

Applications directes des connaissances

Application directe des connaissances de base vue en classe.

Exercice N° 1 : Dérivabilité en un point



Étudier la dérivabilité de f en a dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = x^2 + x; \quad a = 1$

2 $f(x) = x^2 \cos x; \quad a = 0$

3 $f(x) = \frac{1}{x}; \quad a = 2$

4 $f(x) = \sqrt{x}; \quad a = 2$

Exercice N° 2 : Limites et nombre dérivé



En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$

2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^5 - x)^{100} - 1}{x - 1}$

3 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

Exercice N° 3 : Dérivabilité à droite et à gauche



Soit f la fonction $x \mapsto f(x) = |x^2 - 4|$.

1 Montrer que f est dérivable à droite en 2 et à gauche en 2, et déterminer $f'_d(2)$ et $f'_g(2)$.

2 En déduire que f n'est pas dérivable en 2.

Exercice N° 4 : Calcul de dérivées



Calculer la fonction dérivée dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

2 $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$

3 $f(x) = \sin(x^5 + 3)$

4 $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

5 $f(x) = (\tan x)^{10}$

6 $f(x) = \sqrt{\sin x}$

Exercice N° 5 : Dérivée d'une réciproque



Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x$.

1 Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque définie sur $[-1; +\infty[$.

2 Calculer $f(4)$ et $f'(4)$, en déduire que f^{-1} est dérivable en 8 et calculer $(f^{-1})'(8)$.

Exercice N° 6 : Dérivée d'une réciproque


Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- 1 Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = [1; +\infty[$.
- 2 Calculer $f(\sqrt{3})$, montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$.

Exercice N° 7 : Dérivées de racines n -ièmes


Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1 $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ | 2 $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ | 3 $x \mapsto \sqrt[5]{x}$ |
| 4 $x \mapsto \sqrt[6]{x}$ | 5 $x \mapsto \sqrt[7]{x}$ | 6 $x \mapsto \sqrt[8]{x}$ |

Exercice N° 8 : Dérivées de racines de puissances


Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| 1 $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ | 2 $x \mapsto \sqrt[4]{x^7}$ | 3 $x \mapsto \sqrt[5]{x^{10}}$ |
| 4 $x \mapsto \sqrt[6]{x^3}$ | 5 $x \mapsto \sqrt[7]{x^5}$ | 6 $x \mapsto \sqrt[8]{x^3}$ |

Exercice N° 9 : Variations d'une fonction


Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants :

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1 $f(x) = x^2 - 4x$ | 2 $f(x) = x^3 - 3x$ |
| 3 $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$ | 4 $f(x) = \frac{-3x}{x^2 + x + 1}$ |

Exercices d'approfondissement

Combiner plusieurs notions, raisonner et rédiger une solution complète.

Exercice N° 10 : Étude de $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$


Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$.

- 1 Montrer que $D_f = [1; +\infty[$.
- 2 Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[: f(x) > 0$.
- 3 Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $[1; +\infty[$, et en déduire que f est décroissante sur $[1; +\infty[$.
- 4 Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[: \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$.
- 5
 - a Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'il faut déterminer.
 - b Calculer $f(4)$ et en déduire que f^{-1} est dérivable en $2 - \sqrt{3}$.
 - c Déterminer $(f^{-1})'(2 - \sqrt{3})$.

Exercice N° 11 : Étude de $x - 2\sqrt{x}$


On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
- 3 Montrer que $\forall x > 0 : f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$.
- 4 Donner le tableau de variations de la fonction f .
- 5 Déterminer une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 4$.

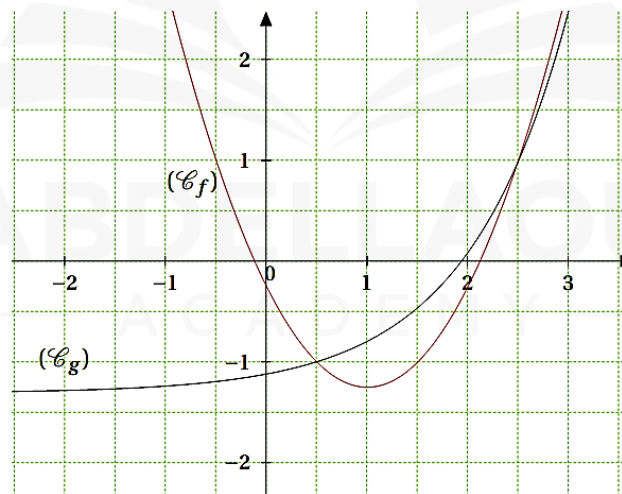
Exercice N° 12 : Fonction rationnelle et réciproque


On considère la fonction f définie sur $I = [0; 2[$ par $f(x) = \left(\frac{x+1}{x^2-4}\right)^2$.

- 1 Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.
- 2 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 3 Calculer $f(1)$, vérifier que f^{-1} est dérivable en $\frac{4}{9}$, puis déterminer $(f^{-1})'\left(\frac{4}{9}\right)$.

Exercice N° 13 : Lecture graphique


Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ des fonctions f et g .

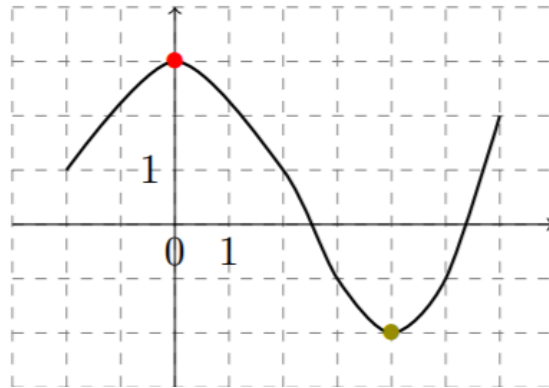


Résoudre graphiquement les inéquations et équations suivantes :

- 1 $g(x) < f(x)$
- 2 $g(x) = f(x)$
- 3 $g(x) > x - 3$
- 4 $g(x) = -1$

Exercice N° 14 : Courbe et extremums


Soit f une fonction définie sur $[-2; 6]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



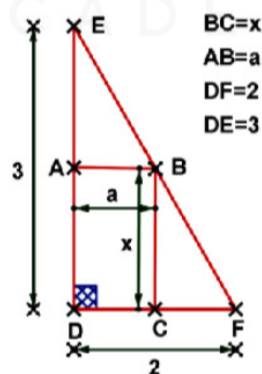
- 1 Dresser le tableau de variations de f .
- 2 Donner les extremums de f sur D_f .

Exercice N° 15 : Lecture d'un tableau


f est une fonction dont voici le tableau de variations :

x	-4	-1	1	3	7
f	-4	4	-5	2	-1

- 1 Donner l'ensemble de définition de f .
- 2 Donner un encadrement de $f(x)$ sur l'ensemble de définition de f .
- 3 Combien de solutions l'équation $f(x) = 1$ admet-elle ?

Exercice N° 16 : Problème d'optimisation


- 1 Déterminer a en fonction de x .
- 2 Déterminer x pour que l'aire du rectangle $ABCD$ soit maximale.