

Applications directes des connaissances

Application directe des connaissances de base vue en classe.

Exercice N° 1 : Équations



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

① $e^{2x} = 1$

② $e^{-3x} = -2$

③ $3e^{x-2} = 1$

④ $(e^x - 1)(e^{3x} + 2) = 0$

⑤ $e^{5x-2} \times e^{-x} = e$

⑥ $e^x + 4e^{-x} = 4$

⑦ $e^{3x} - 1 = 0$

⑧ $e^{2x} - e^x - 2 = 0$

⑨ $2e^{2x} - 5e^x + 3 = 0$

Exercice N° 2 : Inéquations



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

① $(e^x - 1)(e^x - 2) < 0$

② $\frac{e^{2x} - 4}{1 - e^x} \geq 0$

③ $2\ln^2(x) - 3\ln(x) + 1 > 0$

④ $\ln(3e^x - 1) > 5$

⑤ $3^x - 3^{-x+2} \leq 8$

⑥ $\left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| \leq 2$

Exercice N° 3 : Dérivées



Justifier pour chaque cas, que la fonction f est dérivable puis calculer sa fonction dérivée f'

① $f(x) = e^{2x^2-3x+5}$

② $f(x) = x^3 e^{\frac{1}{x}}$

③ $f(x) = (x-1)e^{\sqrt{x^2-x}}$

④ $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$

⑤ $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$

⑥ $f(x) = 2^x + 3^x$

Exercice N° 4 : Primitives



Déterminer les primitives de la fonction f sur D_f pour chacune des fonctions suivantes :

① $f(x) = e^{2x+5}$

② $f(x) = xe^{x^2}$

③ $f(x) = \frac{3e^x}{\sqrt{2e^x + 1}}$

④ $f(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$

⑤ $f(x) = (x^3 - x)e^{x^4-2x^2+1}$

⑥ $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$

Exercice N° 5 : Primitive avec condition



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{8 - e^x}{e^x + 2}$

① Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = 4 - \frac{5e^x}{e^x + 2}$

② Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(\ln 2) = -6 \ln 2$

Exercice N° 6 : Calculs de limites


Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|--|--|
| 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x$ | 2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{e^x}$ | 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ |
| 4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{2x}$ | 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 2}$ | 6 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - e^x$ |
| 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{e^x + x^2}$ | 8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}$ | 9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x}$ |
| 10 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{2x}$ | 11 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ | 12 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ |

Exercices d'approfondissement

Combiner plusieurs notions, raisonner et rédiger une solution complète.

Exercice N° 7 : Étude de $x + 2 + \frac{4}{e^x - 1}$


Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + 2 + \frac{4}{e^x - 1}$

- Déterminer D_f le domaine de définition de f .
- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- Étudier la parité de f .
- Étudier les variations de la fonction f sur D_f , puis dresser la tableau de variations de f
- Étudier les branches infinies de la courbe C_f .
- Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice N° 8 : Étude de $(x + 1)e^{-x} - 1$


Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)e^{-x} - 1$.

- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Étudier les branches infinies de la courbe C_f .
- Étudier les variations de la fonction f sur D_f , puis dresser la tableau de variations de f .
- Étudier la concavité de C_f .
- Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé.
- Discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $e^x + me^x + x + x = 0$

Exercice N° 9 : Exponentielles de base a


Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

- | | | |
|---------------------|------------------------------------|---|
| 1 $(E_1) : 3^x = 6$ | 2 $(E_2) : 6^x - 5 \times 3^x = 0$ | 3 $(E_3) : 7^x - 3 + 2 \times 7^{-x} = 0$ |
| 4 $(I_1) : 3^x < 6$ | 5 $(I_2) : 6^x - 5 \times 3^x > 0$ | 6 $(I_3) : 7^x - 3 + 2 \times 7^{-x} < 0$ |

Exercice N° 10 : Étude de $4^x - 2^x$ 

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4^x - 2^x$:

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que C_f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique à déterminer.
- 2 Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$ et dresser le tableau de variations de f .

Exercice N° 11 : Fonction auxiliaire

I). Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - 2x - 2$

- 1 Étudier les variations de la fonction g .
- 2 En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$

II). Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{2x} - 4xe^x - 2$

- 1 Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, et représenter géométriquement le résultat.
- 2 Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et représenter géométriquement les résultats.
(Vérifier que $f(x) = xe^x \left(2\frac{e^x}{x} - 4 \right) - 2$)
- 3
 - a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 2g(x)e^x$
 - b En déduire que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$
 - c Calculer $f'(0)$ représenter géométriquement ce résultat
 - d Construire la courbe (C_f)



Exercice N° 12 : Juin 2018


I- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$.

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

1 Vérifier que : $g(0) = 0$.

2 Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $] -\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$

II- Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$

1 a Vérifier que $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$. En déduire que (C) admet une asymptote (D) au voisinage $+\infty$ d'équation $y = x$.

c Vérifier que $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

d Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

2 a Montrer que $f(x) - x$ et $x^2 - x$ ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$.

b En déduire que (C) est au dessus de (D) sur chacun des intervalles $] -\infty; 0]$ et $[1; +\infty[$, et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0; 1]$.

3 a Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b En déduire que la fonction f est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

c Dresser le tableau de variations de f .

4 a Montrer que $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b En déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4.

5 Construire (D) et (C) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on prend $f(4) \simeq 4.2$).

6 Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

III- Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (on pourra utiliser le résultat de la question II) 3.))

2 Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N° 13 : Juillet 2021


Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.
- 3
 - a Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$
 - b Dresser le tableau de variations de f .
- 4
 - a Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$
 - b Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 2.
- 5 Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (On prend : $f(2) \simeq 1.25$)
- 6 Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{x-1} \geq x$
 - a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice N° 14 : Juin 2020


On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- 2
 - a Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
 - b Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; 2 + \ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln 4; +\infty[$
- 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 4
 - a Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$
 - b Dresser le tableau de variations de f .
- 5 Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de (C) .
- 6 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$
- 7 Construire (Δ) et (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (On prend : $f(2) \simeq 1.25$) ci-dessous (on prend $\ln 2 \simeq 0.7$ et $\ln 3 \simeq 1.1$)
- 8
 - a Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
 - b Construire dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe représentative de f^{-1} (Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)
 - c Calculer $(f^{-1})(2 - \ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$)

Exercice N° 15 : Juillet 2020


I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$

- 1 Montrer que $g'(x) < 0$, pour tout $x \in]0; +\infty[$
- 2 Dédire le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$; (remarquer que $g(1) = 0$)

II- On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2 \ln x$

- 1 Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.
- 2 a Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.
- 3 a Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = (x-2)g(x)$
b Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0; 1]$ et sur $[2; +\infty[$ et croissante sur $[1; 2]$
c Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$, (on admet $f(2) \simeq 1.25$)
- 4 Sachant que $f(3) \simeq 0.5$ et $f(4) \simeq -1.9$ montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]3; 4[$
- 5 Construire (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

III- On pose $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de l'intervalle $[1; 2]$

x	1	2
$h(x)$	0	$h(2)$

- 1 a À partir du tableau de variations de la fonction h ci-contre, montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1; 2]$
b Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1; 2]$
- 2 Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
a Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$
b Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice N° 16 : Juillet 2020


On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - 2x + 2 - 3e^{-x}$.

- 1 a Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = \frac{(e^x - 1)^2 + 2}{e^x}$.
b Poser la tableau de variations de la fonction u (sans calcul de limite).
c En déduire le signe de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (remarque $u(0) = 0$)
- 2 Soit la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 3$
a Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $v(x) = e^x u(x)$
b En déduire le signe de la fonction v sur $\mathbb{R}$.
- 3 a Montrer que la fonction w définie par $w(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (4-2x)e^x - 3x$ est une primitive de v sur $\mathbb{R}$.
b Montrer que $\frac{9}{2}$ est minimum absolu de la fonction w sur $\mathbb{R}$.