) Montrer que $x \in S_E \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0$.
 - b) En déduire l'ensemble S_E .

Correction

- 1) $t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (t+6)(t-4) = 0 \Leftrightarrow t = -6$ ou $t = 4$: $S = \{-6; 4\}$.
- 2) a) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x) = 24 \Leftrightarrow t(t+2) = 24 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0$.
 b) $x \in S_E \Leftrightarrow t = -6$ ou $t = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 6 = 0$ ou $x^2 + 3x - 4 = 0$. La première équation n'a pas de solution réelle (discriminant négatif), la seconde a pour solutions 1 et -4. Donc $S_E = \{-4; 1\}$.

Exercice n° 188

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(F) : (1 + x^2)^2 = 4x(1 - x^2)$.

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (1 + x^2)^2 = (1 - x^2)^2 + 4x^2$.

2) Soit S_F l'ensemble des solutions de l'équation (F) .

a) Montrer que $x \in S_F \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$.

b) En déduire l'ensemble S_F .

Correction

1) $(1 - x^2)^2 + 4x^2 = 1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2 = 1 + 2x^2 + x^4 = (1 + x^2)^2$.

2) a) $x \in S_F \Leftrightarrow (1 - x^2)^2 + 4x^2 = 4x(1 - x^2) \Leftrightarrow (1 - x^2)^2 - 2(1 - x^2)(2x) + (2x)^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - x^2 - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$.

b) $x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{2}$ ou $x = -1 + \sqrt{2}$. Donc $S_F = \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}$.

Note : le corrigé du document source aboutit à $x^2 - 2x - 1 = 0$ et à $S_F = \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$ (erreur de signe) ; la résolution ci-dessus est conforme à l'énoncé.

Exercice n° 189

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : (x + 2)^4 + x^4 = 82$. (On pourra poser $x = t - 1$.)

Correction

On pose $x = t - 1 : (x + 2)^4 + x^4 = 82 \Leftrightarrow (t + 1)^4 + (t - 1)^4 = 82 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 + 1 = 41 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 10)(t^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 2) = 0$ (car $t^2 + 10 \neq 0$) $\Leftrightarrow t = 2$ ou $t = -2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$.
Donc $S_H = \{-3; 1\}$.

Exercice n° 190

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(G) : \frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$$

(On pourra poser $t = 2x + \frac{3}{x}$.)

Correction

0 n'est pas solution de (G) . Pour $x \neq 0$, en divisant numérateurs et dénominateurs par x , et avec $t = 2x + \frac{3}{x}$:

$$x \in S_G \Leftrightarrow \frac{2}{t - 5} + \frac{13}{t + 1} = 6 \Leftrightarrow 2(t + 1) + 13(t - 5) = 6(t - 5)(t + 1) \\ \Leftrightarrow 6t^2 - 39t + 33 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ou } t = \frac{11}{2}.$$

• $2x + \frac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 3 = 0$: discriminant $1 - 24 < 0$, pas de solution.

• $2x + \frac{3}{x} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = \frac{3}{4}$.

Donc $S_G = \{\frac{3}{4}; 2\}$ (on vérifie que les dénominateurs ne s'annulent pas).

Note : le corrigé du document source ajoute à tort les valeurs -1 et $-\frac{3}{2}$ (l'équation $2x^2 - x + 3 = 0$ n'a pas de solution réelle).

Exercice n° 191

Calculer $\frac{x}{y}$ sachant que $2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 1 = 0$.

Correction

On pose $X = \frac{x}{y}$ et $t = X + \frac{1}{X}$; alors $X^2 + \frac{1}{X^2} = t^2 - 2$ et l'équation devient $2(t^2 - 2) - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ ou $t = \frac{5}{2}$.

$X + \frac{1}{X} = -1 \Leftrightarrow X^2 + X + 1 = 0$: pas de solution réelle ; $X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 2$ ou $X = \frac{1}{2}$.

Donc $\frac{x}{y} = 2$ ou $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

Exercice n° 192

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) : \frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} = \frac{13}{5} \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{x} \right).$$

(On pourra poser $X = \frac{x}{2} + \frac{3}{x}$.)

Correction

On pose $X = \frac{x}{2} + \frac{3}{x}$; alors $X^2 = \frac{x^2}{4} + 3 + \frac{9}{x^2}$, donc $\frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} = 2(X^2 - 3)$ et

$$x \in S \Leftrightarrow 2(X^2 - 3) = \frac{13}{5}X \Leftrightarrow 10X^2 - 13X - 30 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{5}{2} \text{ ou } X = -\frac{6}{5}.$$

- $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$.
- $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow 5x^2 + 12x + 30 = 0$: discriminant négatif, pas de solution.

Donc $S = \{2; 3\}$.

Exercice n° 193

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ et on note S l'ensemble de ses solutions.

1) Montrer que 0 n'est pas solution de l'équation (E) .

2) On pose $X = x + \frac{1}{x}$.

a) Montrer que $x \in S \Leftrightarrow 2X^2 - 7X + 5 = 0$.

b) En déduire l'ensemble S .

Correction

1) $2 \times 0^4 - 7 \times 0^3 + 9 \times 0^2 - 7 \times 0 + 2 = 2 \neq 0$, donc $0 \notin S$.

2) a) Pour $x \neq 0$, on pose $X = x + \frac{1}{x}$, d'où $X^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 : x \in S \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} (2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 7 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 9 = 0$
 $\Leftrightarrow 2(X^2 - 2) - 7X + 9 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 7X + 5 = 0$.

b) $2X^2 - 7X + 5 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = \frac{5}{2}$. $x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$: pas de solution ;
 $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$. Donc $S = \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$.

Exercice n° 194

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$.

Correction

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + 10x + 25) = x^2(x+1)^2 + (x+5)^2.$$

Cette somme de carrés ne peut être nulle que si $x(x+1) = 0$ et $x+5 = 0$ simultanément, ce qui est impossible. Donc $S = \emptyset$.

Série 3 Systèmes et équations à paramètre**Exercice n° 195**

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} xy = 0 \\ 2x - 5y + 10 = 0 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} (x-2)(y+3) = 0 \\ (2x-y)(3x+y) = 0 \end{cases}$$

Correction

$(S_1) : (S_1) \Leftrightarrow xy = 0$ et $2x - 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$ et $2x - 5y + 10 = 0$
 $\Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } -5y + 10 = 0)$ ou $(y = 0 \text{ et } 2x + 10 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 2)$ ou $(y = 0 \text{ et } x = -5)$.

Donc $S = \{(0; 2); (-5; 0)\}$.

$(S_2) : (S_2) \Leftrightarrow (x-2=0 \text{ ou } y+3=0)$ et $(2x-y=0 \text{ ou } 3x+y=0)$
 $\Leftrightarrow (x=2 \text{ et } 2x=y)$ ou $(x=2 \text{ et } 3x=-y)$ ou $(y=-3 \text{ et } 2x=y)$ ou $(y=-3 \text{ et } 3x=-y)$
 $\Leftrightarrow (x=2 \text{ et } y=4)$ ou $(x=2 \text{ et } y=-6)$ ou $(x=-\frac{3}{2} \text{ et } y=-3)$ ou $(x=1 \text{ et } y=-3)$.

Donc $S = \{(2; 4); (2; -6); (-\frac{3}{2}; -3); (1; -3)\}$.

Exercice n° 196

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ (x-2)(y-6) = 0 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} |2x - y + 3| = 6 \\ |x| + y - 1 = 2 \end{cases}$$

Note : pour (S_1) , l'énoncé source imprime « $2x - (x-2)(y-6) = 0$ » ; la correction du document source traite $(x-2)(y-6) = 0$, retenu ici.

Correction

$(S_1) : (S_1) \Leftrightarrow (2x = y \text{ ou } 2x = -y) \text{ et } (x = 2 \text{ ou } y = 6)$
 $\Leftrightarrow (2x = y \text{ et } x = 2) \text{ ou } (2x = y \text{ et } y = 6) \text{ ou } (2x = -y \text{ et } x = 2) \text{ ou } (2x = -y \text{ et } y = 6)$
 $\Leftrightarrow (x = 2 \text{ et } y = 4) \text{ ou } (x = 3 \text{ et } y = 6) \text{ ou } (x = 2 \text{ et } y = -4) \text{ ou } (x = -3 \text{ et } y = 6).$

D'où $S = \{(2; 4); (3; 6); (2; -4); (-3; 6)\}.$

$(S_2) : (S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3 = 6 \\ |x| + y - 1 = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x - y + 3 = -6 \\ |x| + y - 1 = 2 \end{cases} \quad (S'_2 \text{ et } S''_2).$

Système S'_2 : en ajoutant (1) et (2) : $2x + |x| + 2 = 8$, soit $2x + |x| = 6$.

- si $x \geq 0$: $3x = 6$, donc $x = 2$, puis (1) donne $4 - y + 3 = 6$, soit $y = 1$;
- si $x \leq 0$: $2x - x = 6$, donc $x = 6 > 0$: impossible.

Donc $S'_2 = \{(2; 1)\}.$

Système S''_2 : de même, $2x + |x| + 2 = -4$, soit $2x + |x| = -6$.

- si $x \geq 0$: $3x = -6$, donc $x = -2 < 0$: impossible ;
- si $x \leq 0$: $x = -6$, puis (1) donne $-12 - y + 3 = -6$, soit $y = -3$.

Donc $S''_2 = \{(-6; -3)\}.$

Conclusion : $S = \{(2; 1); (-6; -3)\}.$

Exercice n° 197

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^2 - 2(1+m)x + 4 = 0$, où m est un paramètre réel.

Correction

$$\Delta = 4(1+m)^2 - 16 = 4(m-1)(m+3).$$

- Si $m \in]-3; 1[: \Delta < 0, S = \emptyset.$
- Si $m = 1$ ou $m = -3 : \Delta = 0$, l'équation a une solution unique $x = 1 + m : S = \{1 + m\}.$
- Si $m \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[: \Delta > 0, S = \left\{ m + 1 - \sqrt{(m-1)(m+3)}; m + 1 + \sqrt{(m-1)(m+3)} \right\}.$

Exercice n° 198

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , les solutions du système

$$(S) : \begin{cases} mx + 3y = m^2 \\ 3x + my = 9 \end{cases}$$

Correction

Le déterminant du système est $\Delta = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m^2 - 9 = (m+3)(m-3)$.

- Si $m \neq 3$ et $m \neq -3$: (S) admet une solution unique. $\Delta_x = \begin{vmatrix} m^2 & 3 \\ 9 & m \end{vmatrix} = m^3 - 27 = (m-3)(m^2 + 3m + 9)$
et $\Delta_y = \begin{vmatrix} m & m^2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3m(m-3)$, d'où $S = \left\{ \left(\frac{m^2 + 3m + 9}{m+3}; \frac{-3m}{m+3} \right) \right\}$.
- Si $m = -3$: (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = 3 \end{cases}$: impossible, $S = \emptyset$.
- Si $m = 3$: (S) $\Leftrightarrow 3x + 3y = 9 \Leftrightarrow y = 3 - x$: $S = \{(x; 3 - x) / x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice n° 199

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $a - x = 1 - a^2x$, où a est un paramètre réel.

Correction

$$(E) \Leftrightarrow (a^2 - 1)x = 1 - a.$$

- Si $a \neq 1$ et $a \neq -1$: $x = \frac{1-a}{a^2-1} = -\frac{1}{a+1}$, $S = \left\{ -\frac{1}{a+1} \right\}$.
- Si $a = -1$: (E) $\Leftrightarrow 0x = 2$: $S = \emptyset$.
- Si $a = 1$: (E) $\Leftrightarrow 0x = 0$: $S = \mathbb{R}$.

Note : le corrigé du document source intervertit les cas $a = 1$ et $a = -1$; ils ont été rectifiés.

7

CHAPITRE Raisonnement par récurrence

Notions travaillées

- Principe de récurrence : initialisation et hérédité
- Sommes et produits ; symboles $\sum$, $\prod$ et $n!$
- Inégalités démontrées par récurrence (inégalité de Bernoulli)
- Divisibilité ; fonctions et suites définies par une relation de récurrence

Dans ce chapitre

Série 1 – Sommes et produits	93
Série 2 – Inégalités démontrées par récurrence	105
Série 3 – Divisibilité	113
Série 4 – Fonctions et suites définies par récurrence	117

Série 1 Sommes et produits

Exercice n° 200

Montrer par récurrence que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} ;$
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} ;$
- 3) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Note : question 3 : coquille de l'énoncé source (« $n(x+1)(2x+1)$ ») corrigée.

Correction

- 1) **Initialisation** : pour $n = 1, 1 = \frac{1 \times 2}{2}$.

Hérédité : supposons $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour un certain $n \geq 1$. Alors $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- 2) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. Pour $n = 1 : S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

Supposons $S_n = \frac{n}{n+1}$. Alors $S_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = \frac{n}{n+1}$.

- 3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$. Pour $n = 1 : S_1 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$.

Supposons $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors $S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

car $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$. D'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 201

Montrer par récurrence que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} ;$
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 .$

Correction

- 1) Pour $n = 1 : 1 \times 2 = 2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3}$. Supposons $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} ;$ alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} .$$

D'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 2) Pour $n = 1 : 1^3 = 1 = \left[\frac{1 \times 2}{2} \right]^2$. Supposons $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 ;$ alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 .$$

D'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 202

Montrer que :

$$1) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$2) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$3) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Note : question 1 : l'énoncé source imprime le dénominateur 4 ; la correction du document source établit $\frac{n(n+1)}{2}$.

CorrectionOn utilise le raisonnement par récurrence ; dans chaque cas l'égalité est vraie pour $n = 0$.

$$1) \text{ Si } \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ alors } \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$$2) \text{ Si } \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ alors } \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

$$3) \text{ Si } \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \text{ alors } \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Exercice n° 203

Montrer que :

$$1) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4};$$

$$2) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} n(1+n)(n+2).$$

Correction

$$1) \text{ Pour } n = 1 : \sum_{k=1}^1 (-1)^k k = -1 \text{ et } \frac{(-1)^1 \times 3 - 1}{4} = -1. \text{ Supposons l'égalité vraie au rang } n; \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k &= \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}[-(2n+1) + 4(n+1)] - 1}{4} = \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1) + 1) - 1}{4}. \end{aligned}$$

$$2) \text{ Pour } n = 1 : 1 \times 2 = 2 = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 3. \text{ Supposons l'égalité vraie au rang } n; \text{ alors}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3} n(1+n)(n+2) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3).$$

D'après le principe de récurrence, les deux égalités sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 204

Montrer par récurrence que :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
- 4) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$$
- 5) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$
- 6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$$
- 7) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$
- 8) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$2^n \geq n + 1$$
- 9) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$3^n \geq 1 + 2n$$
- 10) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$5n^3 + n \text{ est divisible par } 6$$
- 11) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$3^{2n} - 2^n \text{ est divisible par } 7$$
- 12) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$9^n - 1 \text{ est divisible par } 8$$
- 13) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$3^n + 4^n - 1 \text{ est divisible par } 6$$

Note : question 10 : l'énoncé source imprime « $5^{3n} + n$ » (faux pour $n = 0$) ; la correction du document source traite $5n^3 + n$, retenu ici.

Correction

On raisonne par récurrence (initialisation puis hérédité) dans chaque question.

- 1) Vraie pour $n = 1$; si $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, alors $1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
- 2) Vraie pour $n = 1$; si $\sum k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$, alors $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + n + 1 \right] = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2$.
- 3) Vraie pour $n = 1$ ($2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$) ; si la formule est vraie au rang n : $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2) \left[\frac{n}{3} + 1 \right] = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.
- 4) Vraie pour $n = 0$; $(n+1)^2 + (2n+3) = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.
- 5) Vraie pour $n = 0$; $\frac{5^{n+1}-1}{4} + 5^{n+1} = \frac{5 \times 5^{n+1} - 1}{4} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$.
- 6) Vraie pour $n = 1$; $(n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = 2n \cdot 2^n + 1 = n 2^{n+1} + 1$.
- 7) Vraie pour $n = 0$; $2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \right] = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \right]$.
- 8) Vraie pour $n = 0$; $2^{n+1} \geq 2(n+1)$ et $2(n+1) - (n+2) = n \geq 0$, d'où $2^{n+1} \geq n+2$.
- 9) Vraie pour $n = 0$; $3^{n+1} \geq 3 + 6n$ et $(3 + 6n) - (2n + 3) = 4n \geq 0$, d'où $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)$.
- 10) Vraie pour $n = 0$; si $5n^3 + n = 6k$, alors $5(n+1)^3 + (n+1) = 5n^3 + n + 15n(n+1) + 6 = 6k + 30n + 6 = 6(k + 5n + 1)$, car $n(n+1) = 2p$ est pair.
- 11) Vraie pour $n = 0$; si $3^{2n} - 2^n = 7k$, alors $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = 7 \times 3^{2n} + 2(3^{2n} - 2^n) = 7(3^{2n} + 2k)$.
- 12) Vraie pour $n = 0$; si $9^n - 1 = 8k$, alors $9^{n+1} - 1 = 8 \times 9^n + (9^n - 1) = 8(9^n + k)$.
- 13) Vraie pour $n = 1$ ($3 + 4 - 1 = 6$) ; si $3^n + 4^n - 1 = 6k$, alors $3^{n+1} + 4^{n+1} - 1 = 4(3^n + 4^n - 1) - 3^n + 3 = 24k - 3(3^{n-1} - 1)$; comme 3^{n-1} est impair, $3^{n-1} - 1$ est pair et $3(3^{n-1} - 1)$ est multiple de 6.

Note : question 13 : rédaction simplifiée par rapport au corrigé source, avec le même argument.

Exercice n° 205

1) a) Calculer la différence $(k+1)^2 - k^2$.

b) En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n+1} k$.

2) a) Calculer la différence $(k+1)^3 - k^3$.

b) En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n+1} k^2$.

3) a) Calculer la différence $(k+1)^4 - k^4$.

b) En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n+1} k^3$.

Correction

1) a) $(\forall k \in \mathbb{N}) (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$.

b) Donc $\sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=0}^n (2k + 1)$; après simplification : $(n+1)^2 = 2 \sum_{k=0}^n k + (n+1)$, d'où

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) a) $(\forall k \in \mathbb{N}) (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

b) Donc $(n+1)^3 = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + (n+1)$, d'où $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \right) =$

$$\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

3) a) $(\forall k \in \mathbb{N}) (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.

b) Donc $(n+1)^4 = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + (n+1)$, d'où $\sum_{k=0}^n k^3 =$

$$\frac{1}{4} \left((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

En remplaçant n par $n+1$, on obtient les sommes jusqu'à $n+1$ demandées.

Remarque : On peut ainsi calculer de proche en proche les sommes $\sum_{k=0}^n k^i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 206

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = S_n \quad \text{avec} \quad S_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Correction

- Pour $n = 1$: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$ et $S_1 = \frac{1 \times 4}{4 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$.
- Supposons $S_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ et montrons que $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

$$\text{Or } n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n+1)^2(n+4), \text{ donc } S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}.$$

D'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 207

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n+1)(n^2 + 5n + 4)$.
- 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.
- 3) a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; -2\}) \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

b) Retrouver le résultat de la question 2 sans raisonner par récurrence.

Correction

- 1) $(n+1)(n^2 + 5n + 4) = n^3 + 5n^2 + 4n + n^2 + 5n + 4 = n^3 + 6n^2 + 9n + 4$.
- 2) L'égalité est vraie pour $n = 1$ ($\frac{1}{6} = \frac{4}{4 \times 2 \times 3}$). Si elle est vraie au rang n , alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)},$$

d'après 1). Par récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 3) a) Supposons l'égalité (E) vraie. En multipliant (E) par x puis en substituant 0 à x , on trouve $a = \frac{1}{2}$. De même, en multipliant par $x+1$ et en substituant -1 : $b = -1$; de manière analogue, $c = \frac{1}{2}$. Il suffit alors de vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; -2\}$: $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$.

b) D'après a) : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$. Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice n° 208*Exercice d'application*

En utilisant la même méthode que dans l'exercice précédent, déterminer les réels $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \llbracket 0; 10 \rrbracket) \quad \frac{1}{x(x-1) \cdots (x-10)} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}.$$

Correction

(Correction non fournie par le document source ; rédigée selon la méthode de l'exercice précédent.)

Pour $k \in \llbracket 0; 10 \rrbracket$, on multiplie l'égalité par $x - k$, puis on substitue k à x :

$$a_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{10} \frac{1}{k-j} = \frac{1}{k(k-1) \cdots 1 \times (-1)(-2) \cdots (k-10)} = \frac{(-1)^{10-k}}{k!(10-k)!}.$$

Par exemple $a_0 = \frac{1}{10!}$, $a_1 = -\frac{1}{9!}$, $a_{10} = \frac{1}{10!}$.

Exercice n° 209

Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Correction

Initialisation : pour $n = 1$, $\frac{1^2}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$. Alors

$$T = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)[n(2n+3) + 2(n+1)]}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n^2 + 5n + 2)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

Or $2n^2 + 5n + 2 = (2n+1)(n+2)$, d'où $T = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 210

Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (n-k)^2 \times (-1)^k$.

1) Calculer S_3 et S_4 .

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Correction

1) $S_3 = 3^2 - 2^2 + 1^2 - 0^2 = 6$ et $S_4 = 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 + 0^2 = 10$.

2) Pour $n = 1$: $S_1 = 1^2 - 0^2 = 1 = \frac{1 \times 2}{2}$. Supposons $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} (n+1-k)^2 (-1)^k = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n+1} (n-(k-1))^2 (-1)^k \\ &= (n+1)^2 - \sum_{i=0}^n (n-i)^2 (-1)^i = (n+1)^2 - S_n \end{aligned}$$

(en posant $i = k-1$). D'où $S_{n+1} = (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 211

Soit n un entier naturel. On pose $u_n = \prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2$.

1) Calculer u_0 .

2) Montrer que $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^2$.

3) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2n+3$.

Correction

1) $u_0 = \left(1 + \frac{1}{2 \times 0 + 1}\right)^2 = 4$.

2) $u_{n+1} = \prod_{i=0}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2 = \prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2 \times \left(1 + \frac{1}{2(n+1)+1}\right)^2 = u_n \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^2$.

3) Pour $n = 0$: $u_0 = 4 > 3$. Supposons $u_n > 2n+3$. D'après 2) : $u_{n+1} > (2n+3) \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^2 = \frac{(2n+4)^2}{2n+3}$.
Or $(2n+4)^2 = 4n^2 + 16n + 16 > (2n+3)(2n+5) = 4n^2 + 16n + 15$, donc $u_{n+1} > 2n+5$. Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2n+3$.

Note : le corrigé du document source écrit $u_0 = 1$ (coquille) ; on a bien $u_0 = 4$.

Exercice n° 212

Autour du symbole Σ

On note $\sum_{i=1}^n a_i$ la somme $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, où $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout i de $\{1; 2; \dots; n\}$. L'écriture $\sum_{i=1}^n a_i$ s'écrit aussi $\sum_{k=1}^n a_k$ ou $\sum_{j=1}^n a_j$...

Propriétés du symbole Σ : (1) $\sum_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i$ (2) $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$ (3) $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$ (4) $\sum_{i=1}^n a = na$

- 1) On pose $S_1 = \sum_{k=1}^n k$.
 - a) Vérifier que $S_1 = \sum_{k=1}^n (n+1-k)$.
 - b) En déduire que $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.
 - c) Calculer $T_1 = \sum_{k=0}^n (2k+1)$ et $T_2 = \sum_{k=1}^n 2k$.
 - d) Calculer $T_3 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1$.
- 2) En utilisant l'égalité $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, montrer que $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
- 3) Montrer que $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
- 4) a) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$.
 b) Vérifier que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
 c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n}$.
- 5) Soient $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S = \sum_{k=0}^n q^k$. Calculer $S - qS$, puis en déduire que $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Calculer la somme $S' = q^m + q^{m+1} + \dots + q^n$, où $m \in \mathbb{N}$ et $n > m$.

Note : dans le document source, les questions sont numérotées 1, 2, 4, 5, 6 (pas de question 3).

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Question 5 : la borne inférieure de la somme S est peu lisible dans l'énoncé ; la correction du document source utilise $k = 0$.

Correction

- 1) a) $\sum_{k=1}^n (n+1-k) = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = 1 + 2 + \dots + n = S_1$.

$$\text{b) } 2S_1 = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n+1-k) = \sum_{k=1}^n (n+1) = n(n+1), \text{ donc } S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{c) } T_1 = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2S_1 + (n+1) = (n+1)^2; \quad T_2 = 2 \sum_{k=1}^n k = 2S_1 = n(n+1).$$

$$\text{d) } T_3 = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^{n-1} k = 2S_1 - n = n(n+1) - n = n^2.$$

2) En sommant $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ pour k de 1 à n : $\sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + 3S_2 + 3S_1 + n$. Or

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 - 1, \text{ d'où } (n+1)^3 - 1 = 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n \text{ et } 3S_2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)[2(n+1)^2 - 2 - 3n]}{2} = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{2}, \text{ soit } S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3) Par récurrence : pour $n = 1$, $1^3 = 1 = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2$. Si $S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, alors $S_3 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

$$4) \text{ a) } \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

$$\text{b) } \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

$$\text{c) D'après a) et b) : } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

5) $S = 1 + q + \dots + q^n$ et $qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$, donc $S - qS = 1 - q^{n+1}$, soit $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$;
comme $q \neq 1$: $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

$$S' = q^m (1 + q + \dots + q^{n-m}) = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} \quad (n - m + 1 \text{ est le nombre de termes de } S').$$

Exercice n° 213

Autour du symbole $\prod$

On note $\prod_{i=1}^n a_i$ le produit $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$. Le nombre $\prod_{i=1}^n a_i$ s'écrit aussi $\prod_{k=1}^n a_k$ ou $\prod_{j=1}^n a_j \dots$

Propriétés : (1) $\prod_{i=1}^n a_i b_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{i=1}^n b_i \right)$ (2) $\prod_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i=1}^n a_i$ (3) $\prod_{i=1}^n a = a^n$ (4) $\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=0}^{n-1} a_{n-i}$

1) a) Vérifier que $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_n}{a_0}$, où $a_i \in \mathbb{R}^*$ pour tout i de $\{0; 1; 2; \dots; n-1\}$.

b) En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k} \right) = n$.

2) On pose $P_n = \prod_{k=0}^n \cos \left(\frac{x}{2^{k+1}} \right)$. En utilisant la relation $\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$, montrer que

$$P_n = \frac{\sin x}{2^{n+1} \sin \left(\frac{x}{2^{n+1}} \right)}.$$

3) Vérifier que $\prod_{k=0}^n a^k = \sqrt{a^{n(n+1)}}$.

Rappel : $\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$ pour tout b de $\mathbb{R}_+^*$, et $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Correction

1) a) $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_1}{a_0} \times \frac{a_2}{a_1} \times \dots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_0}$ après simplification.

b) $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n}{n-1} = n$ (c'est a) avec $a_k = k$, à partir de $k = 1$).

2) Avec $\alpha = \frac{x}{2^{k+1}}$ (en supposant les sinus non nuls) : $\cos \frac{x}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin \frac{x}{2^k}}{\sin \frac{x}{2^{k+1}}}$. Le produit compte $n+1$

facteurs ; d'après 1.a) : $P_n = \frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^n \frac{\sin \frac{x}{2^k}}{\sin \frac{x}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^{n+1}}}$.

Note : la correction du document source écrit $\frac{1}{2^n}$ au lieu de $\frac{1}{2^{n+1}}$; le produit de $k = 0$ à n comporte $n+1$ facteurs $\frac{1}{2}$, d'où 2^{n+1} , conformément à l'énoncé.

3) $\prod_{k=0}^n a^k = a^0 \times a^1 \times \dots \times a^n = a^{1+2+\dots+n} = a^{\frac{n(n+1)}{2}} = \sqrt{a^{n(n+1)}}$ (pour $a > 0$).

Exercice n° 214*Le symbole $n!$*

On définit le nombre $n!$, où $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} 0! = 1! = 1 \\ n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq 2 \end{cases}$$

- 1) Calculer $3!$; $4!$; $5!$; $6!$; $\frac{5!}{3!}$; $\frac{6!}{4!}$; $\frac{5!}{4!}$.
- 2) Vérifier que $(n+1)! = (n+1)n!$.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$(1) \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \qquad (2) \ n! = \prod_{k=1}^n (n+1-k)$$

- 4) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$.

a) Montrer que $n \leq k(n+1-k) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

b) En déduire que $\sqrt{n^n} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Correction

1) $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$; $\frac{6!}{4!} = 6 \times 5 = 30$; $\frac{5!}{4!} = 5$.

2) $(n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = (n+1)n!$ (et de même $n! = n(n-1)!$ pour $n \geq 1$).

3) (1) $\prod_{k=0}^n (2k+1) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 2n \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} = \frac{(2n+1)!}{(2 \times 1)(2 \times 2) \cdots (2 \times n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

(2) $\prod_{k=1}^n (n+1-k) = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \times 1 = n!$.

- 4) a) $n \leq k(n+1-k) \Leftrightarrow 0 \leq kn - n + k - k^2 \Leftrightarrow 0 \leq n(k-1) - k(k-1) \Leftrightarrow 0 \leq (k-1)(n-k)$, vrai car $1 \leq k \leq n$.

De plus, d'après $g \leq m$ avec $k > 0$ et $n+1-k > 0$: $\sqrt{k(n+1-k)} \leq \frac{k+n+1-k}{2} = \frac{n+1}{2}$, d'où

$$k(n+1-k) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

b) On multiplie les inégalités de a) pour $k = 1, \dots, n$ (nombres positifs) : $n^n \leq \left(\prod_{k=1}^n k\right) \left(\prod_{k=1}^n (n+1-k)\right) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$, soit $n^n \leq (n!)^2 \leq \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right)^2$, d'après 3.(2). Donc $\sqrt{n^n} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Série 2 Inégalités démontrées par récurrence

Exercice n° 215

Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2^n > n$.

Correction

Soit $P(n) : « 2^n > n »$.

Initialisation : $2^0 = 1 > 0$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n > n$. Alors $2^{n+1} = 2^n + 2^n$; or $2^n > n$ et $2^n \geq 1$, donc $2^{n+1} > n + 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) 2^n > n$.

Exercice n° 216

Montrer par récurrence que $(\forall n \geq 3) 3^n \geq n^3$.

Correction

Le résultat est vrai pour $n = 3$ ($27 \geq 27$). Soit $n \geq 3$: si $3^n \geq n^3$, alors $3^{n+1} \geq 3n^3$; pour montrer que $3^{n+1} \geq (n+1)^3$, il suffit donc d'avoir $3n^3 \geq (n+1)^3$. Or

$$3n^3 \geq (n+1)^3 \Leftrightarrow 3n^3 \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow n^2(n-3) + (n-1)(n^2+n-2) - 3 \geq 0,$$

ce qui est vrai car, pour $n \geq 3$, $n^2(n-3) \geq 0$ et $(n-1)(n^2+n-2) \geq 2 \times 10 = 20$.

Par récurrence : $(\forall n \geq 3), 3^n \geq n^3$.

Exercice n° 217

Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq 4 \Rightarrow 2^n \geq n^2$.

Correction

Soit $P(n) : « 2^n \geq n^2 »$, pour $n \geq 4$.

Initialisation : $2^4 = 16 = 4^2$, donc $P(4)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geq 4$ tel que $2^n \geq n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$; il suffit donc de montrer que $2n^2 \geq (n+1)^2$, c'est-à-dire $n^2 - 2n \geq 1$, soit $n(n-2) \geq 1$. Or $n \geq 4$ et $n-2 \geq 2$, donc $n(n-2) \geq 8 \geq 1$. D'où $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq 4 \Rightarrow 2^n \geq n^2$.

Exercice n° 218

Montrer par récurrence que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3^n \geq 2n + 1 ;$
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq 5, \quad 3^n > 2^n + 5n^2 ;$
- 3) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$

Correction

1) Pour $n = 0 : 3^0 = 1 \geq 2 \times 0 + 1$. Supposons $3^n \geq 2n + 1$; alors $3^{n+1} \geq 3(2n + 1) = 6n + 3$ (1). Or $(6n + 3) - (2n + 3) = 4n \geq 0$, donc $6n + 3 \geq 2n + 3$ (2). D'après (1) et (2) : $3^{n+1} \geq 2(n + 1) + 1$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N}), 3^n \geq 2n + 1$.

2) Pour $n = 5 : 3^5 = 243$ et $2^5 + 5 \times 5^2 = 157$, donc $3^5 > 2^5 + 5 \times 5^2$.
Supposons $3^n > 2^n + 5n^2$ pour un certain $n \geq 5$; alors $3^{n+1} > 3 \times 2^n + 15n^2$ (1). Or $3 \times 2^n + 15n^2 - 2^{n+1} - 5(n + 1)^2 = 2^n + 10n^2 - 10n - 5 = 2^n + 5[(n^2 - 2) + (n - 1)^2] > 0$ car $n \geq 5$ (2). D'après (1) et (2) : $3^{n+1} > 2^{n+1} + 5(n + 1)^2$. Donc $(\forall n \geq 5), 3^n > 2^n + 5n^2$.

3) On pose $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Pour $n = 1 : T_1 = 1 = 2 - \frac{1}{1}$.

Supposons $T_n \leq 2 - \frac{1}{n}$; alors $T_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$ (1). Or

$$\left[2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\right] - \left[2 - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{-(n+1)^2 + n + n(n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \quad (2).$$

D'après (1) et (2) : $T_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*), T_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice n° 219

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$.

Correction

On voit clairement que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 - \frac{1}{n} \leq 2$. Il reste à montrer $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, par récurrence.

Pour $n = 1 : 1 \leq 1 = 2 - \frac{1}{1}$. Supposons le résultat vrai au rang n ; alors $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$. Or

$$2 - \frac{1}{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) > 0,$$

d'où $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \geq 1$.

Exercice n° 220

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$3n(2n+3)(n+1)^2 + (2n+3)(2n+1) \geq 3(2n+1)(n+1)^3.$$

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$.

Correction

1) Posons $f(n) = 3n(2n+3)(n+1)^2 + (2n+3)(2n+1)$ et $g(n) = 3(2n+1)(n+1)^3$. On a $g(n) = (6n+3)(n^3+3n^2+3n+1) = 6n^4+21n^3+27n^2+15n+3$ et $f(n) = (6n^2+9n)(n^2+2n+1) + 4n^2+8n+3 = 6n^4+21n^3+28n^2+17n+3$.

Comme $f(n) - g(n) = n^2 + 2n \geq 0$, on obtient le résultat demandé.

2) Pour $n = 1$: $1 \geq \frac{3}{3}$. Supposons $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$; on en déduit $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$. Pour conclure, il suffit d'avoir $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3(n+1)}{2n+3}$. Or

$$\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3(n+1)}{2n+3} \Leftrightarrow 3n(2n+3)(n+1)^2 + (2n+1)(2n+3) \geq 3(n+1)^3(2n+1),$$

ce qui est vrai d'après la question 1). Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 221

Montrer par récurrence que :

1) $(\forall n \geq 6) \quad 2^n \geq (n+2)^2$;

2) $(\forall n \geq 1) \quad 4^n \geq 3^n + n3^{n-1}$;

3) $(\forall n \geq 1) \quad 5^n \leq 4^n + n5^{n-1}$.

Correction

1) L'inégalité est vraie pour $n = 6$ ($64 \geq 64$). Soit $n \geq 6$: si $2^n \geq (n+2)^2$, alors $2^{n+1} \geq 2(n+2)^2$; il suffit donc d'avoir $2(n+2)^2 \geq (n+3)^2$. Or $2(n+2)^2 \geq (n+3)^2 \Leftrightarrow n^2+2n-1 \geq 0$, ce qui est vrai pour $n \geq 6$. D'où $2^{n+1} \geq ((n+1)+2)^2$.

2) Le résultat est vrai pour $n = 1$ ($4 \geq 3 + 1$). Soit $n \geq 1$: si $4^n \geq 3^n + n3^{n-1}$, alors $4^{n+1} \geq 4 \cdot 3^n + 4n3^{n-1}$; il suffit de montrer $4 \cdot 3^n + 4n3^{n-1} \geq 3^{n+1} + (n+1)3^n$, ce qui équivaut à $n3^{n-1} \geq 0$: vrai.

3) Le résultat est vrai pour $n = 1$ ($5 \leq 4 + 1$). Soit $n \geq 1$: si $5^n \leq 4^n + n5^{n-1}$, alors $5^{n+1} \leq 5 \times 4^n + n5^n$; il suffit de montrer $5 \times 4^n + n5^n \leq 4^{n+1} + (n+1)5^n$, ce qui équivaut à $4^n \leq 5^n$: vrai.

Conclusion : par récurrence, les trois inégalités sont démontrées.

Exercice n° 222

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq 3, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$.

Correction

Initialisation : pour $n = 3, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3$.

Hérédité : supposons $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$ pour un certain $n \geq 3$. Comme $1 + \frac{1}{n} > 0$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$ (1).

Or $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, donc $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} > 0$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ (2).

D'après (1) et (2) : $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < n + 1$. Donc $(\forall n \geq 3), \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$.

Exercice n° 223

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 4n^2 \geq (n+1)^2$.
- 2) a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 4^n \geq n^2$.
b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4^n \geq n^2$.

Correction

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $4n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 3n^2 - 2n \geq 1 \Leftrightarrow n(3n-2) \geq 1$. Or $n \geq 1$, donc $3n-2 \geq 1$ et $n(3n-2) \geq 1$: l'inégalité est vraie.

2) a) *Initialisation* : $4^1 = 4 \geq 1 = 1^2$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $4^n \geq n^2$. Alors $4^{n+1} = 4 \times 4^n \geq 4n^2 \geq (n+1)^2$ d'après 1).

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 4^n \geq n^2$.

b) De plus $4^0 = 1 \geq 0 = 0^2$; donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4^n \geq n^2$.

Exercice n° 224*Inégalité de Bernoulli*

Montrer par récurrence sur n que :

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (1+a)^n \geq 1+na.$$

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE]

Telle qu'elle est écrite, l'inégalité n'est pas vraie pour tout réel a ; la correction du document source commence par « soit a un réel positif ».

Correction

Soit a un réel positif. L'inégalité $(1+a)^n \geq 1+na$ est vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie au rang n . Comme $1+a > 0$:

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a.$$

Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (1+a)^n \geq 1+na$.

Note : la démonstration utilise $1+a > 0$; elle reste valable pour tout réel $a \geq -1$ (inégalité de Bernoulli), mais pas pour tout réel a (par exemple $a = -4, n = 3$: $-27 < -11$).

Exercice n° 225

Soit x un réel strictement positif.

1) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2) En déduire que :

- a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2^n \geq 1+n$;
- b) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3^n \geq n$;
- c) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (1+n)^n \geq 2^n$.

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE] Question 2.c : la correction du document source aboutit à $(n+1)^n \geq 2n^n$.

Correction

1) Pour $n = 0$: $(1+x)^0 = 1 \geq 1$. Supposons $(1+x)^n \geq 1+nx$; comme $1+x > 0$: $(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ (car $nx^2 \geq 0$).

2) a) Pour $x = 1$: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2^n \geq 1+n$.

b) Pour $x = 2$: $3^n \geq 1+2n > n$, donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3^n \geq n$.

c) Pour $x = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \times \frac{1}{n} = 2$, d'où $(n+1)^n \geq 2n^n$. Comme $n^n \geq 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$, on obtient $(1+n)^n \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

Exercice n° 226

1) Montrer que $(\forall a \in]0; +\infty[) ; \quad a + \frac{1}{a} \geq 2$.

2) Soit x un réel positif tel que $x \neq 1$. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1-x^{2n+1}}{1-x} \geq (1+2n)x^n.$$

Note : la correction du document source prend $x \in]0; +\infty[$.

Correction

1) D'après $m \geq g$: $\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 1$, donc $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

2) Supposons $x > 0$ (pour $x = 0$ l'inégalité s'écrit $1 \geq (1+2n) \times 0^n$, évidente). D'après la somme des termes d'une suite géométrique (exercice sur le symbole Σ) : $\frac{1-x^{2n+1}}{1-x} = 1 + x + \dots + x^{2n} = x^n \left[\left(\frac{1}{x^n} + x^n \right) + \left(\frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x} + x \right) + 1 \right] = x^n \left(\sum_{k=1}^n \left(x^k + \frac{1}{x^k} \right) + 1 \right)$. D'après 1), $x^k + \frac{1}{x^k} \geq 2$, donc $\sum_{k=1}^n \left(x^k + \frac{1}{x^k} \right) + 1 \geq 2n + 1$; comme $x^n \geq 0$: $\frac{1-x^{2n+1}}{1-x} \geq (1+2n)x^n$.

Exercice n° 227

Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2 \geq 2n+3$.

Correction

Posons $u_n = \prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2$.

Initialisation : $u_1 = (1+1)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} \geq 5$ (car $64 > 45$).

Hérédité : supposons $u_n \geq 2n+3$. Alors $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^2 = u_n \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^2 \geq \frac{(2n+4)^2}{2n+3}$. Or

$(2n+4)^2 = 4n^2 + 16n + 16 \geq 4n^2 + 16n + 15 = (2n+5)(2n+3)$, donc $\frac{(2n+4)^2}{2n+3} \geq 2n+5$ et $u_{n+1} \geq 2(n+1)+3$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n \geq 2n+3$.

Exercice n° 228

1) Montrer que $3^{2n} - 1$ est un multiple de 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3^n > 2n$.

3) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k 2^{k-1} = (n-1) 2^n - n 2^{n-1} + 1.$$

4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n! \geq 2^{n-1}$.

5) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad P_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Correction

1) Posons $a_n = 3^{2n} - 1$. $a_0 = 0$ est multiple de 4. Si $a_n = 4k$, alors $a_{n+1} = 9 \times 3^{2n} - 1 = 8 \times 3^{2n} + (3^{2n} - 1) = 4(2 \times 3^{2n} + k)$. Par récurrence, 4 divise $3^{2n} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $3^0 = 1 > 0$. Si $3^n > 2n$, alors $3^{n+1} = 3^n + 3^n + 3^n > 2n + 1 + 1 = 2(n+1)$ (car $3^n \geq 1$). D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3^n > 2n$.

3) Pour $n = 2$: $\sum_{k=1}^1 k 2^{k-1} = 1$ et $(2-1)2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$. Si l'égalité est vraie au rang $n \geq 2$, alors $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1 + n2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$, et $n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 = (2n - n - 1)2^n + 1 = (n-1)2^n + 1$: l'égalité est vraie au rang $n+1$.

4) $1! = 1 = 2^0$. Si $n! \geq 2^{n-1}$, comme $n+1 \geq 2$: $(n+1)! = (n+1)n! \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n! \geq 2^{n-1}$.

5) $P_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}}$. Supposons $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. On a $P_{n+1} = P_n \times \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}$; il suffit donc de montrer $\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$, c'est-à-dire $(2n+1)\sqrt{3n+4} \leq (2n+2)\sqrt{3n+1}$. Or

$((2n+1)\sqrt{3n+4})^2 = 12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4 = ((2n+2)\sqrt{3n+1})^2$, et les deux nombres sont positifs. D'où $P_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$, et le résultat par récurrence.

Exercice n° 229*Inégalité de Cauchy-Schwarz*

- 1) Montrer que $a + \frac{1}{a} \geq 2$ pour tout a de l'intervalle $]0; +\infty[$.
 2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer par récurrence que :

$$(1) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2.$$

- 3) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels. En considérant le polynôme $P(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2$, montrer que :

$$(2) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz. En déduire de nouveau l'inégalité (1).

Correction

- 1) Pour $a > 0$: $a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$.

- 2) Pour $n = 1$: $a_1 \times \frac{1}{a_1} = 1 \geq 1^2$. Supposons (1) vraie au rang n . Alors $\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i} \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_i} \right) + 1$. D'après 1), chaque $\frac{a_i}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_i} \geq 2$; donc la somme est $\geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. D'où (1) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Cas particuliers utiles : $(a_1 + a_2) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \geq 4$ et $(a_1 + a_2 + a_3) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \geq 9$.

- 3) $P(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $\sum a_i^2 = 0$, tous les a_i sont nuls et (2) est évidente. Sinon P est un trinôme du second degré de signe constant positif, donc son discriminant est négatif : $\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0$, ce qui donne (2).

Pour retrouver (1) : les a_i étant > 0 , on applique (2) à $\sqrt{a_i}$ et $\frac{1}{\sqrt{a_i}}$: $\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \times \frac{1}{\sqrt{a_i}} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$, soit $n^2 \leq \left(\sum a_i \right) \left(\sum \frac{1}{a_i} \right)$.

Exercice n° 230

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels positifs.

a) Montrer que (1) $\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$.

b) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels de l'intervalle $[1; +\infty[$. Montrer que :

$$(2) \quad n + \prod_{i=1}^n b_i \geq 1 + \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n (1 + b_i) \geq \frac{2^n}{1 + n} \left(1 + \sum_{i=1}^n b_i \right).$$

Correction

1) a) Pour $n = 1 : 1 + a_1 \geq 1 + a_1$. Supposons $\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$. Comme $1 + a_{n+1} > 0 : \prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i) \geq$

$$(1 + a_{n+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i \right) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i + a_{n+1} \sum_{i=1}^n a_i \geq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

b) Avec $a_i = x$ pour tout $i : (1 + x)^n \geq 1 + nx$ pour $n \geq 1$; pour $n = 0$ c'est l'égalité $1 = 1$.

2) Posons $a_i = b_i - 1 \geq 0$. D'après 1.a) : $\prod_{i=1}^n b_i \geq 1 + \sum_{i=1}^n (b_i - 1) = 1 + \sum_{i=1}^n b_i - n$, d'où $n + \prod_{i=1}^n b_i \geq 1 + \sum_{i=1}^n b_i$.

Posons maintenant $a_i = \frac{b_i - 1}{2} \geq 0$, de sorte que $1 + a_i = \frac{1 + b_i}{2}$ et $b_i = 1 + 2a_i$. D'après 1.a) : $\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (1 + b_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$. Comme $n + 1 \geq 2$, $\frac{2}{n+1} \leq 1$, donc $1 + \sum_{i=1}^n a_i \geq 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{n+1} \left(1 + \sum_{i=1}^n (1 + 2a_i) \right) = \frac{1}{n+1} \left(1 + \sum_{i=1}^n b_i \right)$. Donc $\prod_{i=1}^n (1 + b_i) \geq \frac{2^n}{n+1} \left(1 + \sum_{i=1}^n b_i \right)$.

Exercice n° 231

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.

2) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_{2^n} - 1 \geq \frac{n}{2}$.

3) La proposition $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \leq M$ est-elle vraie ?

Correction

1) $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$. Puisque $(\forall i \in [1; n]) \quad \frac{1}{n+i} \geq \frac{1}{2n}$, on obtient

$$S_{2n} - S_n \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2) D'après 1) : $S_2 - S_1 \geq \frac{1}{2}$, $S_4 - S_2 \geq \frac{1}{2}$, $S_8 - S_4 \geq \frac{1}{2}$, ..., $S_{2^n} - S_{2^{n-1}} \geq \frac{1}{2}$. En sommant membre à membre : $S_{2^n} - S_1 \geq \frac{n}{2}$, et comme $S_1 = 1 : S_{2^n} - 1 \geq \frac{n}{2}$.

3) Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \leq M$. Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_{2^n} \leq M$, et d'après 2) $\frac{n}{2} \leq M$, donc $n \leq 2M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: absurde, car aucun réel n'est supérieur ou égal à tous les entiers naturels. La proposition est donc fausse.

Série 3 Divisibilité

Exercice n° 232

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 14 divise $21^n - 7^{2n}$.

Note : coquille de l'énoncé source (« 7^{2n} ») corrigée d'après la correction du document source.

Correction

Raisonnons par récurrence.

- Pour $n = 0$: $21^0 - 7^0 = 0$ et 14 divise 0.
- Supposons que 14 divise $21^n - 7^{2n}$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $21^n - 7^{2n} = 14k$. Alors

$$21^{n+1} - 7^{2(n+1)} = 21 \times 21^n - 49 \times 7^{2n} = 21(21^n - 7^{2n}) - 28 \times 7^{2n} = 14(21k - 2 \times 7^{2n}).$$

Donc 14 divise $21^{n+1} - 7^{2(n+1)}$.

D'après le principe de récurrence, 14 divise $21^n - 7^{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 233

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 15 divise $4^{2n+2} - 1$.

Correction

- Pour $n = 0$: $4^2 - 1 = 15$ et 15 divise 15.
- Supposons que 15 divise $4^{2n+2} - 1$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^{2n+2} - 1 = 15k$. Alors

$$4^{2(n+1)+2} - 1 = 16 \times 4^{2n+2} - 1 = 15 \times 4^{2n+2} + (4^{2n+2} - 1) = 15(4^{2n+2} + k).$$

Donc 15 divise $4^{2(n+1)+2} - 1$.

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$, 15 divise $4^{2n+2} - 1$.

Exercice n° 234

Montrer par récurrence que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N})$ 2 divise $3^n + 5^{n+1}$;
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N})$ 3 divise $2^{2n} - 1$.

Correction

- 1) Pour $n = 0$: $3^0 + 5^1 = 6$ et 2 divise 6. Supposons que $3^n + 5^{n+1} = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$3^{n+1} + 5^{n+2} = 3 \times 3^n + 5 \times 5^{n+1} = 2(3^n + 2 \times 5^{n+1}) + (3^n + 5^{n+1}) = 2(3^n + 2 \times 5^{n+1} + k).$$

Donc 2 divise $3^{n+1} + 5^{n+2}$; d'après le principe de récurrence, 2 divise $3^n + 5^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 2) Pour $n = 0$: $2^0 - 1 = 0$, divisible par 3. Supposons $2^{2n} - 1 = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $2^{2(n+1)} - 1 = 4(2^{2n} - 1) + 3 = 3(4k + 1)$. Donc 3 divise $2^{2(n+1)} - 1$, et la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 235

Montrer que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3 \text{ divise } 2^{2n+1} + 5^{2n} ;$
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 7 \text{ divise } 2^{n+2} + 3^{2n+1} ;$
- 3) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 9 \text{ divise } 4^n + 6n - 1.$

Correction

- 1) Pour $n = 0 : 2^1 + 5^0 = 3$. Supposons $2^{2n+1} + 5^{2n} = 3k$; alors $2^{2n+1} = 3k - 5^{2n}$ et

$$2^{2n+3} + 5^{2n+2} = 4(3k - 5^{2n}) + 25 \times 5^{2n} = 3 \times 4k + 21 \times 5^{2n} = 3(4k + 7 \times 5^{2n}).$$

- 2) Pour $n = 0 : 2^2 + 3^1 = 7$. Supposons $2^{n+2} + 3^{2n+1} = 7k$; alors

$$2^{n+3} + 3^{2n+3} = 2 \times 2^{n+2} + 9 \times 3^{2n+1} = 2(2^{n+2} + 3^{2n+1}) + 7 \times 3^{2n+1} = 7(2k + 3^{2n+1}).$$

- 3) Pour $n = 1 : 4 + 6 - 1 = 9$. Supposons $4^n + 6n - 1 = 9k$; alors $4^n = 9k - 6n + 1$ et

$$4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4(9k - 6n + 1) + 6n + 5 = 36k - 18n + 9 = 9(4k - 2n + 1).$$

Dans chaque cas, d'après le principe de récurrence, la divisibilité est vraie pour tout n .

Exercice n° 236

Montrer que :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 2 \text{ est divisible par } 3 ;$
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n + 6n - 1 \text{ est divisible par } 9 ;$
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{6n+3} + 3^{4n+2} \text{ est divisible par } 17.$

Remarque : Si un entier naturel m divise deux entiers relatifs a et b , alors il divise toute combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de a et b .

Correction

- 1) $4^0 + 2 = 3$ et 3 divise 3. Supposons que 3 divise $4^n + 2$. On a $4^{n+1} + 2 = (4^n + 2) + 3 \times 4^n$; comme 3 divise $4^n + 2$ et 3×4^n , il divise leur somme. Donc 3 divise $4^n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) $4^1 + 6 - 1 = 9$. Supposons que 9 divise $4^n + 6n - 1$. On a $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = (4^n + 6n - 1) + 3(4^n + 2)$; d'après 1), 3 divise $4^n + 2$, donc 9 divise $3(4^n + 2)$, et d'après l'hypothèse de récurrence 9 divise $4^{n+1} + 6(n+1) - 1$.
- 3) Pour $n = 0 : 2^3 + 3^2 = 17$. Supposons que 17 divise $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$. Alors

$$2^{6(n+1)+3} + 3^{4(n+1)+2} = 64 \times 2^{6n+3} + 81 \times 3^{4n+2} = 64(2^{6n+3} + 3^{4n+2}) + 17 \times 3^{4n+2},$$

qui est divisible par 17. Donc 17 divise $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 237

On considère les fonctions propositionnelles définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$P(n) : \ll 3 \text{ divise } 4^n - 1 \gg \quad \text{et} \quad Q(n) : \ll 3 \text{ divise } 4^n + 1 \gg.$$

- 1) Montrer que les propositions $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n) \Rightarrow P(n+1)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ sont vraies.
- 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), 3 \text{ divise } 4^n - 1$.
- 3) La proposition $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow Q(n)$ est-elle vraie ?

Correction

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire si 3 divise $4^n - 1$, alors de $4^{n+1} - 1 = (4^n - 1) + 3 \times 4^n$ on tire que $P(n+1)$ est vraie.
De même, si 3 divise $4^n + 1$, alors de $4^{n+1} + 1 = (4^n + 1) + 3 \times 4^n$ on tire que 3 divise $4^{n+1} + 1$. Les deux propositions sont vraies.
- 2) Il suffit de vérifier que 3 divise $4^0 - 1 = 0$, ce qui est vrai ; avec 1), on déduit $(\forall n \in \mathbb{N}), 3 \text{ divise } 4^n - 1$.
- 3) Puisque $4^{n+1} + 1 = (4^n + 1) + 3 \times 4^n$ et que 3 divise 3×4^n : 3 ne divise pas $4^n + 1 \Leftrightarrow 3 \text{ ne divise pas } 4^{n+1} + 1$. Comme 3 ne divise pas $4^0 + 1 = 2$, il vient (par récurrence) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 ne divise pas $4^n + 1$. La proposition $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow Q(n)$ est donc fausse.

Exercice n° 238

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = 25^n + 2^{3n+4}$.

- 1) Déterminer deux entiers a et b tels que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$.
- 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n$ est divisible par 17.

Correction

- 1) On a $u_{n+2} = 625 \times 25^n + 64 \times 2^{3n+4}$. Pour $x, y \in \mathbb{Z} : x u_{n+1} + y u_n = (25x + y)25^n + (8x + y)2^{3n+4}$. Il suffit donc que
$$\begin{cases} 25a + b = 625 \\ 8a + b = 64 \end{cases}, \text{ d'où } a = 33 \text{ et } b = -200 : (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = 33u_{n+1} - 200u_n.$$
- 2) $u_0 = 1 + 16 = 17$ et $u_1 = 25 + 128 = 153 = 9 \times 17$ sont divisibles par 17. Supposons que u_k est divisible par 17 pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, avec $n \geq 1$. Comme $u_{n+1} = 33u_n - 200u_{n-1}$ et que 17 divise u_n et u_{n-1} , 17 divise u_{n+1} .
Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n$ est divisible par 17.

Exercice n° 239

Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $a_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Correction

Pour $n = 0$: $a_0 = 3 + 4 = 7$, divisible par 7. Supposons $a_n = 7k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$a_{n+1} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 7 \times 3^{2n+1} + 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) = 7(3^{2n+1} + 2k).$$

Donc a_{n+1} est divisible par 7 ; par récurrence, a_n est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 240

Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $n^3 - n$ est divisible par 6.

Correction

Pour $n = 0$: $0^3 - 0 = 0$, divisible par 6. Supposons $n^3 - n = 6k$. Alors $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n+1)$.

Le produit de deux entiers consécutifs est pair : $n(n+1) = 2k'$. Donc $(n+1)^3 - (n+1) = 6k + 6k' = 6(k+k')$.

Par récurrence, $n^3 - n$ est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 241

1) On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique entier naturel p tel que $n = 3p$ ou $n = 3p + 1$ ou $n = 3p + 2$. En déduire que le nombre $n(n^2 + 5)$ est un multiple de 3 pour tout n de $\mathbb{N}$.

2) Montrer par récurrence que $n(n^2 + 5)$ est un multiple de 3 pour tout n de $\mathbb{N}$.

Correction

1) Posons $N = n(n^2 + 5)$ et raisonnons par disjonction des cas.

- $n = 3p$: $N = 3p(9p^2 + 5) = 3k$ avec $k = p(9p^2 + 5) \in \mathbb{N}$.
- $n = 3p + 1$: $N = (3p+1)(9p^2 + 6p + 6) = 3(3p+1)(3p^2 + 2p + 2) = 3k'$.
- $n = 3p + 2$: $N = (3p+2)(9p^2 + 12p + 9) = 3(3p+2)(3p^2 + 4p + 3) = 3k''$.

Dans tous les cas, N est un multiple de 3.

2) *Initialisation* : $0(0^2 + 5) = 0 = 3 \times 0$.

Hérédité : supposons $n(n^2 + 5) = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $(n+1)((n+1)^2 + 5) = (n+1)(n^2 + 2n + 6) = n(n^2 + 5) + 3n^2 + 3n + 6 = 3(k + n^2 + n + 2)$, multiple de 3.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n^2 + 5)$ est un multiple de 3.

Exercice n° 242

1) a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $2^{3n+2} - 4$ est divisible par 7.

2) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $3^{2n+1} + 4^{n+1} - 2(-1)^n$ est divisible par 5.

3) Soit x un réel positif. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Correction

1) a) *Initialisation* : $2^0 - 1 = 0 = 7 \times 0$. *Hérédité* : si $2^{3n} - 1 = 7k$, alors $2^{3(n+1)} - 1 = 8 \times 2^{3n} - 1 = 8(7k+1) - 1 = 7(8k+1)$. Donc 7 divise $2^{3n} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $2^{3n+2} - 4 = 4(2^{3n} - 1) = 7(4k)$: divisible par 7.

2) *Initialisation* : $3^1 + 4^1 - 2(-1)^0 = 5$.

Hérédité : supposons $3^{2n+1} + 4^{n+1} - 2(-1)^n = 5k$, soit $3^{2n+1} = 5k - 4^{n+1} + 2(-1)^n$. Alors $3^{2n+3} + 4^{n+2} - 2(-1)^{n+1} = 9 \times 3^{2n+1} + 4 \times 4^{n+1} + 2(-1)^n = 45k - 5 \times 4^{n+1} + 20(-1)^n = 5[9k - 4^{n+1} + 4(-1)^n]$. Donc le nombre est divisible par 5 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) *Initialisation* : $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \times x$.

Hérédité : si $(1+x)^n \geq 1 + nx$, comme $1+x > 0$: $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq$

$$1 + (n+1)x, \text{ car } nx^2 \geq 0.$$

$$\text{Conclusion : } (\forall n \in \mathbb{N}) (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Série 4 Fonctions et suites définies par récurrence

Exercice n° 243

Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(0) = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = 2f(n) + 5$.

- 1) Déterminer $f(1)$ et $f(2)$.
- 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(n) = 2^{n+3} - 5$.

Correction

- 1) $f(1) = 2f(0) + 5 = 2 \times 3 + 5 = 11$ et $f(2) = 2f(1) + 5 = 2 \times 11 + 5 = 27$.
- 2) Pour $n = 0$: $f(0) = 3$ et $2^{0+3} - 5 = 3$. Supposons $f(n) = 2^{n+3} - 5$; alors $f(n+1) = 2f(n) + 5 = 2(2^{n+3} - 5) + 5 = 2^{n+4} - 5 = 2^{(n+1)+3} - 5$.
D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) f(n) = 2^{n+3} - 5$.

Exercice n° 244

Soit f la fonction numérique définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 2$ et $f(n+1) = 5f(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 1) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
- 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(n) = 2 \times 5^n$.

Correction

- 1) $f(1) = 5f(0) = 10$ et $f(2) = 5f(1) = 50$.
- 2) Pour $n = 0$: $f(0) = 2 = 2 \times 5^0$. Si $f(n) = 2 \times 5^n$, alors $f(n+1) = 5f(n) = 2 \times 5^{n+1}$. Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) f(n) = 2 \times 5^n$.

Exercice n° 245

Soit g la fonction numérique définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(0) = -3$ et $g(n+1) = g(n) + \frac{5}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 1) Calculer $g(1)$ et $g(2)$.
- 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad g(n) = -3 + \frac{5}{2}n$.

Correction

- 1) $g(1) = g(0) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$ et $g(2) = g(1) + \frac{5}{2} = 2$.
- 2) Pour $n = 0$: $g(0) = -3$. Si $g(n) = -3 + \frac{5}{2}n$, alors $g(n+1) = -3 + \frac{5}{2}n + \frac{5}{2} = -3 + \frac{5}{2}(n+1)$. Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) g(n) = -3 + \frac{5}{2}n$.

Exercice n° 246

On veut déterminer toutes les fonctions numériques f vérifiant :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1 \quad \text{et} \quad f(1) = a.$$

- 1) Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$.
- 2) En déduire $f(n)$ en fonction de n , où $n \in \mathbb{N}$.

Correction

- 1) Pour $x = y = 0$: $f(0) = 2f(0) - 1$, donc $f(0) = 1$. Pour $x = y = 1$: $f(2) = 2f(1) + 1 = 2a + 1$. Pour $x = 2, y = 1$: $f(3) = f(2) + f(1) + 3 = 3a + 4$.
- 2) On conjecture que $f(n) = na + (n - 1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; démontrons-le par récurrence. Pour $n = 0$: $f(0) = 0 + 1 = 1$. Si $f(n) = na + (n - 1)^2$, alors $f(n + 1) = f(n) + f(1) + 2n - 1 = na + (n - 1)^2 + a + 2n - 1 = (n + 1)a + n^2$.
Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) f(n) = na + (n - 1)^2$.

Exercice n° 247

Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que si f est strictement croissante, alors $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(n) \geq n$.

Correction

On a $f(0) \geq 0$ car $f(0) \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \geq n$; puisque f est strictement croissante, $f(n + 1) > f(n) \geq n$, et comme $f(n + 1) \in \mathbb{N}$, on obtient $f(n + 1) \geq n + 1$.
Par récurrence : si f est strictement croissante, alors $(\forall n \in \mathbb{N}) f(n) \geq n$.

Exercice n° 248

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que :

$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \\ a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n \end{cases}$$

Correction

Le résultat est vrai pour $n = 0$: il suffit de prendre $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

Supposons le résultat vrai au rang n . Alors $(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) = (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}$; il suffit de prendre $a_{n+1} = a_n + 2b_n \in \mathbb{N}$ et $b_{n+1} = a_n + b_n \in \mathbb{N}$. De plus

$$a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (a_n + 2b_n)^2 - 2(a_n + b_n)^2 = -(a_n^2 - 2b_n^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE III

Problèmes de synthèse

Exercices mobilisant plusieurs types de raisonnement et problèmes longs.

8

CHAPITRE

Choisir le raisonnement adapté – Problèmes

Notions travaillées

- Choisir et combiner les différents types de raisonnement
- Principe des tiroirs (boules et urnes)
- Équations fonctionnelles ; partie entière d'un réel
- Rédaction d'une démonstration longue

Dans ce chapitre

Série 1 – Choisir le type de raisonnement convenable	119
Série 2 – Problèmes	123

Série 1 Choisir le type de raisonnement convenable

Exercice n° 249

Montrer que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (a, b) \in (]0; 1[)^2 \quad a + p = b + q \Rightarrow a = b \text{ et } p = q.$$

[À VÉRIFIER DANS LE PDF SOURCE]

L'énoncé source est mal imprimé (« $a + P + b + q \Rightarrow$ et $P = q$ ») ; la version retenue est celle de la correction du document source.

Correction

$a + p = b + q \Rightarrow a - b = q - p$. Or $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, d'où $-1 < a - b < 1$, donc $-1 < q - p < 1$. Comme $p, q \in \mathbb{Z}$, $q - p = 0$, c'est-à-dire $q = p$, et par suite $a = b$.

Exercice n° 250

1) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$: $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$.

2) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments de $[0; 1]$. On pose

$$A_n = x_1 x_2 \cdots x_n \quad \text{et} \quad B_n = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n).$$

a) Montrer que $0 \leq A_n B_n \leq \frac{1}{4^n}$.

b) Montrer que $A_n \leq \frac{1}{2^n}$ ou $B_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Correction

1) Pour $x \in [0; 1]$: $x - x^2 = x(1 - x) \geq 0$ car $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$ (1). Et $\frac{1}{4} - (x - x^2) = \frac{1 - 4x + 4x^2}{4} = \frac{(2x - 1)^2}{4} \geq 0$ (2). Donc $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$.

2) a) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $0 \leq x_i \leq 1$, donc d'après 1) : $0 \leq x_i(1 - x_i) \leq \frac{1}{4}$. Or $A_n B_n = x_1(1 - x_1) x_2(1 - x_2) \cdots x_n(1 - x_n)$. En multipliant membre à membre ces n inégalités (à termes positifs) : $0 \leq A_n B_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$.

b) Supposons que $A_n > \frac{1}{2^n}$ et $B_n > \frac{1}{2^n}$. Alors $A_n B_n > \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4^n}$, ce qui contredit a). Donc $A_n \leq \frac{1}{2^n}$ ou $B_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Exercice n° 251

On choisit de manière aléatoire 6 entiers relatifs. Montrer qu'il existe au moins deux de ces nombres dont la différence est divisible par 5.

Correction

D'après la division euclidienne par 5, il y a 5 restes possibles : 0, 1, 2, 3, 4. Puisqu'on a 6 nombres et $6 > 5$, il existe au moins deux nombres ayant le même reste ; par conséquent, leur différence est un multiple de 5.

Exercice n° 252

On choisit 12 entiers relatifs deux à deux distincts, compris entre 1 et 99. Montrer qu'il existe au moins deux de ces nombres dont la différence s'écrit sous la forme 11 ou 22 ou 33 ... ou 88 ou 99.

Correction

La différence de deux de ces nombres est un élément de $\llbracket -99; 99 \rrbracket \setminus \{0\}$, et 11, 22, ..., 99 sont les multiples de 11 dans $\llbracket 1; 99 \rrbracket$. La division euclidienne par 11 donne 11 restes possibles ; puisqu'on a 12 nombres, il en existe au moins deux ayant le même reste, et leur différence est un multiple non nul de 11. Quitte à multiplier par -1 (une différence peut être négative), on obtient le résultat demandé.

Exercice n° 253

Soient n un entier naturel non nul et $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

- 1) Montrer que si P admet une racine entière relative q , alors q divise a_0 .
- 2) Quelles sont les racines entières relatives possibles du polynôme $6 + x - 3x^3 + x^4$?
- 3) Montrer que le polynôme $3 - x - x^2 - x^3 - x^4$ n'admet pas de racine entière relative.

Correction

- 1) Si P admet une racine entière q , alors $a_1q + a_2q^2 + \dots + a_nq^n = -a_0$, soit $q(a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}) = -a_0$: q divise a_0 .
- 2) D'après 1), les racines entières possibles de $6 + x - 3x^3 + x^4$ sont les diviseurs de 6 : $\{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$. Par substitution, on trouve que 2 est la seule racine entière ($6 + 2 - 24 + 16 = 0$).
- 3) Si $3 - x - x^2 - x^3 - x^4$ admet une racine entière, elle appartient à $\{-3; -1; 1; 3\}$. Par substitution, $-3, -1, 1$ et 3 ne sont pas racines ; d'où le résultat.

Exercice n° 254

Soit f un polynôme du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b et c des réels, $a \neq 0$). Montrer que si l'équation $f(x) = x$ est impossible dans $\mathbb{R}$, alors l'équation $f(f(x)) = x$ l'est également.

Correction

Supposons que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$; alors le discriminant de $f(x) - x = 0$ est strictement négatif, et $f(x) - x$ a le signe de a pour tout x .

- Si $a > 0$: ($\forall x \in \mathbb{R}$) $f(x) > x$; en particulier, appliqué à $f(x)$: $f(f(x)) > f(x) > x$. Ainsi $f(f(x)) = x$ n'a pas de solution.
- Si $a < 0$: ($\forall x \in \mathbb{R}$) $f(x) < x$, d'où $f(f(x)) < f(x) < x$: l'équation $f(f(x)) = x$ n'a pas de solution.

Exercice n° 255

Soit $r = \frac{a}{b}$ un nombre rationnel, où a et b sont des entiers naturels premiers entre eux.

- 1) Montrer que si les seuls diviseurs premiers possibles de b sont 2 et 5, alors r est un nombre décimal.
- 2) Montrer que si b admet un diviseur premier différent de 2 et de 5, alors r n'est pas un nombre décimal.

Correction

- 1) Si les seuls diviseurs premiers possibles de b sont 2 et 5, alors $b = 2^k 5^l$ avec $k, l \in \mathbb{N}$. En posant $m = \max(k, l)$, on obtient $10^m r = a 2^{m-k} 5^{m-l} \in \mathbb{N}$, et par suite r est décimal.

- 2) Raisonnons par contraposée : supposons que r est décimal. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $10^m r = \frac{10^m a}{b} \in \mathbb{N}$; comme a et b sont premiers entre eux, $\frac{10^m}{b} \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que b divise 10^m . Les diviseurs premiers de 10^m étant 2 et 5 (la divisibilité est transitive), les seuls diviseurs premiers possibles de b sont 2 et 5. D'où le résultat.

Exercice n° 256

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $E = \{1; 2; 3\}$ à valeurs dans lui-même, telle que

$$f(2) > f(f(1)) \quad \text{et} \quad f(3) > f(f(2)).$$

- 1) Établir que $f(2) \neq 3$ et $f(1) \neq 2$.
- 2) Montrer que si $f(1) = 3$, alors $f(2) = 3$.
- 3) Déterminer explicitement la fonction f .

Correction

- 1) Si $f(2) = 3$, alors de $f(3) > f(f(2))$ on déduit $f(3) > f(3)$: absurde, d'où $f(2) \neq 3$.
Si $f(1) = 2$, alors de $f(2) > f(f(1))$ on obtient $f(2) > f(2)$: absurde, d'où $f(1) \neq 2$.
- 2) Supposons $f(1) = 3$: de $f(2) > f(f(1))$ on déduit $f(2) > f(3)$, et de $f(3) > f(f(2))$ on déduit $f(2) > f(3) > f(f(2)) \geq 1$. Comme f prend ses valeurs dans $\{1; 2; 3\}$: $f(2) = 3$ (et $f(3) = 2$).
- 3) D'après 1) et 2), $f(1) \neq 2$ et $f(1) \neq 3$ (sinon $f(2) = 3$, ce qui contredit 1)). Donc $f(1) = 1$, et par suite $f(2) > f(f(1)) = f(1) = 1$; donc $f(2) = 2$ car $f(2) \neq 3$. Puisque $f(3) > f(f(2)) = f(2) = 2$, il vient $f(3) = 3$.
Conclusion : f est définie sur E par $f(1) = 1, f(2) = 2$ et $f(3) = 3$.

Exercice n° 257

Soient $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ cent entiers naturels tels que :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = x_1 x_2 \dots x_{100}.$$

- 1) Montrer qu'au moins 93 de ces nombres sont égaux à 1.
- 2) En déduire les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ sachant que 98 d'entre eux sont égaux à 1.

Correction

On peut supposer $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{100}$. Les 100 nombres ne peuvent pas être tous égaux à 1 (on aurait $100 = 1$).

- 1) Soit k le nombre de ceux qui sont supérieurs ou égaux à 2. On a $x_1 \geq x_i$ pour tout i , donc $100x_1 \geq x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = x_1 x_2 \dots x_{100}$, d'où $100 \geq x_2 x_3 \dots x_{100}$. Parmi $x_2, \dots, x_{100}$, il y a $k - 1$ nombres supérieurs ou égaux à 2, donc $100 \geq 2^{k-1}$, d'où $k \leq 7$. Au moins 93 de ces nombres sont donc égaux à 1.
- 2) Si 98 d'entre eux sont égaux à 1, notons $x \leq y$ les deux autres. On a $x + y + 98 = xy$, soit $(x - 1)(y - 1) = 99$, d'où $\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 1 = 99 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - 1 = 3 \\ y - 1 = 33 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - 1 = 9 \\ y - 1 = 11 \end{cases}$, c'est-à-dire $(x, y) \in \{(2; 100); (4; 34); (10; 12)\}$ (à l'ordre près).

Note : le raisonnement suppose les nombres non nuls (si l'un est nul, le produit est nul et tous les nombres sont nuls).

Série 2 Problèmes

Exercice n° 258

Problème – Principe des tiroirs

- 1) Montrer que si l'on distribue $n + 1$ boules dans n urnes, avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe au moins une urne contenant au moins deux boules.
- 2) Soient $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ des réels de l'intervalle $[0; 20[$ tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_{25}$. On veut démontrer le résultat suivant : il existe au moins un élément i de $\llbracket 1; 25 \rrbracket$ tel que la distance entre x_i et x_{i+1} est strictement inférieure à 1.
 - a) Quantifier le résultat précédent.
 - b) Nier la proposition obtenue à la question précédente.
 - c) En utilisant le raisonnement par l'absurde, établir le résultat.
 - d) En utilisant la question 1, retrouver le résultat (on pourra considérer les intervalles $[k; k + 1[$, avec $k = 0, 1, 2, \dots, 19$, comme des urnes).

Correction

- 1) Raisonnons par l'absurde : si chaque urne contenait au plus une boule, le nombre de boules serait inférieur ou égal à n , ce qui contredit le fait qu'il y a $n + 1$ boules.
- 2) a) $(\exists i \in \llbracket 1; 25 \rrbracket) \quad x_{i+1} - x_i < 1$.
 b) $(\forall i \in \llbracket 1; 25 \rrbracket) \quad x_{i+1} - x_i \geq 1$.
 c) Supposons $(\forall i) \quad x_{i+1} - x_i \geq 1$. Alors $x_{25} - x_1 = \sum_{i=1}^{24} (x_{i+1} - x_i) \geq 24$, alors que $x_{25} - x_1 < 20$ (car $x_1, x_{25} \in [0; 20[$) : contradiction.
 d) Pour tout i , il existe un unique $k \in \llbracket 0; 19 \rrbracket$ tel que $x_i \in [k; k + 1[$. En considérant les 25 nombres x_i comme des boules et les 20 intervalles $[k; k + 1[$ comme des urnes, la question 1) donne un intervalle $[k; k + 1[$ contenant deux nombres x_i et x_j avec $i < j$. Alors $x_i < x_{i+1} \leq x_j$, d'où $x_{i+1} - x_i < 1$.

Exercice n° 259

Le but de ce problème est de déterminer trois entiers naturels non nuls a, b et c vérifiant

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $a \leq b \leq c$.

- 1) Montrer que $1 \leq \frac{3}{a}$.
- 2) En déduire que $a \in \{1; 2; 3\}$.
- 3) Étudier le cas $a = 1$.
- 4) On suppose que $a = 2$. Montrer que $b \in \{2; 3; 4\}$, puis étudier séparément tous les cas possibles.
- 5) On suppose que $a = 3$. Déterminer les valeurs de b et de c .
- 6) Déterminer toutes les solutions possibles.

Correction

- 1) De $1 \leq a \leq b \leq c$, on tire $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \leq 1$, d'où $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{a}$.
- 2) De $1 \leq \frac{3}{a}$ on tire $a \leq 3$, donc $a \in \{1; 2; 3\}$.
- 3) Si $a = 1$, l'égalité devient $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$: absurde car $b, c \in \mathbb{N}^*$. Donc $a \neq 1$.
- 4) Si $a = 2$: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{b}$, donc $b \leq 4$; comme $2 = a \leq b$: $b \in \{2; 3; 4\}$.
 - $b = 2$: $\frac{1}{c} = 0$, contradiction ;
 - $b = 3$: $\frac{1}{c} = \frac{1}{6}$, donc $c = 6$;
 - $b = 4$: $\frac{1}{c} = \frac{1}{4}$, donc $c = 4$.
- 5) Si $a = 3$: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3} \leq \frac{2}{b}$, donc $b \leq 3$, et comme $3 \leq b$: $b = 3$, d'où $c = 3$.
- 6) Les solutions avec $a \leq b \leq c$ sont $(2; 3; 6)$, $(2; 4; 4)$ et $(3; 3; 3)$; les autres solutions s'obtiennent par permutation.

Exercice n° 260

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad f(n) + f(m) = f(n + m) - nm - 1.$$

- 1) Montrer que $f(0) = -1$ et $f(-1) = -2$.
- 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad f(n) + f(-n) = n^2 - 2$.
- 3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad f(n + 1) - f(n) = n + 2$.
- 4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(1 + n)}{2}$.
- 5) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) \quad f(n) = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$.
- 6) En déduire la forme explicite de $f(n)$ lorsque $n \in \mathbb{Z}_-$.
- 7) Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad f(n) + f(m) = f(n + m) - nm - 1.$$

Correction

- 1) Pour $n = m = 0$: $f(0) + f(0) = f(0) - 0 - 1$, d'où $f(0) = -1$. Pour $n = 1$ et $m = -1$: $f(1) + f(-1) = f(0) + 1 - 1$, d'où $f(-1) = -2$.
- 2) Pour $m = -n$: $f(n) + f(-n) = f(0) + n^2 - 1$, et comme $f(0) = -1$: $f(n) + f(-n) = n^2 - 2$.
- 3) Pour $m = 1$: $f(n) + f(1) = f(n + 1) - n - 1$, et puisque $f(1) = 1$: $f(n + 1) - f(n) = n + 2$.
- 4) Par récurrence : vraie pour $n = 0$; si $0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, alors $0 + 1 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
- 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 3), en sommant membre à membre pour k de 0 à $n - 1$: $\sum_{k=0}^{n-1} (f(k + 1) - f(k)) = \sum_{k=0}^{n-1} (k + 2) = \sum_{k=2}^{n+1} k$. D'une part le premier membre vaut $f(n) - f(0) = f(n) + 1$; d'autre part, d'après 4), $\sum_{k=2}^{n+1} k = -1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. D'où $f(n) = -2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$; c'est aussi vrai pour $n = 0$.
- 6) Si $n \in \mathbb{Z}_-$, alors $-n \in \mathbb{Z}_+$; d'après 2) et 5) : $f(n) = n^2 - 2 - f(-n) = n^2 - 2 - \frac{n^2 - 3n - 2}{2} = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$.
- 7) D'après ce qui précède, si f vérifie la condition, alors $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad f(n) = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$. Réciproquement, un calcul direct montre que cette fonction (à valeurs entières, car $n^2 + 3n = n(n + 3)$ est pair) vérifie la relation. Il existe donc une seule fonction : $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad f(n) = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$.

Exercice n° 261

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe aucune fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans lui-même vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad f(n+1) = f(n) + f(f(n)) \quad (I)$$

Pour arriver à ce résultat, on utilisera le raisonnement par l'absurde. On suppose donc que le problème (I) admet une solution notée f .

- 1) Montrer que f est strictement croissante.
- 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad f(n) \leq n$.
- 3) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad f(n) = n$.
- 4) Conclure.

Correction

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad f(n+1) = f(n) + f(f(n)) > f(n)$, car $f(f(n)) \in \mathbb{N}^*$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.
- 2) Par l'absurde : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(n) > n$; alors $f(n) \geq n+1$ et, f étant croissante, $f(f(n)) \geq f(n+1)$. Par conséquent $f(n+1) = f(n) + f(f(n)) \geq f(n) + f(n+1) > f(n+1)$: absurde. Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad f(n) \leq n$.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $f(1) < f(2) < \dots < f(n) \leq n$, donc $\{f(1); \dots; f(n)\} \subset \{1; \dots; n\}$; les deux ensembles ayant le même nombre n d'éléments, ils sont égaux et $f(n) = n$.
- 4) D'après ce qui précède, une solution de (I) serait l'identité de $\mathbb{N}^*$. Mais alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n+1 = n + f(n) = 2n$, c'est-à-dire $n = 1$ pour tout n : absurde. Il n'existe donc aucune fonction vérifiant (I).

Remarque : Pour la question 3, on peut aussi raisonner par récurrence : $f(1) \leq 1$ et $f(1) \in \mathbb{N}^*$, donc $f(1) = 1$; si $f(n) = n$, alors $n = f(n) < f(n+1) \leq n+1$, donc $f(n+1) = n+1$.

Exercice n° 262

On veut déterminer toutes les fonctions f définies sur l'ensemble $\mathbb{N}$ à valeurs dans lui-même telles que :

$$(R) : \begin{cases} f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{N} \\ f(4) = 4 \\ (\forall n, m \in \mathbb{N}) : f(nm) = f(n)f(m) \end{cases}$$

A) On suppose qu'il existe une fonction f vérifiant les conditions précédentes.

- a) Déterminer $f(2)$, puis $f(3)$, $f(0)$ et $f(1)$.
- b) Déterminer $f(6)$, puis $f(5)$, $f(8)$ et $f(7)$.
- c) Conjecturer la forme explicite de la fonction f .
- d) Montrer par récurrence la conjecture précédente.

B) Montrer qu'il existe une seule fonction f vérifiant les conditions demandées (il faut déterminer cette fonction).

Correction

A) 1) $4 = f(4) = f(2 \times 2) = f(2)^2$, et comme $f(2) \in \mathbb{N} : f(2) = 2$. Puisque f est strictement croissante, $2 = f(2) < f(3) < f(4) = 4$, donc $f(3) = 3$. De même $0 \leq f(0) < f(1) < f(2) = 2$ donne $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

2) $f(6) = f(2)f(3) = 6$, et $4 = f(4) < f(5) < f(6) = 6$ donne $f(5) = 5$. De même $f(8) = f(4)f(2) = 8$ et $f(7) = 7$.

3) Conjecture : $(\forall n \in \mathbb{N}) f(n) = n$.

4) On a $f(k) = k$ pour tout $k \in \llbracket 0; 8 \rrbracket$. Supposons $f(k) = k$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, avec $n \geq 8$.

- Si $n + 1$ est pair : 2 et $\frac{n+1}{2}$ sont inférieurs à n , donc $f(n+1) = f(2) \times f\left(\frac{n+1}{2}\right) = 2 \times \frac{n+1}{2} = n+1$.
- Si $n + 1$ est impair : $n + 2$ est pair et $\frac{n+2}{2} \leq n$, donc $f(n+2) = 2 \times \frac{n+2}{2} = n+2$; puisque $n = f(n) < f(n+1) < f(n+2) = n+2$ et $f(n+1) \in \mathbb{N} : f(n+1) = n+1$.

Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) f(n) = n$.

B) D'après A), si une fonction vérifie les conditions, c'est nécessairement l'identité de $\mathbb{N}$. Inversement, l'identité vérifie clairement (R). Il existe donc une seule fonction : $f(n) = n$.

Exercice n° 263

Le but de ce problème est de montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, le nombre

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'appartient pas à $\mathbb{N}$.

- 1) Vérifier que les nombres S_4 , S_6 et S_9 n'appartiennent pas à $\mathbb{N}$.
- 2) a) Montrer que tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2^k(2l+1)$, où k et l sont des entiers naturels.
 b) Soient n un élément de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et p le plus grand des entiers k tels que $2^k(2l+1) \leq n$ (ces entiers k sont en nombre fini ; on les range dans l'ordre croissant). Montrer que 2^p est le seul entier inférieur ou égal à n qui s'écrit sous la forme $2^p(2l+1)$.
- 3) En utilisant la question 2, montrer que $\forall n \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) : S_n \notin \mathbb{N}$.

Correction

- 1) $S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4 \times 3 + 2 \times 3 + 4 + 1 \cdot 3}{4 \times 3}$: avec le dénominateur commun 4×3 (pair), le numérateur est impair, donc $S_4 \notin \mathbb{N}$.
 Pour S_6 , le dénominateur commun est $4 \times 3 \times 5$; le terme $\frac{1}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 3 \times 5}$ a un numérateur impair, tous les autres ont un numérateur pair : S_6 a un numérateur impair et un dénominateur pair, donc $S_6 \notin \mathbb{N}$. De la même manière, $S_9 \notin \mathbb{N}$.
- 2) a) *Existence.* Si n est impair, $k = 0$ convient. Si n est pair, on écrit $n = 2n_1$; si n_1 est impair c'est fini, sinon $n_1 = 2n_2$, etc. Ce procédé s'arrête : sinon on aurait $n \geq 2^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, en particulier $n \geq 2^n \geq 1 + n$ (Bernoulli), absurde. On obtient $n = 2^k n_k$ avec n_k impair.
Unicité. Si $n = 2^k(2l+1) = 2^{k'}(2l'+1)$ avec $k > k'$, alors $2^{k-k'}(2l+1) = 2l'+1$: absurde (pair = impair). De même si $k < k'$. Donc $k = k'$ et $l = l'$.
 b) On a $2^p \leq n$. S'il existait un entier non nul l tel que $2^p(2l+1) \leq n$, alors $2^{p+1} \leq n$ (car $2l+1 \geq 2$), et par définition de p : $p+1 \leq p$, absurde. D'où le résultat.
- 3) On prend comme dénominateur commun des termes de S_n le plus petit commun multiple des dénominateurs ; d'après 2), il est de la forme $2^p(2l+1)$, donc pair. Le terme $\frac{1}{2^p} = \frac{2l+1}{2^p(2l+1)}$ a un numérateur impair, tandis que chacun des autres termes a un numérateur pair. Ainsi S_n a un numérateur impair et un dénominateur pair : $S_n \notin \mathbb{N}$.

Exercice n° 264

Équation fonctionnelle

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} (1) : (\exists a \in \mathbb{R}_+^*) : f(1) = a - 1 \\ (2) : \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : f(x+y) + x + y = (f(x) + x)(f(y) + y) \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) + x \geq 0$ (remarquer que $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$).
- b) En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) + x > 0$.
- c) Montrer que $f(0) = 1$.
- 2) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(-x) - x = \frac{1}{f(x) + x}$.
- b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}) : f(nx) + nx = [f(x) + x]^n$.
- c) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{Z}) : f(x) = a^x - x$.

Correction

- 1) a) Dans (2), prenons x et y égaux à $\frac{x}{2} : f(x) + x = (f(\frac{x}{2}) + \frac{x}{2})^2 \geq 0$.
- b) Par l'absurde, supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) + x_0 = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, (2) avec x_0 et $x - x_0$ donne $f(x) + x = (f(x_0) + x_0)(f(x - x_0) + x - x_0) = 0$. En particulier $f(1) + 1 = 0$, soit $a = 0$: contradiction avec $a > 0$. Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) + x > 0$.
- c) (2) avec $x = y = 0 : f(0) = f(0)^2$, soit $f(0)(1 - f(0)) = 0$. Or $f(0) = f(0) + 0 > 0$, donc $f(0) = 1$.
- 2) a) (2) avec $y = -x : f(0) + 0 = (f(-x) - x)(f(x) + x)$, soit $1 = (f(-x) - x)(f(x) + x)$; comme $f(x) + x > 0 : f(-x) - x = \frac{1}{f(x) + x}$.
- b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence : $f(0) + 0 = 1 = (f(x) + x)^0$; si $f(nx) + nx = (f(x) + x)^n$, alors, d'après (2), $f((n+1)x) + (n+1)x = (f(nx) + nx)(f(x) + x) = (f(x) + x)^{n+1}$.
Pour $n \leq 0$: d'après a) appliqué à $-nx$, $f(nx) + nx = \frac{1}{f(-nx) - nx}$; comme $-n \in \mathbb{N}$, $f(-nx) + (-nx) = (f(x) + x)^{-n}$, donc $f(nx) + nx = \frac{1}{(f(x) + x)^{-n}} = (f(x) + x)^n$.
- c) Avec $x = 1 : (\forall n \in \mathbb{Z}) f(n) + n = (f(1) + 1)^n = a^n$. Donc $(\forall x \in \mathbb{Z}) f(x) = a^x - x$.

Exercice n° 265

Partie entière d'un réel

Pour tout réel x , il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. Ce nombre n est appelé *partie entière* du réel x et noté $E(x)$. On a ainsi :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Exemples : $E(\sqrt{2}) = 1$ car $1 < \sqrt{2} < 2$; $E(-1,3) = -2$ car $-2 < -1,3 < -1$. Remarque : $(\forall x \in \mathbb{Z}) : E(x) = x$.

- 1) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : E(\sqrt{n^2 + 1}) = n$.
- b) Déterminer $E(\sqrt{n^2 + 4n})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : x - 1 < E(x) \leq x$.
- b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists r \in [0; 1[) : x = E(x) + r$.
- 3) a) Montrer que $\forall (n; p) \in \mathbb{Z}^2 : n + 1 > p \Leftrightarrow n \geq p$.
- b) Montrer que $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$.

4) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall p \in \mathbb{Z}) \quad (1) \quad E(x + p) = E(x) + p$.

b) Montrer que :

$$(2) \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : E(x + y) \geq E(x) + E(y)$$

$$(3) \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$$

5) Montrer que (4) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}) : E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

6) a) Montrer que (5) $(\forall x \in \mathbb{R}) : E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$.

b) Déterminer la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n E\left(\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right)$ en fonction de n et de x .

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$(1) \quad E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2 \quad (2) \quad E(2x) = x - 1 \quad (3) \quad E\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \quad (4) \quad E(x) + |x - 1| = x$$

Correction

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}^* : n^2 < n^2 + 1 < n^2 + 2n + 1$, donc $n < \sqrt{n^2 + 1} < n + 1$ et $E(\sqrt{n^2 + 1}) = n$.

b) Pour $n \geq 1, 4n > 2n + 1$, donc $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 4n < n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$; ainsi $n + 1 < \sqrt{n^2 + 4n} < n + 2$ et $E(\sqrt{n^2 + 4n}) = n + 1$.

2) a) De $E(x) \leq x < E(x) + 1$ on tire $E(x) \leq x$ et $x - 1 < E(x)$.

b) Posons $r = x - E(x) : 0 \leq r < 1$ et $x = E(x) + r$.

3) a) $n + 1 > p \Leftrightarrow n - p > -1 \Leftrightarrow n - p \geq 0$ (car $n - p \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow n \geq p$.

b) Si $x < y : E(x) \leq x < y < E(y) + 1$, donc $E(x) < E(y) + 1$ et, d'après a), $E(x) \leq E(y)$.

4) a) $E(x) \leq x < E(x) + 1$ donne $E(x) + p \leq x + p < (E(x) + p) + 1$; comme $E(x) + p \in \mathbb{Z}$, $E(x + p) = E(x) + p$.

b) (2) $E(x) + E(y) \leq x + y < E(x + y) + 1$, donc $E(x) + E(y) < E(x + y) + 1$ et, d'après 3.a), $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.

(3) $E(x + y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2$, donc $E(x + y) < (E(x) + E(y) + 1) + 1$ et, d'après 3.a), $E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.

5) On utilise : si $m \in \mathbb{Z}$ et $m \leq y$, alors $m \leq E(y)$ (car $m \leq y < E(y) + 1$ et 3.a).

$$E(x) \leq x \Rightarrow nE(x) \leq nx \Rightarrow nE(x) \leq E(nx) \Rightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} \Rightarrow E(x) \leq E\left(\frac{E(nx)}{n}\right).$$

D'autre part $E(nx) \leq nx$, donc $\frac{E(nx)}{n} \leq x$, et par croissance de $E : E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq E(x)$. D'où (4).

6) a) Écrivons $x = E(x) + r$ avec $r \in [0; 1[$. Alors $E(2x) = 2E(x) + E(2r)$ et $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2E(x) + E\left(r + \frac{1}{2}\right)$, d'après (1).

• Si $0 \leq r < \frac{1}{2} : 0 \leq 2r < 1$ et $\frac{1}{2} \leq r + \frac{1}{2} < 1$, donc $E(2r) = E\left(r + \frac{1}{2}\right) = 0$.

• Si $\frac{1}{2} \leq r < 1 : 1 \leq 2r < 2$ et $1 \leq r + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$, donc $E(2r) = E\left(r + \frac{1}{2}\right) = 1$.

Dans les deux cas, $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$.

b) D'après (5) appliqué à $\frac{x}{2^{k+1}} : E\left(\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right) = E\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right) = E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) + E\left(\frac{1}{2}\right)$. La somme est

télescopique (exercice sur le symbole Σ) : $\sum_{k=0}^n E\left(\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right) = E(x) + E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.

7)

$$(1) E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{x-1}{2} < -1 \Leftrightarrow -4 \leq x-1 < -2 \Leftrightarrow -3 \leq x < -1 : S = [-3; -1[.$$

Note : le document source imprime $S = [-3; 1[$; le calcul donne $[-3; -1[$.

$$(2) E(2x) = x - 1 \Leftrightarrow (x - 1 \leq 2x < x \text{ et } x - 1 \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (-1 \leq x < 0 \text{ et } x \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -1 : S = \{-1\}.$$

$$(3) \text{ Pour } x \neq 0 : E\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \Leftrightarrow 3 \leq \frac{1}{x} < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3} : S = \left]\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right].$$

$$(4) \text{ Si } x \geq 1 : \text{l'équation devient } E(x) = 1 \Leftrightarrow x \in [1; 2[. \text{ Si } x \leq 1 : \text{elle devient } E(x) = 2x - 1 \Leftrightarrow (2x - 1 \leq x < 2x \text{ et } 2x - 1 \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (0 < x \leq 1 \text{ et } 2x \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}. \text{ Donc } S = [1; 2[\cup \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$



ABDELLAOUI ACADEMY

Mathématiques – 1^{re} Bac Sciences Expérimentales

Notions de logique – Séries d'exercices
Polycopié préparé par ABDELLAOUI Said
Année scolaire 2026 – 2027 – Version 1.0