

Applications directes des connaissances

Application directe des connaissances de base vue en classe.

Exercice N° 1 : Calculs de limites



Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^3+x+5}$

2 $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 2x^2 + x - 8$

3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^2+4x-5}$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^4 - 2x^2 + x - 1$

5 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

6 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x-2}$

7 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+7} - x$

8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x-2}{x^2+1}$

9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2+x+1} - x$

10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-3}$

11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin x}$

12 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - \sqrt{2}}{2x - \frac{\pi}{2}}$

13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

14 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2}$

15 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2}$

16 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-2x^2}{x-x^3}$

17 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^2+x-1} + 2x$

Exercice N° 2 : Continuité en un point



Étudier la continuité de f en a dans chacun des cas suivants :

1 $\begin{cases} f(x) = \frac{x^4-1}{x+1} ; x \neq -1 \\ f(-1) = -4 \end{cases} ; a = -1$

2 $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+4x-5}{\sqrt{x+8}-3} ; x \neq 1 \\ f(1) = 36 \end{cases} ; a = 1$

3 $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{cases} ; a = 1$

4 $\begin{cases} f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; a = 0$

Exercice N° 3 : Fonctions par morceaux



1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2 + \sqrt{5-x} ; x \leq 4 \\ f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} ; x > 4 \end{cases}$

a Étudier la continuité de f à gauche et à droite en 4.

b La fonction f est-elle continue en 4 ?

2 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} ; x > 0 \\ h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} ; x < 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

Étudier la continuité de h en 0.

3 Soit a un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^3 ; x \leq 0 \\ f(x) = x+a ; x > 0 \end{cases}$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 0.

Exercice N° 4 : Continuité sur $\mathbb{R}$


f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x ; & x \leq 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} ; & x > 1 \end{cases}$

- 1 Étudier la continuité de f sur $] -\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.
- 2 Étudier la continuité de f en 1.
- 3 La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice N° 5 : Continuité sur $\mathbb{R}$


g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} x\sqrt{1-x} ; & x \leq 0 \\ \sqrt{x^2+x} ; & x > 0 \end{cases}$

- 1 Étudier la continuité de g sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
- 2 Étudier la continuité de g en 0.
- 3 La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice N° 6 : Image d'un intervalle


Étudier la continuité de f sur I , puis déterminer $f(I)$ dans chaque cas :

- 1 $f(x) = x^2 - 4x + 1, \quad I = [0 ; 1]$
- 2 $f(x) = \frac{x-1}{x+3}, \quad I =]-3 ; +\infty[$
- 3 $f(x) = \sqrt{x^2-4}, \quad I =]-\infty ; -2]$

Exercice N° 7 : Image d'un segment


g est la fonction définie sur $[-1 ; 1]$ par : $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} ; & x \in [-1 ; 0] \\ x^2 + 1 ; & x \in]0 ; 1] \end{cases}$

- 1 Étudier la continuité de g sur $[-1 ; 1]$.
- 2 Déterminer $g([-1 ; 1])$.

Exercice N° 8 : Théorème des valeurs intermédiaires


Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans I dans chaque cas :

- 1 $f(x) = 2x^3 - 6x + 3, \quad I = [-2 ; 2]$
- 2 $f(x) = \sqrt{x^3+1} - 2x, \quad I =]0 ; 1[$
- 3 $f(x) = x^5 - 3x^2 - 4, \quad I =]-1 ; 2[$

Exercices d'approfondissement

Combiner plusieurs notions, raisonner et rédiger une solution complète.

Exercice N° 9 : Solution unique et signe



Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x} - 1$.

- 1 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.
- 2 Déterminer une valeur approchée de α à 0,01 près.
- 3 Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.

Exercice N° 10 : Intersection avec l'axe



Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^5 - 2x^3 + x - 4$.

Montrer que la courbe (C_g) coupe l'axe des abscisses en au moins un point dans l'intervalle $[-1; 2]$.

Exercice N° 11 : Fonction réciproque



g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \frac{1}{x}$.

- 1 Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2 Calculer $g^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$ sans déterminer $g^{-1}(x)$.

Exercice N° 12 : Réciproque d'une homographie



f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

- 1 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2 Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .
- 3 Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère.

Exercice N° 13 : Réciproque et variations



h est la fonction définie sur $] -\infty; 0]$ par $h(x) = x^4 + 2x^2 + 1$.

- 1 Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2 Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout x de J .
- 3 Donner le tableau de variations de h^{-1} .

Exercice N° 14 : Existence de solutions



- 1 Montrer que l'équation $\sqrt{x^3 + 8x + 1} = 2$ admet au moins une solution dans $[0; 2]$.
- 2 Montrer que l'équation $1 + \sin x - x = 0$ admet une unique solution dans $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
- 3 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x - 1$.
 - a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α sur $\mathbb{R}$.
 - b Montrer que $\alpha \in]0; 1[$.

Exercice N° 15 : Méthode de dichotomie


- 1 Montrer que l'équation $2x^3 + 5x = 4$ admet une unique solution α dans $[-1; 1]$.
- 2 En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.

Exercice N° 16 : Racine n -ième


- 1 Simplifier les nombres suivants :

a $\sqrt[3]{27}$

b $\sqrt[5]{243}$

c $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{64}}$

d $\sqrt[4]{16}$

e $\sqrt{729}$

f $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

- 2 Simplifier les nombres suivants :

a $\frac{\sqrt{\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}}$

b $\frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{4}}$

c $\frac{3^{\frac{2}{4}} \times \sqrt[20]{3\sqrt[4]{9}} \times 3^2}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

- 3 Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $\sqrt[12]{4}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[6]{3}$ et $\sqrt[3]{8}$.

- 4 Montrer que : $\frac{\sqrt{\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}} = 1$.

- 5 Calculer les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$

b $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$

- 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a $x^3 + 27 = 0$

b $\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0$

