

Applications directes des connaissances

Application directe des connaissances de base vue en classe.

Exercice N° 1 : Ensembles de définition



Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| 1 $f(x) = \ln(x) + \ln(x-1)$ | 2 $f(x) = \ln(x^2 - x)$ | 3 $f(x) = \ln\left(\frac{x-4}{x-1}\right)$ |
| 4 $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ | 5 $f(x) = \frac{3x}{1 - \ln(x)}$ | 6 $f(x) = \ln(\ln(x))$ |
| 7 $f(x) = \sqrt{1 - (\ln(x))^2}$ | | |

Exercice N° 2 : Équations et inéquations



1 Résoudre les équations suivantes (après avoir déterminer son ensemble de définition) :

- | | |
|----------------------------------|---|
| a $\ln(2x-1) - \ln(x) = 0$ | b $\ln(x^2 - x) = \ln(4x-6)$ |
| c $\ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln(3)$ | d $\ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln(6)$ |
| e $2\ln(2x-1) - 3\ln(1-x) = 0$ | f $\log_2(x-4) + \log_2(2x-1) = \log_2(10)$ |

2 Résoudre les inéquations suivantes (après avoir déterminer son ensemble de définition) :

- | | | |
|-----------------------|--------------------------------|------------------------|
| a $\ln(5x+10) \leq 0$ | b $\ln(3x-2) \leq \ln(x-1)$ | c $\log(5x-10) \leq 3$ |
| d $\ln(3x+2) \leq 0$ | e $\ln(x+2) + \ln(x) > \ln(3)$ | |

Exercice N° 3 : Plus petit entier



Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20}$

Exercice N° 4 : Calculs de limites



Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x + 1}{x}$ | 2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$ | 3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{x}$ |
| 4 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$ | 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(1-x)}{x}$ | 6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x+2}$ |
| 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x^2 + x + 1}$ | 8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 - x$ | 9 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot (\ln x)^2$ |

Déterminer les limites suivantes :

- | | | |
|--|---|--|
| 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$ | 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2} \ln x$ | 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ |
| 4 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3 \ln x}$ | 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}$ | 6 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x \ln(x^2 - x))$ |

Exercice N° 5 : Dérivées et primitives


1 Étudier la dérivabilité de la fonction f et calculer $f'(x)$ dans les cas suivantes :

a $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

b $f(x) = \ln(x^2 + 1)$;

c $f(x) = \ln(2x - \sqrt{x-1})$

d $f(x) = \ln(1 - \ln(x))$

e $f(x) = \log(x^2 - 1)$

2 Déterminer les primitives de f dans chacune des cas suivantes :

a $f(x) = \frac{2}{2x+1}$;

b $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$;

c $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

Exercice N° 6 : Équation et système


1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\log(x-2) + \log(x+3) = 2$

2 Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x+y=65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

Exercice N° 7 : Une suite logarithmique


On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

2 Étudier les variations de (u_n) , déduire quelle est convergente

3 Calculer la limite de (u_n)

Exercices d'approfondissement

Combiner plusieurs notions, raisonner et rédiger une solution complète.

Exercice N° 8 : Étude de $\sqrt{x} - \ln x$


Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$$

1 Étudier les variations de la fonction f et en déduire que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$.

2 En déduire le signe de f puis montrer que : $(\forall x > 1) : 0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$

3 Déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

Exercice N° 9 : Étude de $(x - 1) \ln x$


Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln(x)$

- 1
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
 - c Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - d Calculer $f(1)$ en déduire le signe de $f(x)$.
- 2 Soit g la fonction définie par : $g(x) = (x - 1) \ln(x)$:
 - a Déterminer D_g et calculer les limites de g aux bornes de D_g .
 - b Montrer que : $(\forall x \in D_g) : g'(x) = f(x)$.
 - c Dresser le tableau de variations de g .
 - d Étudier les positions relatives de (C_g) et la droite $(D) : y = x - 1$.
 - e Étudier les branches infinies de la courbe (C_g) .
 - f Tracer la courbe (C_g) dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice N° 10 : Logarithme de base a


- 1 Développer les expressions suivantes :

$$A = \log_2(8) - \log_2(\sqrt[3]{32}) + \log_2(9) - \log_2(3)$$

$$B = \log\left(\frac{1}{10}\right) \times \log(10^{25}) + \log\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$C = \log_2(\sqrt{2}) + \log_{\sqrt{2}}(4)$$

- 2 Résoudre les équations et les inéquations suivantes :
 - a $\log_2(x - 4) + \log_2(2x - 1) = \log_2(4)$
 - b $\log_x(4) = \log_4(x)$
 - c $1 < \log_3(x) < 2$
 - d $\log_{\frac{1}{3}}(4 - x^2) - \log_{\frac{1}{3}}(x) < \log_3(x)$
- 3 Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :
 - a $f(x) = \log(x^2 + x + 1)$;
 - b $f(x) = \log(x^2 - 4)$;
 - c $f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice N° 11 : Étude de $\frac{1}{x \ln x}$


Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

- 1 Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- 2 En déduire les asymptotes à sa courbe (C_f)
- 3 Dresser le tableau de variation de f
- 4 Tracer (C_f) ainsi que sa tangente au point d'abscisse e

Exercice N° 12 : Étude de $(x-1)^2 + \ln^2 x$


Partie 1 : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x(x-1) + \ln x$.

- 1 Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
- 2 Étudier les variations de la fonction g .
- 3 Calculer $g(1)$, puis déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie 2 : Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)^2 + \ln^2(x)$.

- 1 Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis étudier la branche infinie de courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
- 3
 - a Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.
 - b En déduire les variations de f sur D_f .
- 4 Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie 3 : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]0; 1]$.

Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

Exercice N° 13 : Étude de $x\sqrt{\ln x}$


Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{\ln x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1 Montrer que f est continue sur $I = [1; +\infty[$.
- 2
 - a Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 puis interpréter géométriquement le résultat trouvé.
 - b Dresser le tableau de variation de f .
- 3
 - a Déterminer l'intersection de $(\Delta) : y = x$ et (C_f) .
 - b Tracer (C_f) et (Δ) .
- 4
 - a Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $J = [0, +\infty[$.
 - b Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 5 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - a Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq e$.
 - b Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice N° 14 : Étude de $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$


Partie 1 : Soit g la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x)$

- 1 Dresser le tableau de variation de g .
- 2 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3,8 < \alpha < 4$.
- 3 En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in] -1, +\infty[$
- 4 Montrer que pour tout x de $] -1; +\infty[$, on a : $g(x) \leq 1$

Partie 2 : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1 Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
- 2 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
- 3 Montrer que $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.
- 4 Dresser le tableau de variation de f
- 5 vérifier que : $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.
- 6 Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice N° 15 : Étude de $1 + x \ln x - \ln^2 x$


Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + (x-2) \ln x$

- 1 Montrer que : $(\forall x > 0); g'(x) = 2 \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x$
- 2 Étudier les variations de g . Puis en déduire que la fonction g est strictement positive.

Partie B : Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$.

(C_f) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm)

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.
- 2 Montrer que (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.
- 3 a Vérifier que $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x}$, et étudier les variations de f .
b En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
- 4 a Écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1 .
b Étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$.
En déduire le signe de $h(x)$.
c Montrer que $f(x) - x = (\ln x - 1) \cdot h(x)$ et en déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à (T) .
- 5 Tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.