

Applications directes des connaissances

Application directe des connaissances de base vue en classe.

Exercice N° 1 : Calcul d'intégrales



Calculer les intégrales suivantes :

1 $\int_0^1 \sqrt{x} dx.$

3 $\int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x} dx.$

5 $\int_0^1 2^{5x} dx$

7 $\int_{-1}^1 |1 - e^x| dx$

9 $\int_0^1 1 - |2x - 1|^3 dx.$

2 $\int_0^1 3xe^{x^2+3} dx$

4 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx.$

6 $\int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 1} dx$

8 $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

10 $\int_{\frac{1}{2}}^e \frac{|\ln(x)|}{x} dx.$

Exercice N° 2 : Intégration par parties



En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1 $\int_1^{e^2} x \ln^2(x) dx.$

3 $\int_1^2 x \sqrt{3-x} dx.$

5 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx.$

7 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx.$

9 $\int_0^1 x^2 e^x dx.$

2 $\int_1^4 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx.$

4 $\int_0^1 \frac{1 + \ln(x)}{x} dx.$

6 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$

8 $\int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) dx.$

10 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x) e^x dx.$

Exercice N° 3 : Décomposition et intégrale



1 Déterminer les réels a, b et c tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$

2 En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx.$

Exercices d'approfondissement

Combiner plusieurs notions, raisonner et rédiger une solution complète.

Exercice N° 4 : Intégrales I et J

★★★★

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2(x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2(x) dx$.

- 1 Calculer $I + J$.
- 2
 - a Vérifier que $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx$.
 - b En utilisant une intégration par parties, calculer $I - J$.
- 3 En déduire les valeurs de I et J .

Exercice N° 5 : Trois intégrales

★★★★

L'objectif de cet exercice est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}, J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \text{ et } K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

- 1
 - a Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$. Calculer f' la dérivée de f .
 - b Calculer la valeur de I .
- 2
 - a Sans calculer explicitement J et K , vérifier que $J + 2I = K$.
 - b A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
 - c En déduire les valeurs de J et K .

Exercice N° 6 : Calculs d'aires

★★★☆☆

On se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 1,5$ cm. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ dans les cas suivants :

- 1 $f(x) = \ln(x+2)$, $a = -1$ et $b = 2$.
- 2 $f(x) = (x-1)e^x$, $a = 1$ et $b = \ln(4)$.
- 3 $f(x) = x - x^3$, $a = -2$ et $b = 0$.

Exercice N° 7 : Aire entre deux courbes

★★★☆☆

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $\|\vec{i}\| = 2$ cm. Soient f et g les fonction définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{2x}$.

- 1 Déterminer la position relative de deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.
- 2 Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et les deux droites d'équations $x = -\ln(2)$ et $x = \ln(4)$.

Exercice N° 8 : Volumes de révolution


On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace d'unité $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$.
Calculer, en cm^3 , le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f autour de l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ dans les cas suivants :

- 1 $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$ et $b = \pi$.
- 2 $f(x) = \sqrt{x \ln(x)}$, $a = 1$ et $b = e^2$.
- 3 $f(x) = xe^x$, $a = -2$ et $b = 1$.

Exercice N° 9 : Primitives


Déterminer une primitive sur l'intervalle I des fonctions suivantes :

- 1 $f(x) = x(x^2 + 1)^2$; $I = \mathbb{R}$
- 2 $f(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$; $I =]0; +\infty[$
- 3 $f(x) = xe^{x^2+5}$; $I = \mathbb{R}$
- 4 $f(x) = e^{x-4}$; $I = \mathbb{R}$

Exercice N° 10 : Calcul d'intégrales


Calculer les intégrales suivantes :

- 1 $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x} dx$
- 2 $\int_3^4 \frac{2}{x-1} dx$
- 3 $\int_1^{\ln(3)} x^2 e^{x^3} dx$
- 4 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x+1) dx$
- 5 $\int_0^2 \frac{x+1}{(x^2+2x+4)^2} dx$

Exercice N° 11 : Intégration par parties


Calculer les intégrales suivantes : (Méthode d'intégration par partie)

$$I_1 = \int_1^2 x^2 \ln(x) dx; \quad I_2 = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx; \quad I_3 = \int_0^{\ln(2)} x^2 e^{-x} dx; \quad I_4 = \int_0^1 \cos(x) e^x dx$$

$$I_5 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx; \quad I_6 = \int_0^1 x^3 e^x dx; \quad I_7 = \int_0^1 x \cos(x) dx; \quad I_8 = \int_0^1 x^2 \sin(x) dx$$

Exercice N° 12 : Valeur moyenne


Calculer la valeur moyenne de f sur I dans les cas suivantes :

- 1 $f(x) = \ln(2x)$ et $I = [1; e]$
- 2 $f(x) = e^{-x}$ et $I = [0; 1]$

Exercice N° 13 : Primitives


Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivantes :

- 1 $f(x) = \ln(x)$; $I =]0; +\infty[$
- 2 $f(x) = x \sin(x)$; $I = \mathbb{R}$
- 3 $f(x) = x \ln(x)$; $I = \mathbb{R}_+^*$

Exercice N° 14 : Valeur moyenne et encadrement

- 1 Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sur $[1; 3]$
- 2 Montrer que : $(e+1)\ln(2) \leq \int_1^2 \frac{e^x+1}{x} dx \leq (e^2+1)\ln(2)$

Exercice N° 15 : Aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x + \frac{1}{e^x - 1}$ et $g(x) = x$.

Calculer l'aire du domaine délimité par : la courbe de f ; la courbe de g et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$, (on donne : $\|\vec{i}\| = 3 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$).

Exercice N° 16 : Aire et volume

A- Soit f la fonctions définie par : $f(x) = \ln(x)$.

- 1 Montrer que la fonction : F définie par : $F(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$
- 2 Calculer l'aire du domaine délimité par : la courbe de f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = e^{-1}$ et $x = e$, (on donne : $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$).

B- Soit f la fonctions définie par : $f(x) = xe^x$.

Calculer le volume de solide engendré par la rotation de la courbe représentative de f sur $[0; 1]$, autour de l'axe des abscisse, exprimée en unité de volume,, (on donne : $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$).

