

Applications directes des connaissances

Application directe des connaissances de base vue en classe.

Exercice N° 1 : Suite arithmético-géométrique



Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{1}{6}U_n + 5 \end{cases}$$

- 1 Montrer que $U_n < 6$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) (par récurrence)
- 2 Montrer que $(U_n)_{n \geq 0}$ est croissante en déduire qu'elle est bornée.
- 3 Soit $(V_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $V_n = U_n - 6$
 - a Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
 - b Calculer V_n en fonction de n , en déduire U_n en fonction de n .
 - c Calculer les sommes en fonction de n : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
- 4 Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N° 2 : Suite homographique



Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 5 - \frac{9}{U_n + 1} \end{cases}$$

- 1 Montrer que (U_n) est minorée par 2 .
- 2 Montrer que (U_n) est décroissante en déduire qu'elle est convergente.
- 3 Soit (V_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \frac{1}{U_n - 2}$
 - a Montrer que (V_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.
 - b Déterminer V_n puis U_n en fonction de n .
 - c En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice N° 3 : Suite homographique


Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = \frac{2}{3}$ et $U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 3}$

- 1 Montrer que $0 < U_n < 1 (\forall n \in \mathbb{N})$
- 2 Montrer que $(U_n)_{n \geq 0}$ est croissante en déduire qu'elle est convergente.
- 3 Soit $(V_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$
 - a Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
 - b Déterminer V_n puis U_n en fonction de n .
 - c Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 4 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x + 2}{2x + 3}$
 - a Vérifier que f est continue sur $[0; 1]$
 - b Montrer que f est croissante sur $[0; 1]$
 - c Déterminer $f([0; 1])$
 - d Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$
 - e En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 5
 - a Calculer : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction n .
 - b Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercices d'approfondissement

Combiner plusieurs notions, raisonner et rédiger une solution complète.

Exercice N° 4 : Suite et inégalité


Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \frac{8(U_n - 1)}{U_n + 2}$

- 1 Montrer que $2 < U_n < 4 (\forall n \in \mathbb{N})$ (par récurrence)
- 2 Étudier la monotonie $(U_n)_{n \geq 0}$ en déduire qu'elle est convergente.
- 3
 - a Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5} (4 - U_n)$
 - b En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$
 - c Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 4 Soit $(V_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 2}$
 - a Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
 - b Déterminer V_n puis U_n en fonction de n .
 - c En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 5
 - a Calculer : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n .
 - b Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice N° 5 : Une suite décroissante


On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - u_n)u_n \end{cases}$$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$
- 3 Démontrer que (u_n) est une suite décroissante puis déduire qu'elle est convergente.
- 4 Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} \leq \frac{1}{4}u_n$
- 5 En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
- 6 Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice N° 6 : Suite homographique


Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 4}{U_n + 3} \end{cases}$$

- 1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < 2$.
- 2 Vérifier que : $U_{n+1} - U_n = \frac{(2 + U_n)(2 - U_n)}{3 + U_n}$.
- 3 En déduire que : (U_n) est convergente.
- 4 On pose pour tout n de $\mathbb{N} : V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$
 - a Montrer que : (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0 = -\frac{1}{3}$
 - b Déterminer V_n en fonction de n en déduire que $U_n = 2 \cdot \frac{3 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{3 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
 - c Déterminer la limite de la suite (U_n)

Exercice N° 7 : Suite et fonction


Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}$ et soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

- 1 Vérifier que f est continue sur $[0; 1]$ et montrer que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$.
- 2 Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0; 1]$.
- 3 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \in [0; 1]$.
- 4 Montrer que (U_n) est croissante en déduire qu'elle est convergente.
- 5 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice N° 8 : Suite et fonction affine


Soient f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ et $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

- 1 Montrer que f est continue sur $[2; 3]$ et que : $f([2; 3]) \subset [2; 3]$.
- 2 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 2 \leq U_n \leq 3$.
- 3 Étudier la monotonie de $(U_n)_{n \geq 1}$, en déduire qu'elle est convergente.
- 4 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice N° 9 : Rattrapage 2015/2016


Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1}{16}U_n + \frac{15}{16}$

- 1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 1$
- 2 Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - U_n = -\frac{15}{16}(U_n - 1)$
- 3 En déduire que (U_n) est croissante puis déduire qu'elle est convergente.
- 4 a Soit $V_n = U_n - 1$. Montre que (V_n) est une suite géométrique de la raison $\frac{1}{16}$
Déterminer V_n en fonction de n .
- b Montrer que : $U_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tous n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de (U_n)

Exercice N° 10 : Normale 2015/2016


Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{3 + U_n}{5 - U_n}$

- 1 Vérifier que : $U_{n+1} - 3 = \frac{4(U_n - 3)}{2 + (3 - U_n)}$ puis montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n < 3$
- 2 a Montrer que $V_n = \frac{U_n - 1}{3 - U_n}$ est une suite géométrique de la raison $\frac{1}{2}$ puis déduire que $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- b Montrer que : $U_n = \frac{1 + 3V_n}{1 + V_n}$ Déterminer U_n en fonction de n en déduire sa limite.

Exercice N° 11 : Rattrapage 2016/2017


Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 17$ et $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 12$

- 1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 16$
- 2 Montrer que (U_n) est décroissante en déduire qu'elle est convergente.
- 3 a Soit $V_n = U_n - 16$ Montrer que (V_n) est une suite géométrique
- b Déduire que $U_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tous n de $\mathbb{N}$ puis déterminer la limite de la suite (U_n)