

Applications directes des connaissances

Application directe des connaissances de base vue en classe.

Exercice N° 1 : Étude de $2x^4 - 4x^2 + 1$



Soit la fonction $f : x \rightarrow 2x^4 - 4x^2 + 1$.

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement les résultats.
- 2
 - a Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 8x(x^2 - 1)$
 - b Dresser le tableau de variation de f .
- 3 Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 4 Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = k$.

Exercice N° 2 : Fonction rationnelle



Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 4}{x - 1}$ et C_f sa courbe représentative.

- 1
 - a Déterminer le domaine de définition D_f de f .
 - b Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
 - c En déduire l'équation de l'asymptote verticale Δ
- 2 Déterminer trois réels a , b et c : pour tout $x \in D_f$ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$
- 3
 - a Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote oblique pour C_f .
 - b Étudier la position relative de C_f par rapport à (D) .
- 4
 - a Vérifier que $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x - 1)^2}$.
 - b Dresser le tableau de variations de f .
 - c Donner une équation de la tangente à C_f en 3.
 - d Préciser les extrémums de f .
- 5 Construire C_f .

Exercices d'approfondissement

Combiner plusieurs notions, raisonner et rédiger une solution complète.

Exercice N° 3 : Deux fonctions liées

★★★★

- 1 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
 - a Étudiez la monotonie de la fonction g et dressez son tableau de variations.
 - b Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2; 3[$.
 - c Déduisez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 - d Étudiez les branches infinies de (C_g) .
 - e Montrez que $\Omega(0; -3)$ est un point d'inflexion de (C_g) .
 - f Déterminez la tangente de (C_g) en Ω .
 - g Tracez (C_g) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2}$.
 - a Calculez les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
 - b Déterminez les branches infinies de (C_f) .
 - c Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
 - d Étudiez le signe de $f'(x)$ et déduisez-en le tableau de variations de f .
 - e Étudiez la position relative de (C_f) avec la droite (Δ) d'équation $y = x$.
 - f Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f''(x) = \frac{3(2x+3)}{x^4}$ et étudiez la convexité de (C_f) .
 - g Tracez (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On donne $\alpha \approx 2,1$ et $f(\alpha) \approx 3,8$.

Exercice N° 4 : Fonction auxiliaire

★★★★

- 1 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
 - a Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
 - c Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
 - d Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$.
- 2 f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.
 - a Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que (C) admet deux asymptotes dont on donnera des équations.
 - b Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1; 1\} : f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.
 - c Dresser le tableau de variation de f .
 - d Tracez (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
(On donne le point A de (C) d'abscisse α a pour ordonnée $f(\alpha) = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$).

Exercice N° 5 : Étude de $x - \sqrt{2x-1}$ 

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = x - \sqrt{2x-1}$.

- 1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f . et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2 Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
- 3
 - a Étudier la dérivabilité de f à droite en $\frac{1}{2}$ et interpréter le résultat graphiquement.
 - b Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
 - c Dresser le tableau de variations de f .
- 4 Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 5.
- 5 Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 6 Soit g restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.
 - a Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b Montrer que g^{-1} est dérivable en 2, puis calculer $(g^{-1})'(2)$.

Exercice N° 6 : Étude de $x^2 + x + \sqrt{x}$ 

Soit f une fonction définie comme de suit : $f(x) = x^2 + x + \sqrt{x}$

- 1 Déterminer D_f et calculer les limites dans ses bornes.
- 2 Calculer $f'(x)$, et donner le tableau de variation de f .
- 3 Étudier les branches infinies de C_f .
- 4 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , définie de J vers $I =]0; +\infty[$.
- 5 Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.
- 6 La courbe $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} est la symétrie de C_f par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$.
Tracer la droite (Δ) puis la courbe $C_{f^{-1}}$.

ABDELLAOUI
— ACADEMY —

Exercice N° 7 : Étude de $\sqrt{x^2 + 2x + 3}$


Soient la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

- 1
 - a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
 - b) Vérifier que la droite $(\Delta) : x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe C .
- 2
 - a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$.
 - b) Préciser le sens de variation de f sur $[-1; +\infty[$.
 - c) Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - d) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- 3
 - a) Vérifier que $f(x) - (x+1) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x+1)}$.
 - b) En déduire que la droite $D : y = x+1$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.
 - c) Vérifier que $f(x) - (-x-1) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (-x-1)}$.
 - d) En déduire que la droite $D' : y = -x-1$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.
- 4 Tracer les droites D et D' , puis la courbe C .

Exercice N° 8 : Étude de $1 + \sqrt{x^2 - 2x}$


Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 2x}$.

- 1 Montrez que $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$.
- 2 Montrez que la droite d'équation : $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
- 3 Montrez que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
- 4 Montrez que f n'est pas dérivable à droite en 2. Interprétez graphiquement ce résultat.
- 5
 - a) Montrez que f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.
 - b) Donnez le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
- 6 Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 7 Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [2; +\infty[$.
 - a) Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Donnez le tableau de variations de g^{-1} .
 - c) Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice N° 9 : Étude de la fonction sinus


Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin(x)$

- 1 Montrer qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $[-\pi; \pi]$.
- 2 Montrer que f est impaire, en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$
- 3 Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est l'axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 4 Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$