

Applications directes des connaissances

Application directe des connaissances de base vue en classe.

Exercice N° 1 : Forme algébrique



Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

① $z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}$

② $z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

③ $z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

④ $z_4 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}}$

⑤ $z_5 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

⑥ $z_6 = \frac{2i}{1-2i} + \frac{(1+i)^2}{i}$

⑦ $z_7 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

⑧ $z_8 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}$

⑨ $z_9 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

Exercice N° 2 : Partie réelle et imaginaire



Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 0$. On pose $Z = \frac{z-2i}{z-1}$ avec $z = x+iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- ① Déterminer $\Re(Z)$ et $\Im(Z)$ en fonction de x et y .
- ② Déterminer l'ensemble (D) des points $M(z)$ tels que Z est un réel.
- ③ Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que Z est un imaginaire pur.

Exercice N° 3 : Ensembles de points



Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dans le plan complexe dans les cas suivants :

① $\frac{1-z}{1-iz} \in \mathbb{R}$

② $|z+1+i| = 2$

③ $(z-i)(z+1) \in i\mathbb{R}$

④ $|z-2i| = |z+i|$

⑤ $z + \bar{z} = |z|$

⑥ $\left|\frac{z-2i}{z+i}\right| = 2$

⑦ $\frac{z-2i}{z+1} \in i\mathbb{R}_+^*$

⑧ $|(1+i)z-2i| = 2$

⑨ $|z-1-i| \leq 3$

Exercice N° 4 : Forme trigonométrique



Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres suivants :

① $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

② $z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$

③ $z_5 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

④ $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

⑤ $z_4 = (1-i)(-\sqrt{3}+i)$

⑥ $z_6 = (1+i)^5$

Exercice N° 5 : Forme trigonométrique et θ


Soit $\theta \in]-\pi; \pi]$. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1 $z = \sin \theta + i \cos \theta$

2 $z = -\sin \theta - i \cos \theta$

3 $z = -\cos \theta + i \sin \theta$

4 $z = -\cos \theta - i \sin \theta$

5 $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$

6 $z = 1 - \sin \theta - i \cos \theta$

7 $z = \frac{1 - \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta}$

8 $z = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$

Exercice N° 6 : Équations dans $\mathbb{C}$


Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1 $(2 - i)z + i = 0$

2 $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

3 $z^2 + z\bar{z} = 0$

4 $z + 2\bar{z} = 6 + i$

5 $z = (1 + i)\bar{z} + 3 - 2i$

6 $z + \frac{1}{z} = 1$

7 $\begin{cases} z + \bar{z} = i \\ 2z - \bar{z} = 1 + i \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2z - iz' = 1 + i \\ 4z + z' = 1 \end{cases}$

Exercice N° 7 : Module et argument


On pose $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

1 Calculer le module et l'argument de $1+i$ et $\sqrt{3}-i$.

2 Écrire Z sous forme algébrique et trigonométrique.

3 Dédurre $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

On pose $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + \sqrt{2} + i$

1 Déterminer la forme polaire de z_1 .

2 **a** Montrer que : $z_1 z_2 = \sqrt{2} z_2$

b Dédurre que $\arg(z_1) + 2\arg(z_2) \equiv 0[2\pi]$, puis donner l'argument de z_2 .

Exercices d'approfondissement

Combiner plusieurs notions, raisonner et rédiger une solution complète.

Exercice N° 8 : Nombres de module 1


1 Soit z_1 et z_2 de $\mathbb{C}^*$. Démontrer que : $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$

2 Soit $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$. Démontrer que : $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$

Exercice N° 9 : Fonction $p(z)$


On pose $(\forall z \in \mathbb{C}), p(z) = \frac{5z}{z^2 + 1}$ tels que $z \neq i$ et $z \neq -i$.

- 1 Montrer que : $p(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$
- 2 Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lequel $p(z) \in \mathbb{R}$

Exercice N° 10 : Module et argument de $f(z)$


On pose $f(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$ avec $z = [1, \alpha]$ et $\alpha \in]0, \pi[$.

- 1
 - a Montrer que $\overline{f(z)} = \frac{z+1}{(z-1)^2}$
 - b Peut-on dire que $f(z) \in \mathbb{R}^*$?
- 2 On suppose que $z \neq 1$, où $z =]1, \alpha]$ et $\alpha \in]0, \pi[$.
 - a Déterminer le module et l'argument de $z+1$ et $z-1$.
 - b Dédire le module et l'argument de $f(z)$.

Exercice N° 11 : Équation et rotation


I. On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $(E) : 8z^3 + 1 = 0$

- 1 Montrer que l'équation (E) équivaut à $(2z+1)(4z^2 - 2z + 1) = 0$.
- 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

II. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}; \quad b = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}; \quad c = -\frac{1}{2}$$

- 1
 - a Écrire le nombre a sous forme exponentielle.
 - b Vérifier que : $a^2 = b$.
 - c En déduire que : $\arg(b) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.
- 2
 - a Montrer que : $\frac{b-a}{b} = i\sqrt{3}$.
 - b En déduire que le triangle OAB est rectangle en B .
- 3 Soit z l'affixe d'un point M et z' l'affixe du point M' l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
 - a Montrer que : $z' = ze^{i\frac{2\pi}{3}}$.
 - b Montrer que point C est l'image de A par la rotation R .
 - c Montrer que le point B est le milieu du segment $[AC]$.

Exercice N° 12 : Triangle et losange


I. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $\frac{1}{2}z^2 - z + 2 = 0$.

II. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 4, b = 1 - i\sqrt{3}$ et $c = \bar{b}$

- 1 Écrire chacun des nombres b et c sous forme trigonométrique.
- 2 Montrer que : $\frac{b-c}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- 3 En déduire la nature du triangle ABC .
- 4 Soit z l'affixe d'un point M et z' l'affixe du point M' l'image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
 - a Montrer que : $z' = 4 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 4)$.
 - b Montrer que le point D d'affixe $d = 4 + i2\sqrt{3}$ est l'image de C par la rotation R .
 - c Montrer que $ABCD$ est un losange.
- 5 On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ et le point E l'image de C par T
 - a Montrer que l'affixe de E est $\frac{d}{2}$.
 - b Que peut-on dire des point O, D et E .

Exercice N° 13 : Forme exponentielle


- 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.
- 2 On pose $a = 2(\sqrt{3} + i), b = 1 + i$ et $c = 2\sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$.
 - a Écrire chacun des nombres a et $\frac{b}{c}$ sous forme exponentielle.
 - b En déduire que a^{15} est un nombre imaginaire pur.
 - c Montrer que : $\frac{ab}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
 - d Écrire le nombre $\frac{ab}{c}$ sous forme algébrique.
 - e En déduire que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
- 3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$ et les points A et B d'affixes respectives : $\bar{a}$ et $\bar{b}$.
 - a Déterminer l'affixe du point P l'image de B par la rotation R .
 - b Montrer que les points O, A, P sont alignés et que $OA = \sqrt{8}OP$.

Exercice N° 14 : Triangle équilatéral


- 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
- 2 On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $a = 4$, $b = 1 - i\sqrt{3}$ et $c = \bar{b}$.
 - a Écrire chacun des nombres b et c sous forme trigonométrique.
 - b Montrer que $\frac{b-c}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - c Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice N° 15 : Normale 2016


- 1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 29 = 0$
- 2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points Ω , A et B d'affixes respectives ω , a et b telles que $\omega = 2 + 5i$, $a = 5 + 2i$ et $b = 5 + 8i$
 - a Soit u le nombre complexe tel que $u = b - \omega$. Vérifier que $u = 3 + 3i$ puis montrer que $\arg u \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
 - b Déterminer un argument du nombre complexe $\bar{u}$ ($\bar{u}$ étant le conjugué de u)
 - c Vérifier que $a - \omega = \bar{u}$ puis en déduire que $\Omega A = \Omega B$ et que $\arg \left(\frac{b - \omega}{a - \omega} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
 - d On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'image du point A par la rotation R

Exercice N° 16 : Rattrapage 2016


- 1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 41 = 0$
- 2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B , C et Ω d'affixes respectives a , b , c et ω telles que $a = 4 + 5i$, $b = 3 + 4i$, $c = 6 + 7i$ et $\omega = 4 + 7i$
 - a Calculer $\frac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A , B et C sont alignés
 - b Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que $z' = -iz - 3 + 11i$
 - c Déterminer l'image du point C par R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-\omega}{c-\omega}$

Exercice N° 17 : Normale 2017


On considère les nombres complexes a et b tels que $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

- 1
 - a Vérifier que $b = (1 + i)a$
 - b En déduire que $|b| = 2\sqrt{2}$ et que $\arg b \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$
 - c Déduire de ce qui précède que $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
- 2 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que $c = -1 + i\sqrt{3}$
 - a Vérifier que $c = ia$ et en déduire que $OA = OC$ et que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
 - b Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$
 - c En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré.

Exercice N° 18 : Rattrapage 2017


- 1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$
- 2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que $a = -2 + 2i$, $b = 4 - 4i$ et $c = 4 + 8i$
 - a Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que $z' = -iz - 4$
 - b Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC
- 3 Soit ω l'affixe du point Ω , milieu du segment $[BC]$
 - a Montrer que $|c - \omega| = 6$
 - b Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \omega| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC

Exercice N° 19 : Rattrapage 2018


- 1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$
- 2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = \sqrt{2}(1 - i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
 - a Écrire a sous forme trigonométrique.
 - b Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est

$$b = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

- 3
 - a On considère le point C d'affixe $c = 1 + i$, montrer que $b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}$
 - b Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D l'image du point B par la translation t . Montrer que $OD = |b + c|$
 - c En déduire que $OD \times BC = 2\sqrt{3}$

Exercice N° 20 : Normale 2019


- 1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$
- 2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 - i\sqrt{3}, b = 2 + 2i, c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$
 - a Vérifier que $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$
 - b En déduire que les points A, C et D sont alignés .
- 3 On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$.
Vérifier que $z' = \frac{1}{2}az$
- 4 Soient H l'image du point B par la rotation R , h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$
 - a Vérifier que $h = ip$
 - b Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O

Exercice N° 21 : Normale 2020


- 1 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation : $(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$
 - a Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$
 - b En déduire les solutions de l'équation (E) .
- 2 Soient les nombres complexes $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}), b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
 - a Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$
 - b Écrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique.
 - c En déduire que $a = 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$
- 3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$
 - a Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$
 - b Déterminer l'image du point C par la rotation R
 - c Déterminer la nature du triangle OBC .
 - d Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés

Exercice N° 22 : Normale 2021


- 1 Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$
- 2 Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - a Écrire a sous forme algébrique .
 - b Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\bar{a}$.
- 3 Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.
- 4 Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 - a Écrire z' en fonction de z et a .
 - b Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R , montrer que $d = a + 1$
 - c Soit I le point d'affixe le nombre 1 , montrer que $ADIO$ est un losange .
- 5
 - a Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$
 - b Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.
 - c Déduire une mesure de l'angle $(\vec{BI}, \vec{BD})$

Exercice N° 23 : Homothétie et rotation


Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i, Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$

- 1 Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$
- 2 Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h
- 3 On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R
- 4 Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$
 - a Vérifier que $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$
 - b En déduire que $(\vec{AF}, \vec{AD}) + (\vec{ED}, \vec{EF}) \equiv \pi[2\pi]$
 - c Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF
 - d Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.