

Applications directes des connaissances

Application directe des connaissances de base vue en classe.

Exercice N° 1 : Normale 2018



Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points suivants : $A(0, -2, -2)$, $B(1, -2, -4)$ et $C(-3, -1, 2)$.

- 1 Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et en déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2 Soit (S) la sphère dont l'équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$.
Vérifier que (S) est une sphère de centre $\Omega(1, 0, 1)$ et de rayon $R = 5$.
- 3 a Vérifier que : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC) .
b Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .
- 4 Montrer que $d(\Omega, (ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

Exercice N° 2 : Normale 2015



Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(2, 1, 0)$ et $B(-4, 1, 0)$.

- 1 Soit (P) le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Montrer que $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) .
- 2 Soit (S) l'ensemble des points M vérifiant la relation : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1, 1, 0)$ et de rayon 3.
- 3 a Calculer la distance du point Ω au plan (P) , en déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle (C) .
b Démontrer que le centre du cercle (C) est $H(0, 2, -1)$.
- 4 Montrer que : $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$. En déduire l'aire du triangle OHB .

Exercice N° 3 : Rattrapage 2009


On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le point $A(2, 2, -1)$ et le plan (P) d'équation $2x + y + 2z - 13 = 0$ et la sphère de centre $\Omega(1, 0, 1)$ et de rayon 3

- 1
 - a Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) et vérifier que A appartient à (S) .
 - b Calculer la distance du point Ω au plan (P) et déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S) .
- 2 Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire au plan (P) .
 - a Montrer que $\vec{u}(2, 1, 2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et $(6, -6, -3)$ est le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$.
 - b Calculer $\frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$, en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A .

Exercice N° 4 : Normale 2007


Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la sphère (S) d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$ et le plan (P) d'équation : $x - y + 2z + 1 = 0$.

- 1 Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 2, 3)$ et de rayon $\sqrt{6}$.
- 2 Vérifier que le plan (P) est tangent à la sphère (S) .
- 3
 - a Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)
 - b Déterminer le triplet coordonnées ω point tangence de (P) et (S)

Exercices d'approfondissement

Combiner plusieurs notions, raisonner et rédiger une solution complète.

Exercice N° 5 : Rattrapage 2022


Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1, -1, 1)$ et $B(5, 1, -3)$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(3, 0, -1)$ de rayon $R = 3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2, -2, 1)$.

- 1
 - a Calculer la distance ΩA .
 - b Montrer que la droite (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.
 - c Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S) .
- 2 Soit le point $M_a(2a - 3, 3 - 2a, a - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a - 2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- 3
 - a Vérifier que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)
 - b Montrer que $d(\Omega, (P_a)) = |3a - 6|$
 - c Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S) .

Exercice N° 6 : Normale 2022


Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 1, 1)$, $B(1, 2, 0)$ et $C(-1, 1, 2)$

- 1
 - a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$
 - b) En déduire que $x + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2 Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1, 1, 2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$. Déterminer une équation de la sphère (S) .
- 3 Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A .
- 4 On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)
 - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)
 - b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées.
 - c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k})$, puis en déduire la distance $d(A, (\Delta))$

Exercice N° 7 : Normale 2017


Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) passant par le point $A(0, 1, 1)$ et dont $\vec{u}(2; 0; 2)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0; 1; -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

- 1
 - a) Montrer que : $x - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) .
 - b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1; 1; 0)$ est le point de contact .
- 2
 - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P) .
 - b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C(1; 1; 0)$.
- 3 Montrer que : $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB .

Exercice N° 8 : Rattrapage 2017


L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et le plan (P) d'équation $y - z = 0$.

- 1
 - a) Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1, 1, 1)$ et pour rayon est 2 .
 - b) Calculer $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)
 - c) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) .
- 2 Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1, -2, 2)$ et orthogonale au plan (P) .
 - a) Montrer que $\vec{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .
 - b) Montrer que $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.
 - c) Déterminer les coordonnées de chaque points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S)